ESAIM: PS 17 (2013) 795–801
DOI: 10.1051/ps/2012022

ESAIM: Probability and Statistics
www.esaim-ps.org

PAUL LÉVY ET LE MOUVEMENT BROWNIEN

Jean-François Le Gall[1]

Résumé. Ce texte est tiré d'un exposé présenté au cours de la journée Paul Lévy organisée au Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires de l'Université Pierre et Marie Curie le 15 décembre 2011. L'objectif de cet exposé était de donner un aperçu des contributions de Paul Lévy à la théorie du mouvement brownien.

Classification Mathématique. 01A60, 60J65.

Reçu le July 5, 2012. Révisé le September 21, 2012.

1. Introduction

Les principales contributions de Paul Lévy à la théorie du mouvement brownien sont présentées dans les chapitres VI et VII de son livre "Processus stochastiques et mouvement brownien" – nous ne discuterons pas ici les travaux de Lévy sur le mouvement brownien à plusieurs paramètres, qui n'ont jusqu'à présent pas connu le même retentissement. Si le livre est publié en 1948, avant d'être réédité en 1965, les résultats datent de la période 1935–1940, avec en particulier les deux fameux articles *Sur certains processus stochastiques homogènes* et *Le mouvement brownien plan* publiés en 1939. C'est donc peu de temps après l'introduction par Kolmogorov du formalisme moderne de la théorie des probabilités, que Lévy n'utilise pas (pas d'espace Ω ni de tribu chez Lévy).

Néanmoins, Lévy parvient à établir nombre de résultats remarquables, qui ouvrent la voie aux travaux de bien d'autres probabilistes célèbres du vingtième siècle. Il faut ici rappeler que le très fameux livre de K. Itô et H.P. McKean "Diffusion processes and their sample paths" – l'un des trois ou quatre grands livres de théorie des probabilités publiés au siècle dernier – s'ouvre par une dédicace à Paul Lévy "whose work has been our spur and our admiration".

Comment Lévy parvient-il à obtenir autant de résultats aussi fins, alors même qu'il ne dispose pas du puissant formalisme de Kolmogorov ? Lévy fait preuve d'une intuition extraordinaire, qui compense le manque d'outils adaptés. Lévy ne connaît pas la propriété de Markov forte, mais il l'utilise souvent implicitement. Il est aussi amené à discuter le comportement du mouvement brownien après des temps aléatoires qui ne sont pas des temps d'arrêt (typiquement des débuts d'excursions), et à donner alors des affirmations qui mériteraient une justification précise. Bien entendu, Lévy n'a pas à sa disposition la théorie du calcul stochastique (inventée plus tard par Itô). Son approche du mouvement brownien est fondée, au-delà de son intuition, sur des propriétés simples,

Mots Clés. Mouvement brownien, excursion brownienne, loi de l'arcsinus, temps local, nombre de tours, invariance conforme, aire de Lévy.

[1] Université Paris-Sud et Institut universitaire de France. Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. jean-francois.legall@math.u-psud.fr

Article published by EDP Sciences

calculs explicites de lois, invariance par changement d'échelle ou par des transformations homographiques du temps notamment.

Mais, en faisant confiance à son intuition, Lévy ne se trompe pratiquement jamais, et obtient certains des plus beaux résultats connus sur le mouvement brownien. Aujourd'hui, un œil critique décèle quelques incorrections dans les preuves, certaines justifications manquantes, mais, à de rares exceptions près, il est presque toujours facile de rendre les preuves de Lévy rigoureuses et conformes aux standards mathématiques actuels. On peut penser que, s'il avait eu accès aux techniques modernes développées dans les années 1950–1960, Paul Lévy, qui avait 60 ans en 1946, serait allé encore beaucoup plus loin.

Quelles sont les grandes contributions de Paul Lévy à l'étude du mouvement brownien ? Un choix très subjectif conduit à mentionner les points suivants :

- la construction, dite de Lévy, du mouvement brownien, qui est sans doute la plus belle, la plus simple et la plus "concrète" de toutes les constructions du mouvement brownien ;
- la fameuse loi de l'arcsinus ;
- le "théorème de Lévy" affirmant que si B est un mouvement brownien linéaire issu de 0 et S son processus du supremum passé (voir ci-dessous) les deux processus $(S_t - B_t)_{t\geq 0}$ et $(|B_t|)_{t\geq 0}$ ont même loi ;
- l'analyse de la structure des excursions browniennes, qui joue un rôle clé dans la preuve du théorème précédent ;
- la définition du temps local brownien comme "mesure du voisinage" et son approximation par les temps d'occupation ;
- la définition de l'aire stochastique du mouvement brownien plan ;
- l'invariance conforme du mouvement brownien plan.

Ce dernier point constitue l'une des exceptions mentionnées ci-dessus, à savoir que l'argument de Lévy semble très incomplet. Cependant la preuve moderne simple de l'invariance conforme du mouvement brownien plan repose de manière cruciale sur la théorie du calcul stochastique que Lévy ne pouvait utiliser. Il est sans doute déjà extraordinaire que Lévy ait "vu" cette propriété, si importante dans les travaux récents, et notamment ceux qui ont conduit à la médaille Fields de Wendelin Werner en 2006.

Dans la suite de ce texte, nous donnons une description partielle des résultats de Lévy sur le mouvement brownien, en suivant son livre "Processus stochastiques et mouvement brownien". La partie 2 reprend certains résultats du chapitre VI sur le mouvement brownien linéaire, et la partie 3 certains résultats du chapitre VII sur le mouvement brownien plan.

2. Le mouvement brownien linéaire

Autour du principe de réflexion. Pour son étude approfondie du mouvement brownien linéaire, Paul Lévy part du principe de réflexion, déjà présent dans le travail de Bachelier en 1900, et en donne la preuve habituelle (non rigoureuse en l'absence de la propriété de Markov forte). Si $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien issu de 0, et si

$$S_t = \sup_{s\leq t} B_s \quad , \quad I_t = \inf_{s\leq t} B_s,$$

le principe de réflexion conduit à l'identité $P(S_t \geq a, B_t \leq b) = P(B_t \geq 2a - b)$ pour tous $a \geq 0$ et $b \in]-\infty, a]$. Si

$$Y_t^0 = |B_t| \ , \ Y_t^1 = S_t - B_t \ , \ Y_t^2 = B_t - I_t,$$

on obtient alors facilement la loi du couple (S_t, B_t), ainsi que les identités en loi

$$S_t \overset{\text{(loi)}}{=} -I_t \overset{\text{(loi)}}{=} Y_t^0 \overset{\text{(loi)}}{=} Y_t^1 \overset{\text{(loi)}}{=} Y_t^2 \ .$$

Pour les variables Y_t^0, Y_t^1, Y_t^2, Lévy note que *l'identité en loi dont elles dépendent subsiste si l'on considère leurs variations en fonction de* t, phrase un peu sybilline à ce stade de l'exposé mais qui annonce le théorème qui suivra.

À partir de la loi du couple (S_t, B_t), Lévy calcule la loi conditionnelle

$$P(S_t > x \mid S_t = B_t)$$

qu'on interprète (modulo un retournement du temps) comme la loi du méandre à l'instant t (le méandre sur l'intervalle $[0,t]$ est le mouvement brownien conditionné à rester positif sur cet intervalle). Ce calcul jouera un rôle important dans la suite. Enfin Lévy donne la loi du triplet (S_t, I_t, B_t). Pour cela il préfère une méthode analytique, basée sur la résolution de l'équation de la chaleur, à la méthode probabiliste impliquant une infinité de réflexions (Lévy doit pourtant connaître cette méthode, qui est fortement suggérée par l'écriture sous forme de série de la solution).

Longueurs d'excursions et loi de l'arcsinus. Lévy s'intéresse ensuite aux excursions en dehors de 0 du mouvement brownien linéaire. Le résultat suivant est la première étape importante.

Théorème 43. *Si la longueur d'un intervalle d'excursion dépasse $\ell_0 > 0$, la probabilité qu'elle dépasse $\ell > \ell_0$ est $\sqrt{\ell_0/\ell}$.*

Un énoncé moderne de cette propriété donnerait la formule $n(\sigma > \ell) = C/\sqrt{\ell}$, où n et σ désignent respectivement la mesure d'Itô et la longueur d'une excursion. Mais bien entendu Lévy ne dispose pas de la théorie d'Itô des excursions. Une forme précise du Théorème 43 exigerait de préciser comment l'excursion est choisie : Lévy est conscient de cette difficulté, et dans une note de bas de page il donne des choix qui conviennent, d'autres qui ne conviennent pas, sans que l'on voie très bien comment distinguer les uns des autres ...

La preuve du Théorème 43 consiste à dire que la loi de l'excursion à l'instant ℓ_0 est la loi du méandre, précédemment calculée, et à appliquer la propriété de Markov simple à cet instant, en utilisant la loi du temps d'atteinte de 0 qui découle facilement de la connaissance de la loi de S_t. Le même type d'argument donne la formule

$$P(B_t \text{ s'annule entre } t_0 \text{ et } t_1) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arccos}\sqrt{\frac{t_0}{t_1}},$$

d'où la loi de l'arcsinus : si $G_1 = \sup\{r \le 1 : B_r = 0\}$,

$$P(G_1 < t) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arcsin}\sqrt{t}. \tag{2.1}$$

Voir la fin de ce paragraphe pour l'autre loi de l'arcsinus de Paul Lévy.

Le processus des temps d'atteinte. Pour $x \ge 0$ on note $T_x = \inf\{t \ge 0 : B_t = x\}$. Lévy identifie $(T_x)_{x\ge 0}$ comme un processus additif croissant, ou subordinateur dans un langage plus moderne (ici encore, il faudrait la propriété de Markov forte pour être totalement rigoureux) et obtient sa "mesure de Lévy"

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u^3}}.$$

Lévy observe que la queue de cette mesure est $\sqrt{\frac{2}{\pi u}}$, résultat qu'il rapproche bien entendu du Théorème 43 ci-dessus.

Par des arguments de type loi des grands nombres, Lévy obtient alors que si $N_x(\ell)$ est le nombre de sauts de $(T_y)_{0\le y\le x}$ de taille plus grande que ℓ, on a

$$\lim_{\ell\to 0}\sqrt{\frac{\pi\ell}{2}}\; N_x(\ell) = x \tag{2.2}$$

résultat qui sera important pour la suite.

La construction de l'ensemble des zéros de $S - B$. On fixe $x > 0$. On veut construire l'ensemble des zéros de $S - B$ sur l'intervalle $[0, T_x]$: en termes modernes, la construction consiste à dire que cet ensemble est (l'adhérence de) l'ensemble $\{T_y : 0 \le y \le x\}$, qu'on peut lui-même obtenir à partir de la construction poissonnienne du subordinateur. Lévy procède de la manière suivante. On se donne une suite strictement décroissante $\ell_1 > \ell_2 > \dots$ convergeant vers 0, et de manière indépendante

– un nombre poissonnien de paramètre $x\sqrt{\frac{2}{\pi\ell_1}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de densité $C_1 \mathbf{1}_{]\ell_1,\infty[}(\ell)\ell^{-3/2}$;
– un nombre poissonnien de paramètre $x\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\ell_2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi\ell_1}}\right)$ de variables aléatoires indépendantes de loi de densité $C_2 \mathbf{1}_{]\ell_2,\ell_1[}(\ell)\ell^{-3/2}$;
– et ainsi de suite.

Ici $C_1, C_2, \dots$ sont les constantes de normalisation adéquates. On interprète ces variables comme des longueurs d'intervalles ouverts, qu'on va ensuite juxtaposer de manière complètement aléatoire pour obtenir un sous-ensemble ouvert de $[0, T'_x]$ (où T'_x est bien sûr la somme de toutes les longueurs obtenues). Alors le complémentaire dans $[0, T'_x]$ de ce sous-ensemble ouvert a même loi que $\{t \in [0, T_x] : S_t - B_t = 0\}$.

Identification des lois de $S - B$ et de $|B|$. En fait la construction précédente de l'ensemble des zéros de $S - B$ s'applique aussi bien à l'ensemble des zéros de B, ou de $|B|$: le point-clé est la propriété du Théorème 43 (voir ci-dessus) qui est valable dans un cas comme dans l'autre. Lévy obtient ainsi que l'ensemble des zéros de $S - B$ a même loi que l'ensemble des zéros de $|B|$.

Il reste à "boucher les trous" entre les zéros pour conclure que les deux processus $S - B$ et $|B|$ ont la même loi. Lévy observe que sur chaque intervalle d'excursion les lois marginales de dimension finie des deux processus (qui sont connues explicitement) sont les mêmes et que *les valeurs de B_t dans les différents intervalles sont indépendantes les unes des autres*. Pour le lecteur d'aujourd'hui, l'argument est informel mais pourrait être rendu rigoureux sans trop de peine (évidemment l'approche moderne la plus rapide consiste à utiliser le calcul stochastique et la formule de Tanaka).

Le temps local. La méthode précédente fournit en fait l'identité en loi plus précise

$$(S - B, S) \overset{\text{(loi)}}{=} (|B|, L)$$

où $(L_t)_{t\ge 0}$ est un processus croissant continu qui, grâce à la formule (2.2), vérifie le résultat d'approximation

$$L_t = \lim_{\ell\to 0} \sqrt{\frac{\pi\ell}{2}}\, \mathrm{Card}\{\text{excursions de } B \text{ de longueur plus grande que } \ell \text{ avant } t\}.$$

Le processus $(L_t)_{t\ge 0}$ est le temps local (en 0) de B, la "mesure du voisinage" pour Lévy. Ce processus vérifie d'autres formules d'approximation, en particulier

$$L_t = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 < B_s < \epsilon\}} \mathrm{d}s$$

que Lévy obtient (sans bien sûr passer par la formule de densité de temps d'occupation) *via* un argument proche de la loi des grands nombres. Notons pour l'anecdote la phrase affirmant que *le nombre $N(\ell)$ des intervalles de longueur $\ell < \ell_0$ est un infiniment grand p.s. équivalent à sa valeur probable théorique.*

L'autre loi de l'arcsinus. Le remarquable article de Paul Lévy "Sur certains processus stochastiques homogènes" (*Compositio Math.* 1939), où sont énoncés beaucoup des résultats mentionnés ci-dessus, établit aussi l'autre loi de l'arcsinus, selon laquelle, si pour tout $t \ge 0$,

$$A_t^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}}\, \mathrm{d}s,$$

la loi de la variable aléatoire A_1^+ est la même que celle de G_1 explicitée dans (2.1). Lévy déduit ce résultat du fait que si $\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : L_t > 1\}$ la variable

$$\frac{A_{\tau_1}^+}{\tau_1}$$

suit aussi la loi de l'arcsinus (voir le Corollaire 3 de l'article précité).

3. Le mouvement brownien plan

Nombres de tours. On note maintenant $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan issu de 0. Lévy s'intéresse d'abord à la façon dont la trajectoire de B tourne autour de 0, en temps grand ou en temps petit. Pour $t > 1$, on note θ_t la variation de l'argument de B_t entre les instants 1 et t (comme Lévy le signale, cela a un sens car la courbe ne repasse pas par 0 – à cause de la polarité des points qui est discutée plus loin).

Dans un premier temps, Lévy fixe un réel $q > 1$ et, notant α_n l'angle (appartenant à $]-\pi,\pi]$) entre les vecteurs OB_{q^n} et $OB_{q^{n+1}}$, il remarque qu'une application presque immédiate du théorème central limite donne, pour une certaine constante $\sigma > 0$,

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

où $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ désigne la loi normale centrée de variance σ^2.

Cependant, même en se limitant aux valeurs de t de la forme q^n, ce résultat ne permet pas de comprendre le comportement asymptotique de θ_t quand $t \to \infty$. Lévy observe fort justement que *l'ordre de grandeur à prévoir pour $|\theta_t|$ est supérieur à celui de $\sqrt{\log t}$* (il écrit $\sqrt{t}$ mais c'est sans doute une faute de frappe). Cette observation sera confirmée par le théorème de Spitzer (1958)

$$\frac{2}{\log t}\,\theta_t \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} \text{Cauchy}.$$

Par inversion du temps, Lévy remarque ensuite que la courbe brownienne tourne, immédiatement après l'instant 0, une infinité de fois dans les deux sens autour de $B_0 = 0$, puis il observe que la même propriété doit être vraie après n'importe quel instant $t \geq 0$, p.s. Lévy évoque alors *l'extraordinaire complexité de la courbe, dont il est impossible d'imaginer tous les détours infiniment petits*.

En application de ses observations sur les nombres de tours, Lévy note qu'il existe nécessairement une infinité de points doubles même sur un intervalle fini. La question des points multiples du mouvement brownien fascine Lévy au point que dans la réédition de 1965 de son livre il mentionne le théorème d'existence de points de multiplicité infinie (dû à Dvoretzky, Erdös et Kakutani en 1958) comme *un des plus surprenants théorèmes de l'analyse moderne*.

Contour de la courbe brownienne et enveloppe convexe de la courbe. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points entourés par la courbe brownienne avant l'instant 1 (plus précisément le complémentaire de la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^2\backslash\{B_t : 0 \leq t \leq 1\}$). Suite à ses résultats sur les nombres de tours, Lévy écrit que *tous les points de la frontière de $\mathcal{C}$ sont naturellement accessibles de l'extérieur, mais la plupart ne sont accessibles que par des chemins très compliqués le long desquels l'angle polaire n'est pas borné*. Cette affirmation peut être transformée en un énoncé mathématique précis (le mot "la plupart" renvoyant alors à un ensemble de mesure harmonique pleine, c'est le théorème de Burdzy sur les twist points en 1989) mais Lévy était sans doute loin de pouvoir en donner une démonstration rigoureuse : c'est encore une preuve de son extraordinaire intuition.

Lévy considère ensuite l'enveloppe convexe de $\{B_t : 0 \leq t \leq 1\}$ (ou de $\mathcal{C}$) et note que la frontière de cette enveloppe convexe n'a pas de points anguleux, et est donc de classe C^1. Ce résultat est vrai, mais à nouveau Lévy se contente des mots "On démontre aisément que". Dans ce cas particulier, et même s'il a fallu attendre les années 1980 pour voir publiées des démonstrations précises, il semble plausible que Lévy ait eu en tête une preuve rigoureuse.

Mesure de Lebesgue de la courbe et polarité des points. Lévy trouve un argument simple élégant pour montrer que la courbe brownienne est de mesure nulle, ce qui équivaut à voir que le mouvement brownien ne visite p.s. pas un point fixé autre que son point de départ. En notant m la mesure de Lebesgue sur le plan, et $B[s,t] = \{B_r : s \leq r \leq t\}$, Lévy écrit

$$E[m(B[0,1])] = E\left[m\left(B\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)\right] + E\left[m\left(B\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\right] - E\left[m\left(B\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap B\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\right].$$

Or un argument de changement d'échelle montre que $E[m(B[0,\frac{1}{2}])] = E[m(B[\frac{1}{2},1])] = \frac{1}{2}E[m(B[0,1])]$, d'où

$$E\left[m\left(B\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap B\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\right] = 0.$$

Modulo une translation par $-B_{1/2}$ et une application du théorème de Fubini, cette dernière égalité équivaut à

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\, P\left(x \in B\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)^2 = 0,$$

d'où facilement $P(x \in B[0,\frac{1}{2}]) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Récurrence. Lévy obtient aussi la récurrence du mouvement brownien plan par un argument élémentaire analogue à celui qu'on utilise dans la théorie des chaînes de Markov. Soient $0 < r < R$, et supposons maintenant que le mouvement brownien B part d'un point du cercle de rayon R. Soit

$$\alpha = P(\exists t \geq 0 : |B_t| = r).$$

Alors en observant que l'espérance, pour un mouvement brownien partant du cercle de rayon r, du temps passé dans le disque de rayon r avant d'atteindre le cercle de rayon R, est une constante C finie, Lévy obtient (modulo une application implicite de la propriété de Markov forte) que

$$E\left[\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathbf{1}_{\{|B_t| \leq r\}}\right] \leq C \sum_{n=1}^\infty \alpha^n.$$

Par ailleurs, la connaissance de la loi de B_t pour tout $t > 0$ montre facilement que

$$E\left[\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathbf{1}_{\{|B_t| \leq r\}}\right] = \infty$$

et donc l'inégalité précédente n'est possible que si $\alpha = 1$, d'où la propriété de récurrence du mouvement brownien plan.

A ce point, on peut remarquer que Lévy connaît les liens entre fonctions harmoniques et mouvement brownien, en particulier la résolution probabiliste du problème de Dirichlet, ce qui devrait lui donner une approche plus directe de la récurrence. Mais peut-être préfère-t-il le raisonnement plus élémentaire qui précède.

L'aire de Lévy. Ecrivons le mouvement brownien plan B sous la forme $B_t = (X_t, Y_t)$. Lévy cherche à définir l'aire stochastique

$$\frac{1}{2}\int_0^1 X_s\, \mathrm{d}Y_s - Y_s\, \mathrm{d}X_s$$

mais bien entendu il ne dispose pas de la théorie du calcul stochastique qui permettrait de définir ces intégrales. A la place, il utilise une méthode d'approximation, en considérant une suite $t_1, t_2, \ldots$ dense dans $[0,1]$ et en introduisant pour chaque entier $n \geq 0$ l'aire S_n correspondant à l'approximation polygonale de la courbe brownienne obtenue à partir des points $B_0, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_1$ (pour obtenir une courbe fermée on peut convenir de rajouter le segment joignant le point B_1 au point B_0).

On doit alors montrer que la suite S_n converge quand $n \to \infty$. Pour comparer S_{n+1} à S_n, il faut comprendre comment l'aire se modifie lorsqu'on rajoute le point $B_{t_{n+1}}$ dans l'approximation polygonale. Supposons que l'instant t_{n+1} appartienne à l'intervalle $]t_i, t_j[$ de la subdivision de $[0,1]$ induite par les points $t_1, \dots, t_n$. On voit alors que $S_{n+1} - S_n$ a pour loi l'aire (algébrique) d'un triangle dont la base a pour loi une loi gaussienne en dimension deux de variance $t_j - t_i$, et la hauteur est la valeur à l'instant $t_{n+1} - t_i$ d'un pont brownien (en dimension un, partant et finissant en 0) de longueur $t_j - t_i$. Cette dernière loi est celle de

$$\sqrt{\frac{(t_{n+1} - t_i)(t_j - t_{n+1})}{t_j - t_i}}\, N$$

où N désigne une variable normale centrée réduite. Modulo quelques calculs supplémentaires, Lévy déduit des considérations précédentes que

$$\mathbb{E}[(S_{n+m} - S_n)^2] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

uniformément en m, d'où la convergence dans L^2 de la suite (S_n).

Invariance conforme. Ici le résultat énoncé par Lévy est le suivant.

Théorème 56. *Les propriétés intrinsèques de la courbe brownienne sont invariantes par une transformation conforme.*

Lévy explicite un peu plus loin le changement de temps qui permet d'écrire $\Phi(B_t)$ comme un nouveau mouvement brownien changé de temps, lorsque Φ est une transformation conforme. Il s'agit bien entendu d'un résultat fondamental, mais la preuve de Lévy reste mystérieuse pour le lecteur d'aujourd'hui ...