

THÉORÈMES LIMITES AVEC POIDS POUR LES MARTINGALES VECTORIELLES À TEMPS CONTINU

FAOUZI CHAABANE¹ ET AHMED KEBAIER²

Abstract. On développe une approche générale du théorème limite centrale presque-sûre pour les martingales vectorielles quasi-continues à gauche convenablement normalisées dont on dégage une extension quadratique et un nouveau théorème de la limite centrale. L'application de ce résultat à l'estimation de la variance d'un processus à accroissements indépendants et stationnaires illustre l'usage qu'on peut en faire en statistique.

Classification Mathématique. 60G46, 60G51, 60F05.

Reçu le 16 octobre 2007.

1. INTRODUCTION

1.1. Motivation

Établi suite aux travaux pionniers de Brosamler [2] et de Schatte [11], le théorème de la limite centrale presque-sûre (TLCPS) a révélé un nouveau phénomène dans la théorie classique des théorèmes limites. En effet, pour une marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 1}$ dont les accroissements sont des v.a. i.i.d., centrées de variance C , le (TLCPS) assure que les mesures empiriques logarithmiques associées aux v.a. $(n^{-1/2}S_n)$, c'est-à-dire :

$$\mu_N = (\log N)^{-1} \sum_{n=1}^N n^{-1} \delta_{n^{-1/2}S_n}$$

vérifient

$$\mu_N \Rightarrow \mu_\infty \text{ p.s.},$$

où μ_∞ est la loi gaussienne de moyenne 0 et de variance C , δ_x désigne la mesure de Dirac en x et “ \Rightarrow ” désigne la convergence étroite des mesures ou la convergence en loi des variables aléatoires. Dans ce cadre, on dispose

Mots Clés. Martingales quasi-continues, théorème limite centrale presque-sûre, loi forte quadratique, loi logarithmique itérée.

¹ Équipe d'Analyse Stochastique et Modélisation Statistique (DGRST, 05UR15-06), Faculté des Sciences de Bizerte, 7021 Jarzouna, Tunisie.

² Université Paris 13, Institut Galilée, Mathématiques, 99 av. JB Clément, 99430 Villetaneuse, France ;
kebaier@math.univ-paris13.fr

de la propriété suivante appelée loi forte quadratique (LFQ) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)^{-1} \sum_{n=1}^N n^{-2} S_n^2 = C \text{ p.s.}$$

Le théorème de la limite centrale presque-sûre ainsi que la détermination des vitesses de convergence de la LFQ sous-jacente ont mené à une littérature étendue durant la décennie passée. En effet, ces propriétés ont été généralisées aux martingales discrètes unidimensionnelles par Chaabane [3] et Lifshits [10] puis aux martingales discrètes d -dimensionnelles par Chaabane *et al.* [6] et Bercu [1] et ensuite aux martingales continues par Chaabane [4]. Les résultats de Chaabane [3,4] ont été obtenus grâce à une approximation forte de la martingale M par une trajectoire Brownienne. Alors que les résultats de Chaabane *et al.* [6] et Chaabane and Maaouia [5] ont été obtenus en reprenant la technique de la fonction caractéristique utilisée par Touati [13] pour démontrer une extension du théorème de la limite centrale pour les martingales.

Le but de cet article consiste d'une part à généraliser le théorème de la limite centrale presque-sûre aux martingales quasi-continues à gauche et d'autre part à établir des théorèmes limites précisant les vitesses de convergences (en loi et au sens presque-sûr) de la loi forte quadratique (LFQ) dans ce cadre. L'exemple suivant met en évidence l'application des différents théorèmes obtenus et leur usage en statistique.

1.2. Estimation de la variance d'un PAIS

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) dont la mesure de Lévy des sauts $\nu(dt, dx) = dt F(dx)$ vérifie :

$$\int |x|^{2p} F(dx) < \infty \text{ pour un } p > 1, \tag{1.1}$$

F étant une mesure positive sur \mathbb{R}^* . On note :

$$m = \mathbb{E} S_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{E} S_1^2 - m^2 \text{ et } \hat{m}_t = \frac{S_t}{t}.$$

La loi forte quadratique (voir th. 2.2) nous permet de dégager un estimateur fortement consistant de σ^2 . En effet, on a le résultat suivant

$$(\log(1+t))^{-1} \int_0^t \frac{(S_r - mr)^2}{(1+r)^2} dr \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \sigma^2 \text{ p.s.}$$

dont on déduit que

$$\hat{\sigma}_t^2 := (\log(1+t))^{-1} \int_0^t \frac{(S_r - mr)^2}{(1+r)^2} dr$$

est un estimateur fortement consistant de σ^2 . Le théorème de la limite centrale associé à la loi forte quadratique (voir cor. 2.2) nous permet d'établir le résultat suivant

$$\sqrt{\log(1+t)}(\hat{\sigma}_t^2 - \sigma^2) \Rightarrow \mathfrak{N}(0, 4\sigma^4).$$

Dans la partie 4, ces résultats seront améliorés par une technique de pondération.

1.3. Préliminaires

On note $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^d . Pour une matrice réelle carrée $A : A^*$, $\text{tr}(A)$, et $\det(A)$ désignent respectivement la matrice transposée, la trace et le déterminant de A . La norme de A est définie par : $\|A\|^2 = \text{tr}(A^*A)$. Le vecteur obtenu en empilant les vecteurs colonnes de la matrice A est noté $\text{Vect}(A)$ et

$[\text{Vect}(A) \text{Vect}(A)^*]^\perp$ est la matrice à blocs dont le bloc d'indice $1 \leq i, j \leq d$ est $A_j A_i^*$ où A_1, \dots, A_d sont les vecteurs colonnes de A . Le symbole \otimes désigne le produit tensoriel de mesures ou de matrices.

Rappelons que toute martingale locale M admet une décomposition unique en $M^c + M^d$, où M^c est la partie martingale locale continue alors que M^d est une somme compensée de sauts nulle en zéro. La variation quadratique de M notée $[M]$ est le processus défini de la manière suivante :

$$[M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} \Delta M_s \Delta M_s^*,$$

où $\langle M^c \rangle_t$ est l'unique processus croissant continu adapté tel que $MM^* - \langle M^c \rangle$ soit une martingale locale nulle en zéro. le compensateur prévisible du processus $[M]$ est noté par $\langle M \rangle$. Dans la suite, on considère une martingale quasi-continue à gauche $M = (M_t)_{t \geq 0}$ d -dimensionnelle, localement de carré intégrable, définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ (voir Jacod and Shiryaev [8]) et un processus déterministe $V = (V_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans l'ensemble des matrices inversibles. Pour $u \in \mathbb{R}^d$, on définit

$$\Phi_t(u) := \exp\left(-\frac{1}{2}u^* \langle M^c \rangle_t u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\exp(i\langle u, x \rangle) - 1 - i\langle u, x \rangle) \nu^M(ds, dx)\right)$$

où ν^M est la mesure de Lévy des sauts de M . Le théorème fondamental suivant de Touati [12] nous sera utile dans les preuves de nos principaux résultats. Il donne une version généralisée du TLC utilisant non pas la condition de Lindeberg mais une hypothèse sur les fonctions caractéristiques valable même dans le cas non gaussien.

Théorème 1.1 (théorème limite centrale généralisé pour les martingales). *Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale, d -dimensionnelle, nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t)_{t \geq 0}$ une famille déterministe de matrices inversibles. Et soit \mathcal{Q} une probabilité sur l'espace $\mathcal{C}(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues de \mathfrak{X} dans \mathbb{R}^d (où \mathfrak{X} désigne un espace vectoriel de dimension finie). Si le couple (M, V) vérifie l'hypothèse :*

$$(\mathcal{H}) : \begin{cases} \Phi_t((V_t^*)^{-1}u) \rightarrow \Phi_\infty(\eta, u) \text{ p.s.} \\ \Phi_\infty(\eta, u) \text{ non nulle p.s.} \end{cases}$$

où η désigne une v.a., éventuellement dégénérée, à valeurs dans \mathfrak{X} et pour $(z, u) \in \mathfrak{X} \times \mathbb{R}^d$:

$$\Phi_\infty(z, u) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle u, \xi \rangle) \pi(z, d\xi)$$

désigne la transformée de Fourier des lois conditionnelles unidimensionnelles $(\pi(z, \cdot); z \in \mathfrak{X})$ de la probabilité \mathcal{Q} . Alors

$$Z_t := V_t^{-1}M_t \Rightarrow Z_\infty := \Sigma(\eta)$$

de manière stable où $(\Sigma(z), z \in \mathfrak{X})$ est un processus de loi \mathcal{Q} et indépendant de la v.a. η .

Les principaux résultats sont énoncés au paragraphe suivant et démontrés au paragraphe 3. Dans le paragraphe 4, on donne l'application des résultats théoriques de la partie 2 pour l'estimation de la matrice de covariance d'un processus d -dimensionnel à accroissements indépendants et stationnaires.

2. ÉNONCÉS DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

Désormais on dit que la normalisation matricielle (V_t) vérifie les conditions (\mathcal{C}) si les trois propriétés $\{(\mathcal{C}1), (\mathcal{C}2), (\mathcal{C}3)\}$ suivantes ont lieu :

- $(\mathcal{C}1)$ $t \mapsto V_t$ est de classe \mathcal{C}^1 ;
- $(\mathcal{C}2)$ il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq s \geq s_0$ on a $V_s V_s^* \leq V_t V_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques positives) ;
- $(\mathcal{C}3)$ il existe une fonction $a = (a_t)$ continue sur \mathbb{R}_+ , décroissante vers 0 à l'infini, telle que :

$$A_t := \int_0^t a_s ds \uparrow \infty \text{ pour } t \uparrow \infty$$

et une matrice U vérifiant :

$$\begin{cases} U + U^* = S, & S \text{ inversible} \\ a_t^{-1} V_t^{-1} \frac{dV_t}{dt} - U = \Delta_t, & \text{avec } \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t = 0. \end{cases}$$

Les conditions (\mathcal{C}) sont notamment vérifiées lorsque la normalisation (V_t) est de type scalaire, à savoir

$$V_t = v_t I_d,$$

où $t \mapsto v_t$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $t \mapsto v_t^2$ soit croissante pour t assez grand. Dans ce cas, on a évidemment

$$a_t = v_t^{-1} \frac{dv_t}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log v_t^2, \quad \text{et } U = I_d.$$

Remarque 1. Notons que la condition $(\mathcal{C}1)$ est nécessaire afin de pouvoir gérer les formules d'intégration par parties qui apparaissent dans nos preuves. La condition $(\mathcal{C}2)$ apparaît comme une condition naturelle, vu que $(V_t)_{t \geq 0}$ sert de normalisation pour la martingale $(M_t)_{t \geq 0}$. La condition $(\mathcal{C}3)$ permet de donner un équivalent de la vitesse $\log(\det V_t^2)$ (voir la relation (3.4)) et de contrôler la vitesse de sa différentielle. Ces conditions sont simples à vérifier, surtout dans le cas d'une normalisation scalaire $(v_t)_{t \geq 0}$.

2.1. Théorème de la limite centrale presque-sûre généralisé

Théorème 2.1. Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale, d -dimensionnelle, nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t)_{t \geq 0}$ une famille déterministe de matrices inversibles satisfaisant aux conditions (\mathcal{C}) , ci-dessus, avec

$$\|\Delta_r\| = O(A_r^{-\beta}), \quad (r \rightarrow \infty) \text{ pour un } \beta > 1.$$

Si le couple (M, V) vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}) du théorème 1.1 et l'hypothèse

$$(\mathcal{H}1) : \quad V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1} \rightarrow C \text{ p.s., } (t \rightarrow \infty),$$

(où C est une matrice aléatoire ou non) alors les mesures (μ_R) aléatoires définies par :

$$\mu_R = (\log(\det V_R^2))^{-1} \int_0^R \delta_{Z_r} d \log(\det V_r^2), \quad \text{où } Z_r = V_r^{-1} M_r$$

vérifient la version généralisée suivante du TLCPS :

$$(TLCPSG) : \quad \mu_R \implies \mu_\infty \text{ p.s.}, \quad (R \rightarrow \infty),$$

où μ_∞ est la loi de $Z_\infty = \Sigma(\eta)$ (cf. th 1.1).

Remarque 2. Notons que le TLC classique s'obtient sous l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$ et la condition de Lindeberg

$$(\mathcal{H}') : \quad \forall \delta > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \|V_t^{-1}x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_t^{-1}x\| > \delta\}} \nu^M(ds, dx) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

lesquelles impliquent l'hypothèse (\mathcal{H}) avec

$$\eta = C^{1/2} \quad \text{et} \quad \Phi_\infty(\eta, u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^*Cu\right),$$

et que les preuves sont plus faciles à mener sous (\mathcal{H}') que sous (\mathcal{H}) .

2.2. Lois fortes quadratiques associées au TLCPS

Le théorème suivant donne une loi forte des grands nombres avec une normalisation matricielle :

Théorème 2.2. Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale, d -dimensionnelle, quasi-continue à gauche et nulle en 0. On suppose que pour une famille de matrices inversibles $V = (V_t)_{t \geq 0}$, vérifiant les conditions (\mathcal{C}) avec

$$\|\Delta_r\| = O(A_r^{-\beta}), \quad (r \rightarrow \infty) \quad \text{pour un } \beta > 1$$

le couple (M, V) satisfait aux hypothèses : $(\mathcal{H}), (\mathcal{H}1)$,

$$(\mathcal{H}2) : \quad V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} C \text{ p.s.}$$

et

$$(\mathcal{H}3) : \quad C = \int xx^* d\mu_\infty(x).$$

Alors on a les résultats suivants :

$$(LFQ) : \quad (\log(\det V_R^2))^{-1} \int_0^R V_s^{-1}M_sM_s^*V_s^{*-1}d(\log(\det V_s^2)) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} C \text{ p.s.},$$

$$(LL) : \quad \|V_r^{-1}M_r\| = o(\sqrt{\log(\det V_r^2)}) \text{ p.s.}$$

Ces deux propriétés sont encore vraies en remplaçant l'hypothèse $(\mathcal{H}2)$ par

$$(\mathcal{H}'2) : \quad \exists p \in [1, 2]; \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1 + A_s)^{-p} \|V_s^{-1}x\|^{2p} \nu^M(ds, dx) < \infty \text{ p.s.}$$

Remarque 3.

(1) l'hypothèse $(\mathcal{H}'2)$ implique que

$$\int_0^t V_s^{-1}(d[M]_s - d\langle M \rangle_s)(V_s^*)^{-1} = o(A_t) \text{ p.s.}$$

(2) Notons aussi que l'hypothèse $(\mathcal{H}3)$ est automatiquement vérifiée sous les hypothèses (\mathcal{H}') et $(\mathcal{H}1)$, car dans ce cas $Z_\infty = C^{1/2}G$ où G est une v.a. gaussienne d -dimensionnelle standard indépendante de C .

2.3. Vitesse de convergence de la LFQ

On donne ici un TLC précisant la vitesse de convergence en probabilité de la LFQ établie ci-dessus. À cet effet, on renforce l'hypothèse $(\mathcal{H}'2)$ de la façon suivante

$$(\mathcal{H}''2) : \quad \exists p \in [1, 2]; \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1 + A_s)^{-p/2} \|V_s^{-1}x\|^{2p} \nu^M(ds, dx) < \infty \quad p.s.$$

Sous cette hypothèse (cf., rem. 2), on montre que

$$\int_0^t (V_s)^{-1} (d[M]_s - d\langle M \rangle_s) (V_s^*)^{-1} = o(A_t^{1/2}), \quad p.s.$$

Théorème 2.3. *Soit $M=(M_t, t \geq 0)$ une martingale locale, d -dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en 0. On suppose que pour une famille de matrices inversibles $V = (V_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les conditions (\mathcal{C}) le couple (M, V) satisfait aux hypothèses : (\mathcal{H}) , $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}''2)$ et $(\mathcal{H}3)$. Supposons de plus, que la condition $(\mathcal{C}3)$ est vérifiée avec $\Delta_t = O(A_t^{-3/2})$, $(t \rightarrow \infty)$. Alors posant*

$$\tilde{D}_s = V_s^{-1} (M_s M_s^* - \langle M \rangle_s) (V_s^*)^{-1}$$

on a

$$(\log(\det V_t^2))^{-1/2} \int_0^t [U \tilde{D}_s + \tilde{D}_s U^*] d(\log(\det V_s^2)) \Rightarrow \nu_\infty, \quad \text{pour } (t \rightarrow \infty)$$

où conditionnellement à C , ν_∞ est une loi gaussienne matricielle centrée, indépendante de la v.a. C et de covariance

$$\mathcal{C} = 2C \otimes C + 2[(\text{Vect}(C))(\text{Vect}(C))^*]^\perp.$$

Remarque 4. Sous les hypothèses du théorème 2.3 on a en fait le résultat plus fort suivant

$$\left\{ (\log(\det V_t^2))^{-1/2} \int_0^t [U \tilde{D}_s + \tilde{D}_s U^*] d(\log(\det V_s^2)), V_t^{-1} M_t \right\} \Rightarrow \nu_\infty \otimes \mu_\infty, \quad \text{pour } (t \rightarrow \infty)$$

dont la preuve est une adaptation au cas continu de celle du théorème 2.3 de Chaabane and Maaouia [5]. Cette preuve est plus difficile à mener sous l'hypothèse (\mathcal{H}) que sous l'hypothèse (\mathcal{H}') .

Corollaire 2.1. *Dans le cadre du théorème 2.3, si R est la matrice symétrique positive solution de l'équation de Lyapounov*

$$RU + U^*R = C,$$

alors, on a pour $t \rightarrow \infty$

$$(\log(\det V_t^2)) \int_0^t \text{tr} \left(V_s^{-1} (M_s M_s^* - \langle M \rangle_s) (V_s^*)^{-1} \right) d(\log(\det V_s^2)) \Rightarrow 2\sqrt{\text{tr}(\tilde{C}RCR)}G,$$

où $\tilde{C} = CU + U^*C$ et G est une variable gaussienne centrée réduite et indépendante de C .

Corollaire 2.2. *Si les hypothèses du théorème 2.3 sont vérifiées avec une normalisation scalaire alors, on a*

$$(\log(v_t^2))^{-1/2} \int_0^t v_s^{-2} [M_s M_s^* - \langle M \rangle_s] d(\log(v_s^2)) \Rightarrow \nu_\infty, \quad \text{pour } (t \rightarrow \infty)$$

où conditionnellement à C , ν_∞ est une loi gaussienne matricielle centrée indépendante de C et de covariance $2C \otimes C + 2\left[(\text{Vect}(C))(\text{Vect}(C))^*\right]^\perp$.

3. DÉMONSTRATION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

On donne d'abord une propriété nous permettant de simplifier les preuves des principaux résultats. La différentielle du déterminant d'une matrice inversible X est donnée par

$$d \det(X) = \det(X) \operatorname{tr}(X^{-1} dX). \quad (3.2)$$

On en déduit alors que

$$\int_0^t \operatorname{tr} \left\{ (V_s V_s^*)^{-1} \frac{d}{ds} (V_s V_s^*) \right\} ds = \log(\det V_t)^2, \quad (3.3)$$

en supposant que $V_0 = I_d$ et compte tenu de la condition (C3) on voit que

$$\frac{\log(\det(V_t)^2)}{A_t \operatorname{tr}(S)} \rightarrow 1 \quad \text{pour } (t \rightarrow \infty) \quad (3.4)$$

où S est la matrice introduite dans (C3).

3.1. Preuve du théorème 2.1

3.1.1. Préliminaire

Pour démontrer le théorème 2.1 on va étudier la convergence de la fonction caractéristique de la mesure μ_R donnée par

$$\psi_R(u) = (\log(\det V_R^2))^{-1} \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r \rangle\} d(\log(\det V_r^2)).$$

Lemme 3.1. *Sous les hypothèses du théorème 2.1*

$$\lambda_R := \psi_R(u) - A_R^{-1} \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r \rangle\} dA_r \rightarrow 0 \quad p.s. \quad (R \rightarrow \infty).$$

Preuve. En décomposant l'expression de λ_R comme suit

$$\lambda_R = \lambda_R^1 + \lambda_R^2,$$

avec

$$\lambda_R^1 := (\log(\det V_R^2))^{-1} \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r \rangle\} d(\log(\det V_r^2) - 2 \operatorname{tr}(U) A_r)$$

et

$$\lambda_R^2 := ((2 \operatorname{tr}(U) \log(\det V_R^2))^{-1} - A_R^{-1}) \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r \rangle\} dA_r,$$

on remarque que

$$|\lambda_R^1| \leq |\log(\det V_R^2)|^{-1} |\log(\det V_R^2) - 2 \operatorname{tr}(U) A_R|$$

on déduit alors de la relation (3.4) que $\lambda_R^1 \rightarrow 0$, ($R \rightarrow \infty$). De la même façon on voit que

$$|\lambda_R^2| \leq \left| 2 \frac{A_R \operatorname{tr}(U)}{\log(\det V_R^2)} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad \text{pour } (R \rightarrow \infty).$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

Compte tenu du lemme précédent on conclut que pour démontrer la propriété (TLCPS) il nous suffit de prouver que

$$A_R^{-1} \int_0^R \exp \{i \langle u, Z_r \rangle\} dA_r \rightarrow \Phi_\infty(\eta, u) \quad \text{pour } (R \rightarrow \infty) \tag{3.5}$$

où $\Phi_\infty(\eta, u)$ est la fonction caractéristique associée à la mesure limite μ_∞ . À cet effet, notons

$$B_t(u) := -\frac{1}{2} u^* \langle M^c \rangle_t u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(\exp \{i \langle u, x \rangle\} - 1 - i \langle u, x \rangle \right) \nu^M(ds, dx)$$

et considérons le processus $(L_t(u))_{t \geq 0}$ défini par

$$L_t(u) := [\Phi_t(u)]^{-1} \exp i \langle u, M_t \rangle,$$

où on rappelle (cf. paragraphe 1.3) que $\Phi_t(u) := \exp\{B_t(u)\}$. Alors on a le résultat suivant

Lemme 3.2. *Le processus $(L_t(u))_{t \geq 0}$ est une martingale locale complexe. De plus on a*

$$|L_t(u)| \leq \exp \left\{ \frac{1}{2} u^* \langle M \rangle_t u \right\}. \tag{3.6}$$

Preuve. Comme $(B_t(u))_{t \geq 0}$ est un processus continu on en déduit que $(L_t(u))_{t \geq 0}$ est une martingale locale complexe (cf. Jacod and Shiryaev [8]). D'autre part le module de celle-ci vaut

$$|L_t(u)| = \exp \left\{ \frac{1}{2} u^* \langle M^c \rangle_t u \right\} \times \exp \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos \langle u, x \rangle) \nu^M(ds, dx) \right\}. \tag{3.7}$$

Ainsi la majoration (3.6) découle directement du fait que

$$1 - \cos x \leq x^2/2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{□}$$

Par conséquent, démontrer la relation (3.5) revient à prouver que

$$A_R^{-1} \int_0^R L_r((V_r^*)^{-1}u) \Phi_r((V_r^*)^{-1}u) dA_r \rightarrow \Phi_\infty(\eta, u), \quad \text{pour } (R \rightarrow \infty). \tag{3.8}$$

Afin d'exploiter le lemme précédent, on introduit les temps d'arrêts suivants. Pour u fixé dans \mathbb{R}^d , soit $b > 0$ un point de continuité de la v.a. $\text{tr}(C)$ et $c > 0$ un point de continuité de la v.a. $|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1}$. Considérons les événements

$$E_r^b = \{\text{tr}(C_r) > b\} \quad \text{et} \quad E_r^{u,c} = \{|\Phi_r((V_r^*)^{-1}u)|^{-1} > c\},$$

avec

$$C_r := V_r^{-1} \langle M \rangle_r (V_r^*)^{-1},$$

et le temps d'arrêt :

$$T_r := T_r^{b,c}(u) = T_r^b \wedge T_r^c(u),$$

avec

$$T_r^b := \begin{cases} \inf \{t \leq r / \text{tr}(V_r^{-1} \langle M \rangle_t (V_r^*)^{-1}) > b\} & \text{si } E_r^b \text{ est réalisé,} \\ r & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$T_r^c(u) := \begin{cases} \inf \{t \leq r \mid |\Phi_t((V_r^*)^{-1}u)|^{-1} > c\} & \text{si } E_r^{u,c} \text{ est r\u00e9alis\u00e9,} \\ r & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que d'apr\u00e8s l'in\u00e9galit\u00e9 (3.6), $(L_{t \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u))_{t \geq 0}$ est une martingale locale complexe dont le module est major\u00e9 par $\exp(b \|u\|^2 / 2)$. C'est donc une martingale d'esp\u00e9rance 1. D'o\u00f9 la propri\u00e9t\u00e9 :

$$\mathbb{E} L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) = 1.$$

Par cons\u00e9quent,

$$\begin{aligned} A_R^{-1} \int_0^R L_r((V_r^*)^{-1}u) \Phi_r((V_r^*)^{-1}u) dA_r - \Phi_\infty(\eta, u) = \\ A_R^{-1} \int_0^R [L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) - 1] \Phi_\infty(\eta, u) dA_r + \Delta_R(b, c, u) + \delta'_R(b, c, u) + \delta''_R(b, c, u) \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_R(b, c, u) &:= A_R^{-1} \int_0^R \exp\{i \langle u, V_r^{-1}M_r \rangle\} dA_r - A_R^{-1} \int_0^R \exp\{i \langle u, V_r^{-1}M_{r \wedge T_r} \rangle\} dA_r, \\ \delta'_R(b, c, u) &:= A_R^{-1} \int_0^R L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) [\Phi_r((V_r^*)^{-1}u) - \Phi_\infty(\eta, u)] dA_r, \end{aligned} \quad (3.10)$$

et

$$\delta''_R(b, c, u) := A_R^{-1} \int_0^R L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) [\Phi_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) - \Phi_r((V_r^*)^{-1}u)] dA_r.$$

Ainsi, la relation (3.8) est imm\u00e9diate d\u00e8s que les deux propri\u00e9t\u00e9s suivantes ont lieu

$$\begin{cases} \limsup_{R,b,c \rightarrow \infty} |\Delta_R(b, c, u)| + \delta''_R(b, c, u) = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} |\delta'_R(b, c, u)| = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

et

$$A_R^{-1} \int_0^R [L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) - 1] dA_r \rightarrow 0 \text{ p.s.} \quad (3.12)$$

3.1.2. Preuve de la propri\u00e9t\u00e9 (3.11)

Comme $|L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u)| \leq c$, on en d\u00e9duit que

$$|\delta'_R(b, c, u)| \leq c A_R^{-1} \int_0^R |\Phi_r((V_r^*)^{-1}u) - \Phi_\infty(\eta, u)| dA_r.$$

Ainsi, vu l'hypoth\u00e8se (H), il vient que

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} |\delta'_R(b, c, u)| = 0 \text{ p.s.}$$

Par ailleurs, comme $r \mapsto |\Phi_r(u)|$ est d\u00e9croissante, on obtient que

$$\Delta_R(b, c, u) \vee \delta''_R(b, c, u) \leq 2A_R^{-1} \int_0^R \mathbf{1}_{\{T_r < r\}} dA_r.$$

Or, d'une part on a

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{T_r < r\}} &\leq \mathbf{1}_{\{T_r^b < r\}} + \mathbf{1}_{\{T_r^c(u) < r\}} \\ &\leq \mathbf{1}_{E_r^b} + \mathbf{1}_{E_r^{u,c}} \end{aligned}$$

et d'autre part, $\mathbb{P}(\text{tr}(C) = b) = \mathbb{P}(|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1} = c) = 0$. Par conséquent, à l'aide des hypothèses (H1) et (H), il vient que

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \Delta_R(b, c, u) \vee \delta_R''(b, c, u) \leq 2 \left(\mathbf{1}_{\{\text{tr}(C) > b\}} + \mathbf{1}_{\{|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1} > c\}} \right).$$

Ainsi, en faisant tendre b et c vers l'infini de manière séquentielle et de sorte qu'on ait toujours $\mathbb{P}(\text{tr}(C) = b) = \mathbb{P}(|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1} = c) = 0$, on obtient que

$$\limsup_{R, b, c \rightarrow \infty} |\Delta_R(b, c, u)| + |\delta_R''(b, c, u)| = 0 \text{ p.s.}$$

En vue de simplifier les notations, on pose

$$\tilde{L}_r(u) := L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u).$$

La suite de la preuve du théorème, consiste à établir la convergence p.s. des moyennes $A_R^{-1} \int_0^R \tilde{L}_r(u) dA_r$ vers 1. On se propose alors de montrer d'abord que cette convergence a lieu en moyenne quadratique. D'où l'étape cruciale suivante consacrée à l'estimation de la covariance du couple $(\tilde{L}_r(u), \tilde{L}_\rho(u))$.

3.1.3. Estimation de la covariance du couple $(\tilde{L}_r(u), \tilde{L}_\rho(u))$

Pour tous $u \in \mathbb{R}^d$, $(\rho, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ avec $\rho \leq r$, notons

$$K_{\rho,r}(u) := \mathbb{E} \left\{ \left(\tilde{L}_\rho(u) - 1 \right) \overline{\left(\tilde{L}_r(u) - 1 \right)} \right\}.$$

Comme $(L_{t \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u))_{t \geq 0}$ est une martingale d'espérance 1 on vérifie aisément que :

$$\begin{aligned} K_{\rho,r}(u) &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_\rho(u) \overline{\tilde{L}_r(u)} \right\} - 1 \\ &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_\rho(u) \overline{\mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_r(u) / \mathfrak{F}_{\rho \wedge T_\rho} \right\}} \right\} - 1 \\ &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_\rho(u) \overline{L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u)} \right\} - 1 \\ &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_\rho(u) \left[L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u) - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |K_{\rho,r}(u)| &\leq \left(\mathbb{E} \left| \tilde{L}_\rho(u) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left| L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u) - 1 \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\mathbb{E} \left| \tilde{L}_\rho(u) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left| L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u) \right|^2 - 1 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or, de l'inégalité (3.6), on voit que, d'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \tilde{L}_\rho(u) \right|^2 &\leq \mathbb{E} \exp \left\{ u^* V_\rho^{-1} \langle M \rangle_{\rho \wedge T_\rho} (V_\rho^*)^{-1} u \right\} \\ &\leq \exp \left\{ b \|u\|^2 \right\} \end{aligned}$$

et que, d'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| L_{\rho \wedge T_\rho} ((V_r^*)^{-1} u) \right|^2 &\leq \mathbb{E} \exp \left\{ u^* V_r^{-1} \langle M \rangle_{\rho \wedge T_\rho} (V_r^*)^{-1} u \right\} \\ &\leq \exp \left\{ b \|u\|^2 \|V_r^{-1} V_\rho\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité : $\forall t > 0, e^t - 1 \leq te^t$ il vient que

$$\mathbb{E} \left| L_{\rho \wedge T_\rho} ((V_r^*)^{-1} u) \right|^2 - 1 \leq b \|u\|^2 \|V_r^{-1} V_\rho\|^2 \exp \left\{ b \|u\|^2 \|V_r^{-1} V_\rho\|^2 \right\}.$$

Notons que par la condition (C2) on peut majorer $\|V_r^{-1} V_\rho\|^2$ par d , par conséquent

$$\mathbb{E} \left| L_{\rho \wedge T_\rho} ((V_r^*)^{-1} u) \right|^2 - 1 \leq b \|u\|^2 \|V_r^{-1} V_\rho\|^2 \exp \left\{ b \|u\|^2 d \right\}.$$

En conclusion, il existe $c > 0$ tel que

$$|K_{\rho,r}(u)| \leq c \|V_r^{-1} V_\rho\|^2 \quad (3.13)$$

pour une constante positive indépendante de ρ et de r .

3.1.4. Convergence presque-sûre de $A_R^{-1} \int_0^R \tilde{L}_r(u) dA_r$ vers 1

Montrons d'abord que

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right|^2 \right\} = O(A_R), \quad (R \rightarrow \infty). \quad (3.14)$$

En effet, on a

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right|^2 \right\} = 2 \int_0^R \int_0^r K_{\rho,r} dA_\rho dA_r \quad (3.15)$$

or, de la relation (3.13) on obtient que

$$\begin{aligned} \int_0^r |K_{\rho,r}| dA_\rho &\leq c \int_0^r \|V_r^{-1} V_\rho\|^2 dA_\rho \\ &= c \operatorname{tr} \left((V_r V_r^*)^{-1} \int_0^r a_\rho V_\rho V_\rho^* d\rho \right). \end{aligned}$$

Mais la condition (C3) donne

$$\begin{aligned} V_\rho^{-1} \frac{d}{d\rho} (V_\rho V_\rho^*) (V_\rho^*)^{-1} &= V_\rho^{-1} \frac{dV_\rho}{d\rho} + \frac{dV_\rho^*}{d\rho} (V_\rho^*)^{-1} \\ &= a_\rho S + a_\rho (\Delta_\rho + \Delta_p), \end{aligned}$$

donc en prenant $V_0 = I_d$, on a

$$V_r V_r^* - I_d = \int_0^r a_\rho V_\rho S V_\rho^* d\rho + \int_0^r a_\rho V_\rho (\Delta_\rho + \Delta_\rho^*) V_\rho^* d\rho.$$

On en déduit que

$$\text{tr} \left\{ (V_r V_r^*)^{-1} \int_0^r a_\rho V_\rho S V_\rho^* d\rho \right\} = d - \|V_r^{-1}\|^2 - 2 \int_0^r a_\rho \text{tr} \left\{ (V_r^{-1} V_\rho) \Delta_\rho (V_r^{-1} V_\rho)^* \right\} d\rho.$$

Par conséquent

$$\text{tr} \left\{ (V_r V_r^*)^{-1} \int_0^r a_\rho V_\rho S V_\rho^* d\rho \right\} \leq d + 2 \int_0^r a_\rho \|\Delta_\rho\| \|V_r^{-1} V_\rho\|^2 d\rho.$$

Comme on a supposé que (pour $r \rightarrow \infty$) $\|\Delta_r\| = O(A_r^{-\beta})$ avec $\beta > 1$, on peut affirmer que

$$\text{tr} \left\{ (V_r V_r^*)^{-1} \int_0^r a_\rho V_\rho S V_\rho^* d\rho \right\} = O(1), \quad (r \rightarrow \infty).$$

Cette propriété est également vraie en y remplaçant la matrice S par l'identité

$$\text{tr} \left\{ (V_r V_r^*)^{-1} \int_0^r a_\rho V_\rho V_\rho^* d\rho \right\} = O(1), \quad (r \rightarrow \infty). \tag{3.16}$$

En effet, la matrice S étant symétrique définie positive, notant $\lambda_{\max}(S)$ et $\lambda_{\min}(S)$ respectivement sa plus grande et sa plus petite valeur propre, on a

$$\lambda_{\min}(S) \int_0^r a_\rho V_\rho V_\rho^* d\rho \leq \int_0^r a_\rho V_\rho S V_\rho^* d\rho \leq \lambda_{\max}(S) \int_0^r a_\rho V_\rho V_\rho^* d\rho$$

(les inégalités étant évidemment considérées au sens des matrices symétriques positives). Il en résulte que

$$\text{tr} \left\{ (V_r V_r^*)^{-1} \int_0^r a_\rho V_\rho S V_\rho^* d\rho \right\} = O \left(\text{tr} \left\{ (V_r V_r^*)^{-1} \int_0^r a_\rho V_\rho V_\rho^* d\rho \right\} \right).$$

La relation (3.16) implique que

$$\int_0^r |K_{\rho,r}| dA_\rho = O(1), \quad (r \rightarrow \infty),$$

d'où le résultat annoncé en (3.14), à savoir $A_R^{-1} \int_0^R \tilde{L}_r(u) dA_r$ tend vers 1 en moyenne quadratique.

Posant maintenant

$$R_k = \inf \{ r / \forall t > r, A_t > k^2 \},$$

il est clair que $A_{R_k} = O(k^2)$ ($k \rightarrow \infty$). Par conséquent

$$\mathbb{E} \left\{ \left| A_{R_k}^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right|^2 \right\} = O(k^{-2}) \quad (k \rightarrow \infty);$$

ce qui implique que

$$A_{R_k}^{-1} \int_0^{R_k} \tilde{L}_r(u) dA_r \rightarrow 1 \text{ p.s.}$$

Or pour $R \in [R_k, R_{k+1}[$ on a :

$$\begin{aligned}
& \left| A_R^{-1} \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r - A_{R_k}^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right| \leq \left| A_R^{-1} \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r - A_R^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right| \\
& \quad + \left| A_R^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r - A_{R_k}^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right| \\
& \leq A_{R_k}^{-1} \int_{R_k}^{R_{k+1}} (|\tilde{L}_r(u)| + 1) dA_r + |A_R^{-1} - A_{R_k}^{-1}| \int_0^{R_k} (|\tilde{L}_r(u)| + 1) dA_r \\
& \leq 2(1+c)A_{R_k}^{-1}(A_{R_{k+1}} - A_{R_k}) \\
& = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (k \rightarrow \infty);
\end{aligned}$$

puisque $(A_{R_{k+1}} - A_{R_k}) = O(k)$. Ceci achève la preuve du théorème 2.1. \square

3.2. Preuve du théorème 2.2

Pour $Z_t := V_t^{-1}M_t$ et S la matrice introduite dans la condition (C3), la première partie de la preuve consiste à démontrer la relation suivante

$$A_t^{-1} \left(\|Z_t\|^2 + 2 \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \text{tr}(S^{1/2} C S^{1/2}) \quad p.s. \quad (3.17)$$

À cet effet, appliquant la formule d'Itô à la semi-martingale $\|Z_t\|^2$, on obtient la relation suivante :

$$\|Z_t\|^2 = 2 \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} dM_s + \text{tr} \left(\int_0^t (V_s^*)^{-1} V_s^{-1} d[M]_s \right) - \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} Z_{s-}. \quad (3.18)$$

Posons

$$\begin{aligned}
J_t &= \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} Z_{s-}, \\
K_t &= \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} \quad \text{et} \quad Q_t = \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} dM_s.
\end{aligned}$$

Avec ces notations, l'égalité (3.18) s'écrit :

$$\|Z_t\|^2 + J_t = 2Q_t + \text{tr}(K_t) \quad (3.19)$$

et on a les résultats suivants.

Lemme 3.3. *Sous l'hypothèse (H2) ou bien sous les hypothèses (H1) et (H'2), on a*

$$\frac{K_t}{A_t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} UC + CU^* \quad p.s. \quad (3.20)$$

Preuve. Par la formule d'intégration par parties, on voit que

$$\begin{aligned}
d(V_s^{-1}[M]_s (V_s^*)^{-1}) &= V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} - V_s^{-1} (dV_s) V_s^{-1} [M]_s (V_s^*)^{-1} \\
&\quad - V_s^{-1} [M]_s (V_s^*)^{-1} (dV_s)^* (V_s^*)^{-1},
\end{aligned} \quad (3.21)$$

donc

$$K_t = C'_t + \int_0^t C'_s \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right)^* ds + \int_0^t \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) C'_s ds$$

avec $C'_t := V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1}$. Par conséquent,

$$K_t = C'_t + \int_0^t C'_s \left(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right)^* dA_s + \int_0^t \left(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) C'_s dA_s.$$

Vu les conditions (C), il est clair que le résultat (3.20) a lieu sous l'hypothèse (H2) grâce au lemme de Toeplitz. Montrons qu'il est encore vrai sous les hypothèses (H1) et (H'2). Le compensateur prévisible du processus $(K_t)_{t \geq 0}$ est

$$\tilde{K}_t = \int_0^t V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1}.$$

En utilisant une décomposition semblable à celle de K_t , on vérifie que

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t &= C_t + \int_0^t C_s \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right)^* ds + \int_0^t \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) C_s ds \\ &= C_t + \int_0^t C_s a_s^{-1} \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right)^* dA_s + \int_0^t a_s^{-1} \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) C_s dA_s, \end{aligned}$$

où $C_t = V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1}$. Si l'hypothèse (H1) est vérifiée avec une normalisation $(V_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant aux conditions (C), alors

$$\frac{\tilde{K}_t}{A_t} \longrightarrow UC + CU^* \text{ p.s. } \text{ quand } (t \rightarrow \infty).$$

Par ailleurs, posant

$$\bar{H}_t = K_t - \tilde{K}_t = \int_0^t V_s^{-1} (d[M]_s - d\langle M \rangle_s) (V_s^*)^{-1}$$

on a $\Delta \bar{H}_t = V_t^{-1} \Delta[M]_t (V_t^*)^{-1} = V_t^{-1} (\Delta M_t) (\Delta M_t)^* (V_t^*)^{-1}$. Donc le compensateur prévisible du processus croissant

$$\delta_t^{p,M} = \sum_{s \leq t} \|\Delta \bar{H}_s\|^{2p} = \sum_{s \leq t} \|V_s^{-1} \Delta M_s\|^{2p}$$

est

$$\tilde{\delta}_t^{p,M} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \|V_s^{-1} x\|^{2p} \nu^M(ds, dx).$$

Dès lors, l'hypothèse (H'2) signifie que

$$\int_0^\infty (1 + A_s)^{-p} d\tilde{\delta}_s^{p,M} < \infty \text{ p.s.}$$

Donc en vertu du lemme 3 de Le Breton and Musiela [9], on peut affirmer que la martingale

$$\int_0^t (1 + A_s)^{-1} d\bar{H}_s = \int_0^t (1 + A_s)^{-1} dK_s - \int_0^t (1 + A_s)^{-1} d\tilde{K}_s$$

converge p.s. vers une limite finie quand $t \rightarrow \infty$; et il en résulte que

$$\frac{K_t - \tilde{K}_t}{A_t} \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

La propriété (3.20) a donc lieu sous (H1) et (H'2). □

Lemme 3.4.

$$J_t \sim \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s \quad p.s. \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.22)$$

Preuve. On a

$$J_t = \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} Z_{s-} = \int_0^t Z_s^* \left[\left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) + \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right)^* \right] Z_s ds,$$

ainsi compte tenu de la condition (C3) on déduit le résultat annoncé. \square

Lemme 3.5.

$$Q_t = o(A_t) \quad p.s. \quad (3.23)$$

Preuve. La variation quadratique prévisible de la martingale locale $(Q_t)_{t \geq 0}$ vaut :

$$\langle Q \rangle_t = \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} Z_{s-} = \int_0^t Z_{s-}^* d\tilde{K}_s Z_{s-}$$

où

$$\tilde{K}_t = \int_0^t V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} = C_t + \int_0^t C_s \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right)^* ds + \int_0^t \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) C_s ds$$

est le compensateur prévisible du processus $(K_t)_{t \geq 0}$, avec $C_t = V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1}$. Par suite

$$\langle Q \rangle_t = \int_0^t Z_{s-}^* dC_s Z_{s-} + \int_0^t Z_s^* \left[C_s \left(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right)^* + \left(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) C_s \right] Z_s dA_s.$$

Grâce à l'hypothèse (H1) et aux conditions (C), on a

$$\langle Q \rangle_t = \int_0^t \text{tr}(Z_{s-} Z_{s-}^* dC_s) + O\left(\int_0^t Z_s^* (UC + CU^*) Z_s dA_s \right).$$

Comme S est inversible,

$$\begin{aligned} Z_s^* (UC + CU^*) Z_s &= Z_s^* S^{1/2} S^{-1/2} (UC + CU^*) S^{-1/2} S^{1/2} Z_s \\ &= O(Z_s^* S Z_s). \end{aligned}$$

On en déduit compte tenu du lemme 3.4, que

$$\langle Q \rangle_t = O\left(\int_0^t \|Z_s\|^2 \text{tr}(dC_s) \right) + O(J_t).$$

La formule d'intégration par parties et la relation (3.19) donnent :

$$\begin{aligned} \int_0^t \|Z_s\|^2 \text{tr}(dC_s) &= \|Z_t\|^2 \text{tr}(C_t) + \int_0^t \text{tr}(C_s) dJ_s - \int_0^t \text{tr}(C_s) \text{tr}(dK_s) - 2 \int_0^t \text{tr}(C_s) dQ_s \\ &= -2\tilde{Q}_t + O(\|Z_t\|^2 + J_t + \text{tr}(K_t)), \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{Q}_t := \int_0^t \text{tr}(C_s) dQ_s.$$

Vu que $\langle \tilde{Q} \rangle_t = O(\langle Q \rangle_t)$, la loi forte des grands nombres appliquée à la martingale (\tilde{Q}_t) permet d'affirmer que

$$\int_0^t \|Z_s\|^2 \operatorname{tr}(dC_s) = O\left(\|Z_t\|^2 + J_t + \operatorname{tr}(K_t)\right) + o(\langle Q \rangle_t).$$

Par conséquent

$$\langle Q \rangle_t = O(\|Z_t\|^2 + J_t + \operatorname{tr}(K_t) + o(\langle Q \rangle_t)) \text{ p.s.,}$$

autrement dit

$$\langle Q \rangle_t = O(\|Z_t\|^2 + J_t + \operatorname{tr}(K_t)) \text{ p.s.}$$

Encore une fois, la loi forte des grands nombres pour les martingales scalaires assure que

$$Q_t = o(\|Z_t\|^2 + J_t + \operatorname{tr}(K_t)) \text{ p.s.} \tag{3.24}$$

Compte tenu du lemme 3.3 et de la relation (3.19), on conclut que :

$$Q_t = o(A_t) \text{ p.s., } (t \rightarrow \infty). \tag{3.25}$$

□

Par conséquent la relation (3.17), à savoir

$$A_t^{-1} \left(\|Z_t\|^2 + 2 \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(S^{1/2} C S^{1/2}) \text{ p.s.,}$$

découle aisément de la relation (3.19) et des lemmes 3.3, 3.4 et 3.5.

Compte tenu du théorème 2.1, sous les hypothèses $(\mathcal{H}1)$ et (\mathcal{H}) , on a que

$$\tilde{\mu}_t := A_t^{-1} \int_0^t \delta_{Z_s} dA_s \implies \mu_\infty \text{ p.s., } (t \rightarrow \infty).$$

On en déduit, alors que

$$\varliminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} x^* S x d\tilde{\mu}_t(x) \geq \int_{\mathbb{R}^d} x^* S x d\mu_\infty(x) \text{ p.s.}$$

Or, d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}3)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^* S x d\mu_\infty(x) = \operatorname{tr} \left(S \int x^* x d\mu_\infty(x) \right) = \operatorname{tr}(SC) = \operatorname{tr}(S^{1/2} C S^{1/2});$$

donc

$$\varliminf_{t \rightarrow \infty} A_t^{-1} \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s \geq \operatorname{tr}(S^{1/2} C S^{1/2}) \text{ p.s.} \tag{3.26}$$

Vu les propriétés (3.17) et (3.26), on conclut que d'une part

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_t^{-1} \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s = \operatorname{tr}(S^{1/2} C S^{1/2}) \tag{3.27}$$

et d'autre part on a une loi du logarithme, à savoir

$$\|V_t^{-1} M_t\|^2 = o(A_t) \text{ p.s., } (t \rightarrow \infty). \tag{3.28}$$

Par ailleurs, S est inversible et comme

$$\log(\det V_t^2) \sim \text{tr}(S)A_t, \quad (t \rightarrow \infty)$$

donc la propriété LFQ découle de (3.17) et (3.28). Ce qui achève la preuve. \square

3.3. Preuve du théorème 2.3 et des corollaires 2.1 et 2.2

3.3.1. Deux relations fondamentales

Posant $Z_t = V_t^{-1}M_t$, alors la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} Z_t Z_t^* &= \int_0^t V_s^{-1} (dM_s) M_{s-}^* (V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} (dM_s)^* (V_s^*)^{-1} \\ &\quad - \int_0^t V_s^{-1} (dV_s) V_s^{-1} M_{s-} M_{s-}^* (V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} \\ &\quad - \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} M_{s-}^* (V_s^*)^{-1} (dV_s)^* (V_s^*)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Plus précisément, on a appliqué la formule d'Itô à la forme quadratique $(\langle u, Z_t \rangle)^2$ avec $u \in \mathbb{R}^d$ et on obtient l'expression précédente par polarisation. En utilisant l'expression (3.21) et une formule analogue pour la variation quadratique prévisible $\langle M \rangle$ de M , on obtient les relations fondamentales suivantes :

$$D_t + \int_0^t V_s^{-1} dV_s D_s + \int_0^t D_s (dV_s)^* (V_s^*)^{-1} = H_t + H_t^* \quad (3.30)$$

et

$$\tilde{D}_t + \int_0^t V_s^{-1} dV_s \tilde{D}_s + \int_0^t \tilde{D}_s (dV_s)^* (V_s^*)^{-1} = H_t + H_t^* + \bar{H}_t \quad (3.31)$$

avec

$$H_t = \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} (dM_{s-})^* (V_s^*)^{-1}, \quad \bar{H}_t = \int_0^t V_s^{-1} (d[M]_s - d\langle M \rangle_s) (V_s^*)^{-1}$$

et

$$D_t = V_t^{-1} (M_t M_t^* - [M]_t) (V_t^*)^{-1}, \quad \tilde{D}_t = V_t^{-1} (M_t M_t^* - \langle M \rangle_t) (V_t^*)^{-1}.$$

Désormais, pour $u \in \mathbb{R}^d$, on pose :

$$H_t^u := \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} (dM_s)^* (V_s^*)^{-1} u. \quad (3.32)$$

Notre objectif est de démontrer un théorème limite centrale pour la martingale $\text{Vect}(H)$. Pour cela, on va étudier le comportement asymptotique de la variation quadratique prévisible de cette martingale et la validité de la condition de Lindeberg pour celle-ci.

3.3.2. Comportement asymptotique de la variation quadratique de $(\text{Vect}(H_t))_{t \geq 0}$

La proposition suivante précise le comportement asymptotique de la variation quadratique prévisible de la martingale (H_t) .

Proposition 3.1.

$$\frac{\langle H_t^u \rangle}{A_t} \rightarrow u^* \tilde{C} u C \quad p.s. \quad (3.33)$$

Avec, $\tilde{C} = UC + CU^*$. En conséquence

$$A_t^{-1}\langle \text{Vect}(H) \rangle_t \longrightarrow \tilde{C} \otimes C, \quad (t \rightarrow \infty).$$

Preuve. (H_t^u) est une martingale vectorielle de variation quadratique prévisible :

$$\langle H^u \rangle_t = \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} [u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u] (M_{s-})^* (V_s^*)^{-1} = \int_0^t Z_{s-} [u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u] Z_{s-}^*. \quad (3.34)$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} x^* \langle H^u \rangle_t x &= \int_0^t x^* Z_{s-} [u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u] Z_{s-}^* x \\ &= \int_0^t \langle x, Z_{s-} \rangle^2 [u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u] \\ &= \int_0^t \langle x, Z_{s-} \rangle^2 dF_s(u), \end{aligned}$$

avec

$$F_t(u) := u^* F_t u, \quad F_t = \int_0^t V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1}.$$

Comme dans la preuve du lemme 3.5, par la formule d'intégration par parties, on a

$$F_t = C_t + \int_0^t C_s \left(V_s^{-1} \frac{dV_s^*}{ds} \right) ds + \int_0^t \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) C_s ds.$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} x^* \langle H^u \rangle_t x &= \int_0^t \langle x, Z_{s-} \rangle^2 u^* \left[C_s \left(V_s^{-1} \frac{dV_s^*}{ds} \right) + \left(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right) C_s \right] u ds + \int_0^t \langle x, Z_{s-} \rangle^2 d(u^* C_s u) \\ &= \int_0^t \langle x, Z_{s-} \rangle^2 u^* (C_s U + C_s^* U) u dA_s + \int_0^t \langle x, Z_{s-} \rangle^2 u^* (\Delta_s + \Delta_s^*) u dA_s \\ &\quad + \int_0^t \langle x, Z_{s-} \rangle^2 d(u^* C_s u). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Grâce à la loi forte quadratique, le premier terme du membre de droite de (3.35) est équivalent à $(x^* C x) \cdot (u^* \tilde{C} u) A_t$ lorsque $t \rightarrow \infty$, ($\tilde{C} = CU + CU^*$), tandis que le deuxième terme est $o(A_t)$ p.s. Quant au troisième terme, on vérifie comme dans la preuve du lemme 3.5 qu'il est p.s. $o(A_t)$ en exploitant les lemmes 3.3, 3.4 et la propriété du logarithme (3.28). La preuve de la proposition est achevée en remarquant que d'une part

$$\text{Vect}(H_t) = \begin{pmatrix} H_t^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ H_t^d \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad H_t^j = H_t^{e_j}, \quad j = 1, \dots, d,$$

où (e_1, \dots, e_d) désigne la base canonique de \mathbb{R}^d et que d'autre part

$$\langle H^i, H^j \rangle_t = \int_0^t Z_{s-} e_i^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} e_j Z_{s-}^*, \quad \text{pour} \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad \square$$

3.3.3. *Vérification de la condition de Lindeberg pour la martingale H*

Définition 3.1. Soient $A = (A_t), B = (B_t)$ deux processus croissants issus de 0. On dit que A est **dominé au sens fort** par B , et on écrit : $A \ll B$, si $(B_t - A_t; t \geq 0)$ est un processus croissant.

Le résultat utile suivant est évident :

Lemme 3.6. Si $A \ll B$, leurs compensateurs prévisibles \tilde{A}, \tilde{B} vérifient aussi $\tilde{A} \ll \tilde{B}$.

Application à la martingale (H_t) .

Le saut à l'instant t de la martingale matricielle :

$$H_t = \int_0^t Z_{s-} d(M_s^*)(V_s^*)^{-1}, Z_t = V_t^{-1}M_t,$$

vaut :

$$\Delta H_t = Z_{t-}(\Delta M_t)^*(V_t^*)^{-1};$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\Delta H_t\|^2 &= \text{tr}\{\Delta H_t \Delta H_t^*\} \\ &= \|Z_{t-}\|^2 \|V_t^{-1} \Delta M_t\|^2 \\ &= \|Z_{t-}\|^2 \text{tr}\{V_t^{-1} \Delta[M]_t (V_t^*)^{-1}\} \\ &= \|Z_{t-}\|^2 \Delta \Lambda_t, \end{aligned}$$

où (Λ_t) est le processus croissant :

$$\Lambda_t = \text{tr}\left\{ \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} \right\}.$$

Pour $r > 0, t > 0$, posant :

$$\sigma_t^H(r) = \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > r\}},$$

la condition de Lindeberg au sens de la convergence presque-sûre pour la martingale H s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, A_t^{-1} \sigma_t^H(\epsilon \sqrt{A_t}) \xrightarrow{p.s.} 0, \quad t \rightarrow +\infty, \tag{3.36}$$

Pour établir ce résultat, on exploite les deux lemmes suivants :

Lemme 3.7. *L'hypothèse $(\mathcal{H}2)$ implique que presque sûrement*

$$\sup_{t > 0} \|V_t^{-1} \Delta M_t\| < +\infty.$$

Preuve. En effet, on a :

$$\sum_{s \leq .} \Delta M_s (\Delta M_s)^* \ll [M]$$

ce qui implique que

$$\sum_{s \leq t} \|V_t^{-1} \Delta M_s\|^2 \leq \text{tr}\{V_t^{-1} [M]_t (V_t^*)^{-1}\};$$

d'où le résultat du lemme, car

$$\|V_t^{-1}\Delta M_t\|^2 \leq \sum_{s \leq t} \|V_t^{-1}\Delta M_s\|^2 \leq \text{tr}\{V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1}\} = O(1) \text{ p.s.},$$

compte tenu de l'hypothèse (H2). □

Lemme 3.8. *Étant donné $\alpha \in]0, 1]$, alors :*

$$\sigma_t^H(\alpha^{-3}) \ll \sigma_t^1(\alpha^{-1}) + \sigma_t^2(\alpha^{-1})$$

où pour $t > 0, r > 0$:

$$\sigma_t^1(r) = \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{s-}\| > r\}}; \quad \sigma_t^2(r) = \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_s^{-1}\Delta M_s\| > r\}}.$$

Preuve. L'assertion du lemme découle de la décomposition évidente suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_t^H(\alpha^{-3}) &= \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > \alpha^{-3}, \|Z_{s-}\| > \alpha^{-1}\}} \\ &+ \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > \alpha^{-3}, \|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_s^{-1}\Delta M_s\| \leq \alpha^{-1}\}} \\ &+ \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > \alpha^{-3}, \|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_s^{-1}\Delta M_s\| > \alpha^{-1}\}}. \end{aligned}$$

Il est clair que le premier (resp. le troisième) terme du membre de droite de cette égalité est dominé au sens fort par $(\sigma_t^1(\alpha^{-1}))$ (resp. $(\sigma_t^2(\alpha^{-1})) = (\sigma_t^2(\min(\alpha^{-1}, \alpha^{-2}))$). Pour le deuxième terme, comme on a

$$\|\Delta H_t\|^2 = \|Z_{t-}\|^2 \|V_t^{-1}\Delta M_t\|^2,$$

il vient que

$$\{\|\Delta H_s\| > \alpha^{-3}, \|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_s^{-1}\Delta M_s\| \leq \alpha^{-1}\} \subset \{\|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1}, \|Z_{s-}\| \geq \alpha^{-2}\} = \emptyset \text{ p.s.}$$

d'après le choix de α . Le lemme est établi. □

Validité de la condition de Lindeberg. Avec les notations du lemme 3.8, on a :

$$\sigma_t^1(r) \ll \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{s-}\| > r\}} d\Lambda_s, \quad \sigma_t^2(r) \ll \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\Delta \Lambda_s > r^2\}} d\Lambda_s.$$

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_t^1(r) &\leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{s-}\| > r\}} d\widetilde{\Lambda}_s, \\ \widetilde{\sigma}_t^2(r) &\leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\Delta \Lambda_s > r^2\}} d\widetilde{\Lambda}_s \leq \mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta \Lambda_s > r^2\}} \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 d\widetilde{\Lambda}_s, \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{\Lambda}_t = \text{tr} \left\{ \int_0^t V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} \right\}.$$

Compte tenu de ce qui précède, pour tous $\alpha \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$ et $t > 0$, on a

$$\overline{\lim}_t A_t^{-1} \sigma_t^H(\widetilde{\epsilon\sqrt{A_t}}) \leq \overline{\lim}_t A_t^{-1} \sigma_t^H(\widetilde{\alpha^{-3}}).$$

Mais

$$\sigma_t^H(\widetilde{\alpha^{-3}}) \leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{s-}\| > \alpha^{-1}\}} d\widetilde{\Lambda}_s + \mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta\Lambda_s > \alpha^{-2}\}} \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 d\widetilde{\Lambda}_s,$$

donc par la loi forte quadratique, pour tous $\alpha \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$:

$$\overline{\lim}_t A_t^{-1} \sigma_t^H(\widetilde{\epsilon\sqrt{A_t}}) \leq \int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > \alpha^{-1}\}} d\mu_\infty(x) + \mathbf{1}_{\{\sup_{s \geq 0} \Delta\Lambda_s > \alpha^{-2}\}} \int_0^{+\infty} \|x\|^2 d\mu_\infty(x) \text{ p.s.}$$

On en déduit que la condition de Lindeberg est vérifiée en vertu du lemme 3.7.

3.3.4. Fin de la preuve du th. 2.3

Vu les propriétés (3.33) et (3.36), le (TLCG) s'applique pour la martingale vectorielle $\text{Vect}(H)$ et on a :

$$A_t^{-1/2} H_t \Rightarrow \mathfrak{N}_{d \times d}(0, \tilde{C} \otimes C) \quad (3.37)$$

où $\tilde{C} = CU + CU^*$. L'égalité (3.30) et la condition (C3) permettent d'écrire

$$\int_0^t [UD_s + D_s U^*] dA_s = H_t + H_t^* - \left(D_t + \int_0^t (\Delta_s D_s + D_s \Delta_s^*) dA_s \right).$$

Or, par la loi du logarithme (qui est valide sous les hypothèses (H1) et (H'2)) :

$$\left\| D_t + \int_0^t (\Delta_s D_s + D_s \Delta_s^*) dA_s \right\| = o(A_t) + 2 \int_0^t A_s \|\Delta_s\| dA_s;$$

et par l'hypothèse : $\Delta_t = O(A_t^{-3/2})$, ($t \rightarrow \infty$) :

$$\int_0^t A_s \|\Delta_s\| dA_s = o(A_t^{1/2}), \quad (t \rightarrow \infty),$$

on peut donc affirmer que

$$A_t^{-1/2} \int_0^t [UD_s + D_s U^*] dA_s = (H_t + H_t^*) A_t^{-1/2} + o(1) \text{ p.s.} \quad (3.38)$$

Par ailleurs, avec les notations des preuves des lemmes 3.3 et 3.4, on a

$$\bar{H}_t = \int_0^t V_s^{-1} (d[M]_s - d\langle M \rangle_s) (V_s^*)^{-1} = K_t - \tilde{K}_t$$

et l'hypothèse (H'2) implique (comme dans la preuve du Lem. 3.3) que $\bar{H}_t = o(A_t^{1/2})$ p.s. Ainsi

$$A_t^{-1/2} \int_0^t [U\tilde{D}_s + \tilde{D}_s U^*] dA_s = A_t^{-1/2} (H_t + H_t^*) + o(1) \text{ p.s.} \quad (3.39)$$

Compte tenu des propriétés (3.37), (3.38) et (3.39), on peut affirmer que les v.a.

$$\left(A_t^{-1/2} \int_0^t (UD_s + D_sU^*)dA_s \right) \quad \text{ou bien} \quad \left(A_t^{-1/2} \int_0^t (U\tilde{D}_s + \tilde{D}_sU^*)dA_s \right)$$

convergent en loi vers ν_∞ où conditionnellement à C , ν_∞ est la loi d'une v.a. gaussienne matricielle de matrice de covariance

$$2C \otimes C + 2[\text{Vect}(C)(\text{Vect}(C))^*]^\perp.$$

Le théorème 2.3 est établi et les corollaires 2.1 et 2.2 en résultent immédiatement. □

4. APPLICATION : ESTIMATION DE LA VARIANCE D'UN PAIS PONDÉRÉ

Le but de cette partie ne consiste pas à produire de nouveaux estimateurs efficaces pour la variance d'un PAIS (il est bien connu que le meilleur estimateur dans ce cas est celui des moindres carrées). Cependant, il s'agit d'illustrer d'une façon très concrète l'utilisation de l'ensemble de nos résultats théoriques. Nous complétons ainsi, les résultats récents de Chuprunov and Fazekas [7], dans le cadre de PAIS, en obtenant des vitesses de convergence pour des fonctionnelles avec poids.

Comme on l'a vu dans l'introduction, en considérant un PAIS unidimensionnel nous dégageons un estimateur du paramètre de diffusion σ^2 convergeant avec une vitesse logarithmique. Afin d'améliorer cette vitesse, nous proposons une technique de pondération que nous explicitons dans le cadre multidimensionnel.

Soit S un processus d -dimensionnel à accroissements indépendants stationnaires, de matrice de covariance Σ et engendré par le triplet inconnu (A, ν, m) , où m est le drift, ν la mesure de Lévy et A la covariance de la partie gaussienne. On suppose que pour un $\beta \in]1, 2]$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^{2\beta} \nu(dx) < \infty.$$

Dans la suite on considère l'estimateur pondéré suivant de m , associé au poids $w = (w_r)$:

$$\tilde{m}_t = \frac{1}{\int_0^t w_s ds} \int_0^t w_s dS_s, \quad \text{où} \quad w_t = (1+t)^{-\frac{\alpha+\delta}{2}} \exp\left(\frac{t^{1-\alpha}}{2-\alpha}\right), \quad \text{avec} \quad 1 \geq \gamma > \alpha > \max\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{\beta} - 1\right).$$

On montrera que l'estimateur \tilde{m} est fortement consistant, ce qui implique que l'estimateur moyennisé :

$$\bar{m}_t = \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{m}_s ds$$

l'est aussi. Pour la covariance Σ de S , on propose l'estimateur

$$\tilde{\Sigma}_t = \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{m}_s - \bar{m}_t)(\tilde{m}_s - \bar{m}_t)^* ds \tag{4.40}$$

dont on montrera la consistance forte et la normalité asymptotique. Plus précisément, on a :

Théorème 4.1. *Avec les notations précédentes, on a les résultats suivants*

(1) (TLC) pour l'estimateur (\tilde{m}_t) :

$$t^{\alpha/2}(\tilde{m}_t - m) \Rightarrow \mathfrak{N}_d(0, \Sigma), \quad (t \rightarrow \infty).$$

(2) (TLCPS) pour l'estimateur (\tilde{m}_t)

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \delta_{s^{\alpha/2}(\tilde{m}_s - m)} \frac{ds}{s^\alpha} \Rightarrow \mathfrak{N}_d(0, \Sigma), \quad (t \rightarrow \infty).$$

(3) TLC pour l'estimateur moyennisé (\bar{m}_t)

$$\sqrt{t}(\bar{m}_t - m) \Rightarrow \mathfrak{N}_d(0, \Sigma), \quad (t \rightarrow \infty).$$

(4) Consistance forte de $\tilde{\Sigma}_t$

$$\tilde{\Sigma}_t \rightarrow \Sigma \text{ p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty).$$

(5) Normalité asymptotique de $\tilde{\Sigma}_t$

$$\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{1/2} (\tilde{\Sigma}_t - \Sigma) \Rightarrow \mathfrak{N}_{d \times d}(0, \varsigma), \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$\text{avec } \varsigma = 2 \left(\Sigma \otimes \Sigma + [\text{Vect}(\Sigma)(\text{Vect}(\Sigma))^*]^\perp \right).$$

Preuve. La martingale $M_t^w = \int_0^t w_u d(S_u - mu)$ a pour variation quadratique prévisible :

$$\langle M^w \rangle_t = v_t^2 \Sigma, \quad \text{où } v_t^2 = \int_0^t w_s^2 ds.$$

Sa variation quadratique $[M^w]$ donnée par

$$[M^w]_t = v_t^2 A + \sum_{s \leq t} w_s^2 \Delta S_s (\Delta S_s)^*$$

vérifie $v_t^{-2} [M^w]_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Sigma$ p.s. La martingale (M_t^w) vérifie en plus la condition de Lindeberg.

En effet, pour $\varepsilon > 0$ posons

$$\sigma_t^\varepsilon(M^w) = v_t^{-2} \sum_{s \leq t} \|\Delta M_s^w\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta M_s^w\| > \varepsilon v_t\}}.$$

On a

$$v_t^2 \sigma_t^\varepsilon(M^w) \ll \sum_{s \leq t} w_s^2 \|\Delta S_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta S_s\| > \varepsilon \frac{v_s}{w_s}\}},$$

et le compensateur du processus dominant est égal à

$$\int_0^t w_s^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > \varepsilon \frac{v_s}{w_s}\}} d\nu(x) \right) ds.$$

Grâce à la propriété évidente suivante valable pour tout $A > 0$:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} v_t^{-2} \int_0^t w_s^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > \varepsilon \frac{v_s}{w_s}\}} d\nu(x) \right) ds \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > A\}} d\nu(x),$$

on obtient que

$$\forall A > 0, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_t^\varepsilon(M^w) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > A\}} d\nu(x).$$

Ainsi la condition de Lindeberg pour la convergence p.s. est réalisée. Par conséquent, le couple (M_t^w, v_t) vérifie le TLC et le TLCPS (cf. th. 2.1), à savoir

$$v_t^{-1}M_t^w \Rightarrow \mathfrak{N}_d(0, \Sigma), \quad (t \rightarrow \infty)$$

et

$$(\log v_t^2)^{-1} \int_0^t \delta_{v_s^{-1}M_s^w} d \log v_s^2 \Rightarrow \mathfrak{N}_d(0, \Sigma).$$

Par ailleurs, on a d'une part :

$$\frac{u_t}{v_t}(\tilde{m}_t - m) = \frac{M_t^w}{v_t}, \quad \text{avec} \quad u_t = \int_0^t w_s ds, \tag{4.41}$$

d'autre part, le poids vérifie les propriétés suivantes

- (P1) $\frac{4v_t^2}{t^\alpha w_t^2} - 1 = O(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \rightarrow \infty)$
- (P2) $\frac{2u_t}{t^\alpha w_t} - 1 = O(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \rightarrow \infty)$
- (P3) $\frac{u_t}{v_t} - t^{\alpha/2} = O(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \rightarrow \infty)$
- (P4) $\log v_t^2 \sim 4 \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad (t \rightarrow \infty).$

Donc compte tenu de (4.41), des propriétés du poids et du TLC ainsi que du TLCPS vérifiés par la martingale (M_t^w) , les parties 1 et 2 du théorème sont établies.

Pour la preuve des autres assertions du théorème, nous allons montrer que le couple (M_t^w, v_t) vérifie en plus l'hypothèse $(\mathcal{H}''2)$ (cf. th. 2.3). Elle résulte de la version à temps continu du théorème de Chow (cf. lem. 3 Le Breton and Musiela [9]). Plus précisément, si $(R_t)_{t \geq 0}$ est la martingale purement discontinue

$$R_t = [M^w]_t - \langle M^w \rangle_t,$$

alors le compensateur du processus croissant

$$\delta_t(R) = \sum_{s \leq t} \|\Delta R_s\|^\beta = \sum_{s \leq t} w_s^{2\beta} \|\Delta S_s\|^{2\beta}$$

à savoir

$$\tilde{\delta}_t(R) = \left(\int_0^t w_s^{2\beta} ds \right) \left(\int \|x\|^{2\beta} d\nu(x) \right)$$

vérifie

$$\int_0^\infty (1 + \log v_s^2)^{-\beta/2} (1 + v_s^2)^{-\beta} d\tilde{\delta}_s(R) = O\left(\int_0^\infty (1 + \log v_s^2)^{-\beta/2} (1 + v_s^2)^{-\beta} w_s^{2\beta} ds \right) < \infty$$

car $(\log v_s^2)^{-\beta/2} (w_s^2/v_s^2)^\beta = O\left(s^{-\beta(1+\alpha)/2}\right)$, $(s \rightarrow \infty)$ et $\beta(1 + \alpha)/2 > 1$ par hypothèse. Donc

$$(\log v_t^2)^{-1/2} v_t^{-2} R_t = (\log v_t^2)^{-1/2} \left[v_t^{-2} [M^w]_t - \Sigma \right] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \text{ p.s.}$$

L'hypothèse $(\mathcal{H}''2)$ est établie.

Posant $Z_t = v_t^{-1}M_t^w$, on a :

$$\begin{aligned} t(\bar{m}_t - m) &= \int_0^t (\tilde{m}_s - m) ds = \int_0^t \frac{M_s^w}{u_s} ds \\ &= \int_0^t Z_s \left(\frac{u_s}{v_s}\right)^{-1} ds \\ &= \int_0^t Z_s s^{-\alpha/2} ds + \int_0^t Z_s \left[\left(\frac{u_s}{v_s}\right)^{-1} - s^{-\alpha/2}\right] ds \end{aligned}$$

d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{t}(\bar{m}_t - m) - t^{-1/2} \int_0^t Z_s s^{-\alpha/2} ds \right| &\leq t^{-1/2} \int_0^t Z_s s^{-\alpha/2} \left[s^{\alpha/2} \left(\frac{u_s}{v_s}\right)^{-1} - 1 \right] ds \\ &\leq t^{-1/2} \sqrt{\int_0^t \left[s^{\alpha/2} \left(\frac{u_s}{v_s}\right)^{-1} - 1 \right]^2 ds} \sqrt{\int_0^t Z_s^2 \frac{ds}{s^\alpha}}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la loi forte quadratique et de la propriété suivante, conséquence directe de la propriété (P3) du poids,

$$t^{\alpha/2} \left(\frac{u_t}{v_t}\right)^{-1} - 1 = O(t^{-(1-\alpha/2)}), \quad (t \rightarrow \infty)$$

on peut affirmer que

$$\sqrt{t}(\bar{m}_t - m) - t^{-1/2} \int_0^t Z_s s^{-\alpha/2} ds = O(t^{-1/2} t^{(1-\alpha)/2} t^{-(1-\alpha)/2}) = O(t^{-1/2}) \quad p.s. \quad (t \rightarrow \infty). \tag{4.42}$$

La partie 3 du théorème sera établie si l'on démontre que

$$t^{-1/2} \int_0^t s^{-\alpha/2} Z_s ds \Rightarrow \mathfrak{N}_d(0, \Sigma), \quad (t \rightarrow \infty). \tag{4.43}$$

À cet effet, on remarque que

$$dZ_t = \frac{dM_t^w}{v_t} - \frac{M_t^w}{v_t^2} dv_t = \frac{dM_t^w}{v_t} - Z_t \frac{dv_t}{v_t}$$

et que

$$v_t^{-1} \frac{dv_t}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\log v_t^2) > 0$$

car $t \mapsto v_t^2$ est strictement croissante. D'où l'on déduit que

$$Z_t \left(v_t^{-1} \frac{dv_t}{dt}\right)^{1/2} dt = -\left(v_t^{-1} \frac{dv_t}{dt}\right)^{-1/2} dZ_t + \left(v_t^{-1} \frac{dv_t}{dt}\right)^{-1/2} \frac{dM_t^w}{v_t},$$

donc

$$\int_0^t Z_s \left(v_s^{-1} \frac{dv_s}{ds}\right)^{1/2} ds = -\int_0^t \left(v_s^{-1} \frac{dv_s}{ds}\right)^{-1/2} dZ_s + \mathcal{L}_t \tag{4.44}$$

avec

$$\mathcal{L}_t = \int_0^t \left(v_s^{-1} \frac{dv_s}{ds}\right)^{-1/2} \frac{dM_s^w}{v_s}.$$

Posons

$$a_s = \left(v_s^{-1} \frac{dv_s}{ds} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \log v_s^2 \right)^{-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $r \in]n, n + 1[$ tel que

$$\frac{1}{2} \left(\log v_{n+1}^2 - \log v_n^2 \right) = a_r^{-1}.$$

Or, d'après la propriété (P1) du poids, on a

$$\frac{4v_t^2}{t^\alpha w_t^2} = 1 + O(t^{-(1-\alpha)}), \quad (t \rightarrow \infty)$$

on en déduit donc que

$$\frac{n^\alpha}{2} \left(\log v_{n+1}^2 - \log v_n^2 \right) \rightarrow 2, \quad (n \rightarrow \infty).$$

On peut donc affirmer que $a_t \sim \frac{1}{2}t^\alpha$, $(t \rightarrow \infty)$. Il en résulte que

$$t^{-1} \langle \mathcal{L} \rangle_t = t^{-1} \left(\int_0^t a_s \frac{w_s^2}{v_s^2} ds \right) \Sigma \rightarrow 2\Sigma, \quad (t \rightarrow \infty).$$

La condition de Lindeberg pour la convergence presque sûre est vérifiée immédiatement pour la martingale (\mathcal{L}_t) . Dans ces conditions on peut affirmer que

$$t^{-1/2} \mathcal{L}_t \Rightarrow \mathfrak{N}_d(0, 2\Sigma), \quad (t \rightarrow \infty). \tag{4.45}$$

Par ailleurs, d'après (4.44), on a

$$\begin{aligned} \left| t^{-1/2} \int_0^t Z_s a_s^{-1/2} ds - t^{-1/2} \mathcal{L}_t \right| &= \left| t^{-1/2} \int_0^t a_s^{1/2} dZ_s \right| \\ &= \left| t^{-1/2} \left(a_t^{1/2} Z_t - \frac{1}{2} \int_0^t Z_s a_s^{-1/2} da_s \right) \right| \\ &= O(t^{-(1-\alpha)/2} Z_t) + O\left(t^{-1/2} t^{(1-\alpha)/2} \sqrt{\int_0^t \left(\frac{da_s}{ds} \right)^2 ds} \right) \\ &= o(1) + O(t^{-1/2} t^{(1-\alpha)/2} t^{\alpha - \frac{1}{2}}) \\ &= o(1) + O(t^{-(1-\alpha)/2}), \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Donc compte tenu de (4.45), on a

$$t^{-1/2} \int_0^t a_s^{-1/2} Z_s ds \Rightarrow \mathfrak{N}_d(0, 2\Sigma), \quad (t \rightarrow \infty).$$

La propriété (4.43) en découle car on a

$$\int_0^t a_s^{-1/2} Z_s ds \sim \sqrt{2} \int_0^t s^{-\alpha/2} Z_s ds \text{ p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty).$$

La partie 3 du théorème est établie.

En appliquant la loi forte quadratique à la martingale M^w et la normalisation scalaire v (voir th. 2.2), on peut affirmer que

$$(\log v_t^2)^{-1} \int_0^t Z_s Z_s^* d \log v_s^2 \longrightarrow \Sigma, \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Mais compte tenu des propriétés (P1), (P2), (P3), (P4) du poids et de l'égalité (4.42), ce résultat s'écrit aussi

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{m}_s - m)(\tilde{m}_s - m)^* ds \longrightarrow \Sigma \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty). \quad (4.47)$$

Pour montrer la consistance forte de l'estimateur $\tilde{\Sigma}_t$ défini par (4.40), on remarque que

$$\int_0^t (\tilde{m}_s - m)(\tilde{m}_s - m)^* ds - \int_0^t (\tilde{m}_s - \bar{m}_t)(\tilde{m}_s - \bar{m}_t)^* ds = t(\bar{m}_t - m)(\bar{m}_t - m)^* = o(t^{1-\alpha}). \quad (4.48)$$

En effet,

$$\begin{aligned} t(\bar{m}_t - m) &= \int_0^t \frac{M_s^w}{v_s} \left(\frac{u_s}{v_s} \right)^{-1} ds = \int_0^t s^{-\alpha} Z_s s^\alpha \left(\frac{u_s}{v_s} \right)^{-1} ds \\ &= O \left(\int_0^t s^{\alpha/2} d \left(\int_0^s r^{-\alpha} Z_r dr \right) \right) \\ &= O \left(t^{\alpha/2} \int_0^t r^{-\alpha} Z_r dr - \frac{\alpha}{2} \int_0^t s^{\alpha/2-1} \int_0^s r^{-\alpha} Z_r dr \right). \end{aligned}$$

Vu que le couple (M^w, v) vérifie le TLCPS et la loi forte quadratique, on peut affirmer que pour toute fonction φ de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ presque partout continue et telle que $\varphi(x) = O(\|x\|^2)$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \varphi(Z_s) s^{-\alpha} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int \varphi d\mu_\infty \quad p.s.$$

avec $\mu_\infty = \mathfrak{N}_d(0, \Sigma)$. Par conséquent $\int_0^t r^{-\alpha} Z_r dr = o(t^{1-\alpha})$ *p.s.*, ce qui implique que

$$\bar{m}_t - m = o(t^{-\alpha/2}).$$

Ainsi la propriété (4.48) est établie. Combinée avec (4.47), celle-ci assure la consistance forte de $\tilde{\Sigma}_t$. La partie 4 du théorème est établie.

Appliquant le corollaire 2.2 au couple (M^w, v) on peut affirmer que les v.a. $Z_t = v_t^{-1} M_t^w$ vérifient

$$(\log v_t^2)^{-1/2} \int_0^t (Z_s Z_s^* - \Sigma) d \log v_s^2 \Rightarrow \mathfrak{N}_{d \times d}(0, \varsigma), \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.49)$$

avec $\varsigma = 2 \left(\Sigma \otimes \Sigma + \left[\text{Vect}(\Sigma) (\text{Vect}(\Sigma))^* \right]^\perp \right)$. Mais compte tenu des propriétés du poids et de (4.42), ce résultat s'écrit

$$\sqrt{\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}} \left(\int_0^t (\tilde{m}_s - m)(\tilde{m}_s - m)^* ds - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Sigma \right) \Rightarrow \mathfrak{N}_{d \times d}(0, \varsigma), \quad (t \rightarrow \infty). \quad (4.50)$$

Par ailleurs, les propriétés (4.42) et (4.46) impliquent que

$$\begin{aligned} \sqrt{t}(\bar{m}_t - m) &= t^{-1/2} \mathcal{L}_t + o(1) \quad p.s. \\ &= O(\sqrt{\log \log t}) \quad p.s., \end{aligned}$$

car on peut appliquer la loi logarithmique itérée à la martingale (\mathcal{L}_t) . Par conséquent, on a la propriété suivante meilleure que (4.48)

$$\int_0^t (\tilde{m}_s - m)(\tilde{m}_s - m)^* ds - \int_0^t (\tilde{m}_s - \bar{m}_t)(\tilde{m}_s - \bar{m}_t)^* ds = t(\bar{m}_t - m)(\bar{m}_t - m) = O(\log \log t) \quad p.s.$$

Combinée avec le résultat (4.50), cette propriété nous permet d'en déduire la propriété 5 du théorème :

$$\sqrt{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}(\tilde{\Sigma}_t - \Sigma) \Rightarrow \mathfrak{N}_{d \times d}(0, \varsigma), \quad (t \rightarrow \infty).$$

Le théorème 4.1 est ainsi établi. □

RÉFÉRENCES

- [1] B. Bercu, On the convergence of moments in the almost sure central limit theorem for martingales with statistical applications. *Stochastic Process. Appl.* **111** (2004) 157–173.
- [2] G.A. Brosamler, An almost everywhere central limit theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **104** (1988) 561–574.
- [3] F. Chaabane, Version forte du théorème de la limite centrale fonctionnel pour les martingales. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **323** (1996) 195–198.
- [4] F. Chaabane, Invariance principles with logarithmic averaging for continuous local martingales. *Stat. Prob. Lett.* **59** (2002) 209–217.
- [5] F. Chaabane and F. Maaouia, théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles. *ESAIM : PS* **4** (2000) 137–189 (electronic).
- [6] F. Chaabane, F. Maaouia and A. Touati, Généralisation du théorème de la limite centrale presque-sûre pour les martingales vectorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **326** (1998) 229–232.
- [7] A. Chuprunov and I. Fazekas, Integral analogues of almost sure limit theorems. *Period. Math. Hungar.* **50** (2005) 61–78.
- [8] J. Jacod and A.N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Vol. 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin (2003).
- [9] A. Le Breton and M. Musiela, Laws of large numbers for semimartingales with applications to stochastic regression. *Probab. Theory Related Fields* **81** (1989) 275–290.
- [10] M.A. Lifshits, Almost sure limit theorem for martingales, in *Limit theorems in probability and statistics, Vol. II (Balatonlelle, 1999)*. János Bolyai Math. Soc., Budapest (2002) 367–390.
- [11] P. Schatte, On strong versions of the central limit theorem. *Math. Nachr.* **137** (1988) 249–256.
- [12] A. Touati, Sur la convergence en loi fonctionnelle de suites de semimartingales vers un mélange de mouvements browniens. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **36** (1991) 744–763.
- [13] A. Touati, Deux théorèmes de convergence en loi pour des intégrales stochastiques et application statistique. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **38** (1993) 128–153.