ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations June 2002, Vol. 8, 801–825
URL: `http://www.emath.fr/cocv/` DOI : 10.1051/cocv:2002052

RÉGULARITÉ DU PROBLÈME DE KELVIN–HELMHOLTZ POUR L'ÉQUATION D'EULER 2D

Gilles Lebeau[1]

Abstract. We prove that for any solution u locally defined in time of the Kelvin–Helmholtz problem for the Euler 2d equation in the plane, then the curve of discontinuity of u and the density of the vortex sheet are analytic (under holder *a priori* estimates for the curve of discontinuity). We also give a partial result for a solution u defined in a half interval $[O, T[$.

Résumé. Nous prouvons que pour toute solution u du problème de Kelvin–Helmholtz des nappes de tourbillons pour l'équation d'Euler bi-dimensionnelle, définie localement en temps, la courbe de saut de u et la densité de tourbillon sont analytiques (sous une hypothèse de régularité Holderienne de la courbe de saut). Nous donnons également un résultat de régularité partielle de la trace de u sur $t = 0$ lorsque u est définie sur un demi-interval $[O, T[$.

Classification Mathématique. 35Q05, 35Q23, 35Q24, 35Q35, 35Q57.

Reçu le 14 janvier 2002. Révisé le 12 mars 2002.

1. Introduction et résultats

L'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = -\nabla p \ , \ \operatorname{div}(u) = 0 \tag{1.1}$$

où $u(t, x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteur dans le plan et où $p(t, x, y) \in \mathbb{R}$ désigne la pression, décrit l'évolution temporelle de la vitesse $u(t, x, y)$ de la particule qui à l'instant t occupe la position (x, y).

Dans (1.1), le terme $u.\nabla$ désigne le champ de vecteur $u_x\partial_x + u_y\partial_y$ où (u_x, u_y) sont les coordonnées cartésiennes de u. La condition d'incompressibilité $\operatorname{div}(u) = 0$ permet de réécrire le terme $u.\nabla u$ sous la forme

$$u.\nabla u = \begin{cases} \partial_x(u_x^2) + \partial_y(u_x u_y) \\ \partial_x(u_x u_y) + \partial_y(u_y^2) \end{cases} \tag{1.2}$$

Mots-clés et phrases : Euler equation, vortex sheets, Kelvin–Helmholtz instability, paradifferential calculus.

[1] Centre de Mathématiques, École Polytechnique, France ; e-mail : `lebeau@polytechnique.fr`

ce qui permet de définir des solutions faibles de l'équation d'Euler sous la seule condition de régularité $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(t, L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$.

Les quantités formellement conservées pour (1.1) sont

- l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$;
- le tourbillon $\omega(t,x,y) = \partial_x u_y - \partial_y u_x$ qui est constant le long des trajectoires des particules, *i.e.* vérifie

$$\partial_t \omega + u.\nabla\omega = 0. \tag{1.3}$$

Le problème de Kelvin–Helmholtz des nappes de tourbillon consiste à comprendre la structure des solutions de (1.1) dont la donnée à $t = 0, u_0(x,y) = u(0,x,y)$ vérifie

$$\mathrm{rot}(u_0) = \omega_0 = g_0(s)\delta_{\Sigma_0} \quad \mathrm{div} u_0 = 0 \tag{1.4}$$

où Σ_0 est une courbe fermée simple dans le plan, orientée dans le sens direct, paramétrée par l'abscisse curviligne s, δ_{Σ_0} désignant la mesure d'intégration sur Σ_0, et où la densité $g_0(s)$ vérifie

$$\exists c_0 > 0 \quad \forall s \quad c_0 \leq g_0(s) \leq 1/c_0. \tag{1.5}$$

En notant $u_0^\pm$ les restrictions de u aux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ (le signe + étant associé à la composante non bornée) qui vérifient $\Delta u_0^\pm = 0$, et par $[u_\perp], [u_{//}]$ les sauts des composantes perpendiculaires et tangentielles de u le long de Σ_0 on a

$$[u_\perp] = 0 \ , \ [u_{//}] = g_0 = u^+_{//} - u^-_{//}. \tag{1.6}$$

Rappelons deux résultats connus sur ce problème : existence de solutions faibles et persistence de la structure nappes de tourbillons en temps petit si les données sont analytiques.

Théorème 1.1 (Delort 1990). *L'équation (1.1) avec donnée de Cauchy $u_0 \in L^2$ tel que $\omega_0 = \mathrm{rot}(u_0) \in H^{-1} \cap \mathcal{M}_+$ admet au moins une solution faible ($\mathcal{M}_+$ désigne l'espace des mesures positives).*

Théorème 1.2 (Bardos *et al.* 1981). *Soit u_0 vérifiant $\omega_0 = \mathrm{rot}(u_0) = g_0(s)\delta_{\Sigma_0}$, où Σ_0 et g_0 sont analytiques. Alors il existe $T_* > 0$ tel que (1.1) possède une unique solution $u(t,x,y)$, $t \in]-T_*, T_*[$, t.q. $\mathrm{rot}(u(t,.)) = g(t,.)\delta_{\Sigma_t}$ avec $\{(t,x,y); (x,y) \in \Sigma_t\}$ et g analytiques.*

Remarque : Le théorème 2 prouve la conjecture de Garrett–Birkhoff ; on trouvera aussi dans [2] la preuve du résultat analogue en dimension 3.

Le résultat suivant indique que le problème de Kelvin–Helmholtz est mal posé au sens de Hadamard dans la catégorie des nappes de tourbillons, *i.e.* ses seules solutions sont celles décrites par le théorème 2.

Théorème 1.3. *Soit $\Sigma \subset (]T_-, T_+[\times \mathbb{R}^2)$ une hypersurface de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\Sigma = \{t, (x,y) \in \Sigma_t\}$ où Σ_t est une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$. On suppose Σ de classe $C^{1+\rho_0}$ pour un $\rho_0 \in]0,1[$.*

Soit $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(]-T,T[; L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$ une solution faible de (1.1) vérifiant

$$\begin{cases} \mathrm{rot}(u) = \omega(t,x,y) = g(t,s)\delta_{\Sigma_t}; \\ \lim\limits_{|x,y|\to\infty} u(t,x,y) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

où la densité g vérifie

$$\exists c_0 > 0 \quad \forall (t,s) \quad c_0 \leq g(t,s) \leq 1/c_0. \tag{1.8}$$

Alors Σ et g sont analytiques.

La preuve du théorème 3 s'obtient en étudiant l'équation de Garrett–Birkhoff suivante, qui décrit l'évolution de la courbe Σ_t, paramétrée par (t,λ), où λ est la densité de tourbillon définie par $g(t,s) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s)$.

$$\frac{\partial\bar{m}}{\partial t}(t,\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\,\fint \frac{\mathrm{d}\lambda'}{m(t,\lambda)-m(t,\lambda')}\,. \tag{1.9}$$

Le point clé consiste à vérifier que les hypothèses du théorème 3 entraînent que (1.9) est une équation non-linéaire elliptique. Il est alors naturel d'attendre également une condition de compatibilité pour les traces en $t=0$ des solutions de (1.9) de classe $C^{1+\rho_0}$ sur un intervalle $[0,T_0]$. Le résultat suivant va dans ce sens, mais ne décrit qu'au premier ordre la contrainte que doit satisfaire la donnée initiale en $t=0$ pour qu'il existe une solution classique au problème des nappes de tourbillons dans un petit intervalle $[0,T_0]$.

Théorème 1.4. *Soit $\rho_0>0$ et $m(t,\lambda)\in C^{1+\rho_0}([0,T_0]\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$ vérifiant l'équation de Garrett–Birkhoff (1.9) sur $]0,T_0[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et*

$$\exists c_0>0\quad \forall t,\lambda,\lambda'\quad |m(t,\lambda)-m(t,\lambda')|\geq c_0 \text{ dist }(\lambda,\lambda'). \tag{1.10}$$

Soit $n(\lambda)=m(0,\lambda)$ la trace de m en $t=0$, $g(s)=(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda})^{-1}>0$ la densité de tourbillon en $t=0$, s désignant l'abscisse curviligne sur la courbe n, et $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{i\theta(s)}$. On a

$$\theta(s)+\log g(s)\in C^{\nu} \tag{1.11}$$

pour tout $\nu<\nu_0=\min[1+\rho_0,2\rho_0]$.

Remarque : Dans [5] Duchon et Robert ont prouvé que pour toute perturbation assez petite de la droite $y=0$, il existe une densité de tourbillon initiale proche de 1, pour laquelle le problème de Kelvin–Helmholtz possède une solution globalement définie et analytique pour $t\in]0,+\infty[$. Leur résultat fournit donc (implicitement) une relation de compatibilité complète assurant l'existence dans $t>0$ pour des données proches d'un état constant. Il serait bien sûr très intéressant de pouvoir décrire les relations pseudodifférentielles non-linéaire complètes reliant la courbe de saut et le tourbillon pour assurer l'existence sur des intervalles $\{\pm t\in]0,\varepsilon[\}$.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous montrons que le noyau de Garrett–Birkhoff qui intervient dans (1.9) peut s'écrire comme un opérateur de type pseudodifférentiel linéaire agissant sur m modulo un reste plus régulier dans les espaces de Hölder. Pour vérifier ce point, nous utilisons une variante de la méthode de paralinéarisation de Bony [3]. La version C^∞ du théorème 1.3 et le théorème 1.4 sont alors obtenus comme conséquence de la théorie elliptique standard dans les sections 3 et 4 . On vérifie l'analyticité de Σ et g dans la section 5. Enfin, l'appendice A est consacré à la dérivation de l'équation de Garrett–Birkhoff, et l'appendice B à des rappels de calcul pseudodifférentiel à coefficients peu réguliers. Les notations que nous utiliserons concernant les o.p.d. et les décompositions de Littlewood–Paley sont explicitées dans l'appendice B.

2. Le noyau de Garrett–Birkhoff

Nous utiliserons dans cette section les notations et résultats de l'appendice B.

Soit $I=]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $m(t,x)$ une fonction de classe $C^{1+\rho_0}$ sur $I\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, avec $\rho_0>0$ non entier, et vérifiant

$$\exists c_0>0\quad \forall t,x,x'\quad |m(t,x)-m(t,x')|\geq c_0 \text{ dist }(x,x'). \tag{2.1}$$

Soit $K(m)(t,x)$ la fonction

$$K(m)(t,x) = \fint \frac{\mathrm{d}x'}{m(t,x) - m(t,x')} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-x'|>\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x'}{m(t,x) - m(t,x')} \tag{2.2}$$

qui est bien définie d'après (2.1).

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\theta(t,x) \in C_0^\infty$, à support dans un petit voisinage de (t_0, x_0), égal à 1 près de (t_0, x_0). L'objet de ce paragraphe est de prouver la

Proposition 2.1. *Pour tout $\delta \in]\frac{1}{2}, 1[$, on a au voisinage de (t_0, x_0)*

$$K(m) = \sum_{j=0}^{\infty} S_{j\delta}\left(\frac{-\pi\theta}{(\partial_x m)^2}\right) \Delta_j(|D_x|\theta m) + r_\delta \tag{2.3}$$

avec $r_\delta \in C^\mu$ près de (t_0, x_0), pour tout

$$\mu < \min(2\delta\rho_0, 1 + \rho_0) = \mu_0. \tag{2.4}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que si Q est l'opérateur sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$Q(f) = \sum_{j=0}^{\infty} S_{j\delta}\left(\frac{-\pi\theta}{(\partial_x m)^2}\right) \Delta_j f \tag{2.5}$$

on a $Q \in \Sigma^0_{\rho_0,\delta}$, et d'après les lemmes B.2 et B.3, $Q(|D_x|\theta m) \in C^{\rho_0}$; comme on a supposé $2\delta > 1$, le terme r apparaît comme un reste dans (2.3).

Soit $(\alpha, \beta) = \nabla m(t_0, x_0)$; il existe $f \in C_0^{1+\rho_0}$ à support compact, avec $\|f; C^1\| \ll 1$, et un voisinage V de (t_0, x_0), tels qu'on ait, pour $(t,x) \in V$

$$m(t,x) = m(t_0, x_0) + \alpha(t - t_0) + \beta[(x - x_0) + f(t,x)]. \tag{2.6}$$

Soient $\theta_1, \theta_2 \in C_0^\infty$ deux fonctions à support dans V, égales à 1 près de (t_0, x_0), avec $\theta_2 \equiv 1$ au voisinage du support de θ_1. On a

$$\theta_1(t,x)K(m) = \fint \frac{\theta_1(t,x)\theta_2(t,x')}{m(t,x) - m(t,x')}\mathrm{d}x' + \fint \frac{\theta_1(t,x)(1 - \theta_2(t,x'))}{m(t,x) - m(t,x')}\mathrm{d}x'. \tag{2.7}$$

Dans (2.7), le deuxième terme du membre de droite appartient à $C^{1+\rho_0}$ de sorte qu'en posant

$$G(t,x,x') = \frac{\theta_1(t,x)\theta_2(t,x')}{\beta[1 + \frac{f(t,x)-f(t,x')}{x-x'}]} \in C^{\rho_0}. \tag{2.8}$$

On a

$$\theta_1(t,x)K(m) \equiv \fint \frac{G(t,x,x')}{x - x'}\mathrm{d}x' \quad (\text{modulo } C^{1+\rho_0}). \tag{2.9}$$

Dans (2.8), on peut remplacer $\frac{f(t,x)-f(t,x')}{x-x'}$ par

$$u(t,x,x') = \theta_3(t,x,x')\frac{f(t,x) - f(t,x')}{x - x'} \in C^{\rho_0} \tag{2.10}$$

avec $\theta_3 \in C_0^\infty$ à support proche de (t_0, x_0, x_0), égal à 1 au voisinage du support de $\theta_1(t,x)\theta_2(t,x')$. Pour $\lambda > 0$, on décompose alors u sous la forme

$$u = u_\lambda^1 + u_\lambda^2 \ ; \ u_\lambda^1 = S_{\lambda\delta}(u) \ , \ u_\lambda^2 = u - u_\lambda^1. \tag{2.11}$$

On a alors, uniformément en $\lambda \geq 1$

$$|\partial_z^\alpha u_\lambda^1|_{\rho_0} \leq C_\alpha^{te} 2^{\lambda\delta|\alpha|} \ ; \ |u_\lambda^2|_{\rho_0-\sigma} \leq C_\sigma^{te} 2^{-\lambda\delta\sigma}, 0 < \sigma < \rho_0. \tag{2.12}$$

La formule de Taylor à l'ordre 1 pour $F(\tau) = \frac{1}{1+\tau}$ fournit, avec $z = (t,x,x')$

$$\begin{cases} F(u) & = F_\lambda^1 + F_\lambda^2 \\ F_\lambda^1(z) & = F(u_\lambda^1) + u_\lambda^2 F'(u_\lambda^1) = F(u_\lambda^1) - u_\lambda^1 F'(u_\lambda^1) + uF'(u_\lambda^1) \\ F_\lambda^2(z) & = (u_\lambda^2)^2 \displaystyle\int_0^1 F''(u_\lambda^1 + tu_\lambda^2)(1-t)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{2.13}$$

et on a

$$|\partial_z^\alpha F^{(j)}(u_\lambda^1)|_{\rho_0} \leq C_{j,\alpha}^{te} 2^{\lambda\delta|\alpha|} \tag{2.14}$$

$$|F_\lambda^2|_{\rho_0-\sigma} \leq C_\sigma^{te} 2^{-2\lambda\delta\sigma} \text{ pour } 0 < \sigma < \rho_0. \tag{2.15}$$

Fixons un entier N_0, et décomposons $\theta_1 K(m)$ sous la forme

$$\theta_1 K(m) \equiv A_0 + A_1 + A_2 \quad (\text{modulo } C^{1+\rho_0}) \tag{2.16}$$

avec

$$A_0(t,x) = \sum_{p<N_0} \chi_p(D)[\theta_1 K(m)] + \sum_{p \geq N_0} \chi_p(D) \left[\fint \frac{\theta_1\theta_2}{\beta(x-x')} (F(u_p^1) - u_p^1 F'(u_p^1))\mathrm{d}x' \right] \tag{2.17}$$

$$A_1(t,x) = \sum_{p \geq N_0} \chi_p(D) \left[\fint \frac{\theta_1\theta_2}{\beta(x-x')} F'(u_p^1) \frac{f(t,x) - f(t,x')}{x-x'} \mathrm{d}x' \right] \tag{2.18}$$

$$A_2(t,x) = \sum_{p \geq N_0} \chi_p(D) \left[\fint \frac{\theta_1\theta_2}{\beta(x-x')} F_p^2 \mathrm{d}x' \right]. \tag{2.19}$$

Soit $v_p = F(u_p^1) - u_p^1 F'(u_p^1)$. On a pour tout N, $|v_p|_{\rho_0+N} \leq C_N^{te} 2^{p\delta N}$. L'opérateur

$$g(t,x,x') \mapsto (Bg)(t,x) = \fint \frac{\theta_1\theta_2}{(x-x')} g(t,x,x')\mathrm{d}x'$$

est borne de C^{ρ_0+N} dans $C^{\rho_0'+N}$ pour $\rho_0' < \rho_0$. Les fonctions $w_p = \fint \frac{\theta_1\theta_2}{\beta(x-x')} v_p \mathrm{d}x'$ vérifient donc $|w_p|_{\rho_0'+N} \leq C_N^{te} 2^{p\delta N}$, d'où $|\chi_p(D) w_p|_\infty \leq C_N^{te} 2^{-p(\rho_0'+N)} 2^{p\delta N}$. Comme on a $\delta < 1$, on en déduit $A_0 \in C^\infty$.

On a $|F_p^2|_{\rho_0-\sigma} \leq C_\sigma^{te} 2^{-2p\delta\sigma}$, donc pour $0 < \sigma < \rho_0' < \rho_0$ les fonctions $r_p = \fint \frac{\theta_1\theta_2}{\beta(x-x')} F_p^2 \mathrm{d}x'$ vérifient $|r_p|_{\rho_0'-\sigma} \leq C_{\rho_0',\sigma}^{te} 2^{-2p\delta\sigma}$. Il en résulte $|\chi_p(D) r_p|_\infty \leq C_{\rho_0'}^{te} 2^{-2p\delta\rho_0'}$ pour $\rho_0' < \rho_0$. On a donc $A_2 \in C^\mu$ pour $\mu < 2\delta\rho_0$.

On a

$$A_1(t,x) = \sum_{p \geq N_0} \chi_p(D) \fint \frac{1}{x-x'} g_p(t,x,x') \frac{f(t,x)-f(t,x')}{x-x'} \mathrm{d}x'$$

où $g_p(t,x,x') = \frac{\theta_1\theta_2}{\beta} F'(u_p^1)(t,x,x')$ est à support compact et vérifie $|\partial_z^\alpha g_p|_{\rho_0} \leq C_\alpha^{te} 2^{\delta p|\alpha|}$. Soit $\chi(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$; tel que $\hat{\chi}(\zeta)$ soit à support dans la boule $\{|\zeta| \leq c_0 \ll 1\}$ et égal à 1 près de 0. On décompose g_p sous la forme

$$g_p = a_p + b_p \ ; \ a_p(z) = 2^{3p} \int \chi(2^p(z-z')) g_p(z') \mathrm{d}z'. \tag{2.20}$$

On a alors

$$\text{support } (\widehat{a_p}(\zeta)) \subset \{|\zeta| \leq c_0 2^p\} \tag{2.21}$$

$$|\partial_z^\alpha a_p|_{\rho_0} \leq C_\alpha 2^{\delta p|\alpha|} \tag{2.22}$$

$$\sup_{|z| \geq R_0} |z^\alpha \partial_z^\beta a_p|_{L^\infty} \in \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(2^{-p\infty}) \quad (R_0 \text{ assez grand}) \tag{2.23}$$

$$\sup_z |z^\alpha \partial_z^\beta b_p|_{L^\infty} \in \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(2^{-p\infty}). \tag{2.24}$$

Les fonctions $u_p(z) = \frac{f(t,x)-f(t,x')}{x-x'} b_p(t,x,x')$ vérifient $|(1+|z|^2) u_p|_{\rho_0} \in \mathcal{O}(2^{-p\infty})$, d'où il résulte

$$\sum_{p \geq N_0} \chi_p(D) \fint \frac{1}{x-x'} u_p(t,x,x') \mathrm{d}x' \in C^\infty. \tag{2.25}$$

Pour étudier $\sum_{p \geq N_0} \chi_p(D) \fint \frac{1}{x-x'} a_p(t,x,x') \frac{f(t,x)-f(t,x')}{x-x'} \mathrm{d}x'$, on introduit la décomposition de Littlewood–Paley de f, $f = \sum_{q \geq -1} f_q$, avec support $(\hat{f}_q) \subset C_q$, et on pose

$$v_{p,q} = \fint \frac{1}{x-x'} a_p(t,x,x') \frac{f_q(t,x)-f_q(t,x')}{x-x'} \mathrm{d}x'. \tag{2.26}$$

On a (avec $\zeta = (\tau,\xi) \in \mathbb{R}^2$)

$$\text{support } (\widehat{v_{p,q}}(\zeta)) \subset \{\zeta = \zeta' + \zeta'', \zeta' \in C_q, |\zeta''| \leq \sqrt{2} c_0 2^p\} \cdot \tag{2.27}$$

Comme on a $\sqrt{2} c_0 \ll 1$, il en résulte

$$\chi_p(D)(v_{p,q}) \equiv 0 \text{ pour } q \leq p-2. \tag{2.28}$$

On écrit alors $a_p = a_p^1 + a_p^2$ avec

$$a_p^1 = a_p(t,x,x),\ \ a_p^2(t,x,x+s) = s\int_0^1 \partial_{x'} a_p(t,x,x+su)\mathrm{d}u. \tag{2.29}$$

On a

$$|a_p^2(t,x,x+s)|_\mu + |\frac{1}{s}a_p^2(t,x,x+s)|_\mu \le C_\mu^k 2^{p\delta[\mu+1-\rho_0]_+}\ .$$

En posant $w_{p,q} = \frac{1}{s}a_p^2(t,x,x+s)[f_q(t,x) - f_q(t,x+s)]$ on a donc pour $\mu > 0$ petit en utilisant $|f_q|_\mu \le C_\mu^k 2^{q\mu}2^{-q(1+\rho_0)}$

$$|sw_{p,q}|_\mu + |w_{p,q}|_\mu \le C_\mu^{te}\left[2^{q\mu}2^{-q(1+\rho_0)}2^{p\delta[1-\rho_0]_+} + 2^{-q(1+\rho_0)}2^{p\delta[\mu+1-\rho_0]_+}\right]. \tag{2.30}$$

D'où avec $v_{p,q}^2 = ⨍\frac{1}{s}w_{p,q}(t,x,s)\mathrm{d}s$, pour $0 < \varepsilon < \mu$, en utilisant (2.23) pour les grandes valeurs de s

$$|v_{p,q}^2|_{\mu-\varepsilon} \le C_{\varepsilon,\mu}^{te}\left[2^{q\mu}2^{-q(1+\rho_0)}2^{p\delta[1-\rho_0]_+} + 2^{-q(1+\rho_0)}2^{p\delta[\mu+1-\rho_0]_+}\right]. \tag{2.31}$$

D'où pour $\varepsilon > 0$

$$\Big|\sum_{q\ge p-2}\chi_p(D)v_{p,q}^2\Big|_\infty \le C_\varepsilon 2^{-p(1+\rho_0)+p\delta[1-\rho_0]_+ + p\varepsilon}. \tag{2.32}$$

Il en résulte

$$\sum_p\sum_{q\ge p-2}\chi_p(D)v_{p,q}^2 \in C^\mu \qquad \text{pour } \mu < \mu_0.$$

On a donc d'après ce qui précède pour $\mu < \mu_0$

$$\theta_1 K(m) \equiv \sum_{p\ge -1}\chi_p(D)[a_p(t,x,x)\pi|D_x|f] \qquad (\text{modulo } C^\mu) \tag{2.33}$$

puisque

$$⨍\frac{f_q(t,x) - f_q(t,x')}{(x-x')^2}\mathrm{d}x' = \pi|D_x|f_q(t,x). \tag{2.34}$$

Pour $|p-q| \le 2$, on a $|a_p - a_q|_{L^\infty} \in \mathcal{O}(2^{-p\delta\rho_0})$. L'opérateur $\Sigma_p\chi_p(D)a_p - a_p\chi_p(D) = \sum_{|p-q|\le 2}\chi_p(a_p - a_q)\chi_q$ envoie donc C^{ρ_0} dans $C^{\rho_0+\delta\rho_0}$. Si $\theta \in C_0^\infty$ vaut 1 près de (t_0,x_0), on a donc dans un voisinage W de (t_0,x_0), avec $r_\delta \in C^\mu, \mu < \mu_0$.

$$K(m) = \sum_p \pi a_p(t,x,x)\chi_p(D)[|D_x|\theta f] + r_\delta \tag{2.35}$$

(on utilise ici les estimées des Lems. B.2 et B.3 sur les commutateurs $[\Sigma a_p\chi_p,\theta]$ et $[|D_x|,\theta]$ ainsi que $\rho_0 + 1 - \delta[1-\rho_0]_+ \ge \mu_0$).

D'après (2.6), si θ est à support assez petit on a $\theta f \equiv \frac{1}{\beta}\theta m$ (modulo C^∞) et il reste à vérifier que pour W petit voisinage de (t_0,x_0) on a

$$\left|\frac{a_p(t,x,x)}{\beta} + S_{p\delta}\left(\frac{\theta}{(\partial_x m)^2}\right)\right|_{L^\infty(W)} \in \mathcal{O}(2^{-p\delta\rho_0}). \tag{2.36}$$

D'après (2.11) on a $|u_p^1(z)-u(z)|_\infty \in \mathcal{O}(2^{-p\delta\rho_0})$, et d'après (2.20) $|a_p(z)-g_p(z)|_\infty \in \mathcal{O}(2^{-p\delta\rho_0})$, donc $|\frac{a_p(t,x,x)}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{(1+(\partial_x f))^2}|_{L^\infty(W)} \in \mathcal{O}(2^{-p\delta\rho_0})$. On a aussi $|S_{p\delta}(\frac{\theta}{(\partial_x m)^2})-\frac{1}{(\partial_x m)^2}|_{L^\infty(w)} \in \mathcal{O}(2^{-p\delta\rho_0})$ et (2.36) résulte de $\partial_x m = \beta(1+\partial_x f)$.

3. Régularité C^∞

Soit $\rho_0 > 0$ et $m(t,x) \in C^{1+\rho_0}_{loc}(]a,b[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\mathbb{C})$ vérifiant 2.1 et l'équation de Garrett–Birkhoff.

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{m}(t,x) = \frac{1}{2i\pi}\fint \frac{\mathrm{d}x'}{m(t,x)-m(t,x')}\,. \tag{3.1}$$

L'objet de ce paragraphe est de vérifier le

Théorème 3.1. *$m(t,x)$ est C^∞ sur $]a,b[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

La preuve va être conséquence de la proposition 2.1 qui entraîne que l'équation (3.1) est une équation non linéaire elliptique.

On conserve les notations de la section 2. D'après (2.3) on a pour tout $\mu < \mu_0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{m} - \frac{1}{2i\pi}Q(|D_x|\theta m) \in C^\mu_{(t_0,x_0)}. \tag{3.2}$$

On réécrit (3.2) sous la forme d'un système 2×2 pour $m_1 = Re(m),\ m_2 = Im(m)$, la décomposition $Q = Q_1+iQ_2$ étant associée par (2.5) à la décomposition en parties réelles et imaginaires de $-\pi\theta(\partial_x m)^{-2}$. On obtient

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1\\ m_2\end{pmatrix} \in C^\mu_{(t_0,x_0)} \tag{3.3}$$

avec $A = \partial_t - \frac{1}{2\pi}Q_2(|D_x|\theta)$, $B = C = \frac{-1}{2\pi}Q_1(|D_x|\theta)$, $D = \partial_t + \frac{1}{2\pi}Q_2(|D_x|\theta)$. Les opérateurs A,B,C,D envoient C^r_* dans C^{r-1}_* d'après les résultats de l'appendice B. Soit $\psi \in C_0^\infty$, égal à 1 près de (t_0,x_0), à support petit. D'après les lemmes B.2 et B.3, les commutateurs $[\psi,A],\cdots,[\psi,D]$ envoient $C^{1+\rho_0}$ dans $C^{1+\rho_0-\nu}$ pour $\nu > \delta[1-\rho_0]_+$. On a $1+\rho_0-\delta[1-\rho_0]_+ \geq \mu_0$, d'où avec $n_j = \psi m_j \in C_0^{1+\rho_0}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1\\ n_2\end{pmatrix} \in C^\mu(\mathbb{R}^2). \tag{3.4}$$

En multipliant (3.4) par $\begin{pmatrix} D & -B\\ -C & A\end{pmatrix}$, et en réutilisant les lemmes de commutateurs, on obtient (on peut supposer $\theta\psi \equiv \psi$)

$$Pn_j \in C^{\mu-1}(\mathbb{R}^2)\ ;\ P = \partial_t^2 - \frac{1}{4\pi^2}(Q_1^2+Q_2^2)|D_x|^2. \tag{3.5}$$

L'intérêt de (3.5) est qu'on a maintenant $P \in \Sigma^2_{\rho_0,\delta}$ car $|D_x|^2$ est un opérateur différentiel. Or les symboles des opérateurs de $\Sigma^2_{\rho_0,\delta}$ appartiennent à la classe de Hörmander $S^2_{1,\delta}$, et P est elliptique en (t_0,x_0) dans $S^2_{1,\delta}$ car son symbole est

$$\sigma(P) = -\tau^2 - \sum_{j=0}^\infty p_j(t,x)\chi(2^{-j}(\tau,\xi))\xi^2 \tag{3.6}$$

avec $|\partial^\alpha p_j|_\infty \leq 2^{\delta j|\alpha|}$ et $\lim\limits_{j\to\infty} p_j(t,x) = \frac14\theta^2|\partial_x m|^{-4}$.

Donc (3.5) entraîne $n_j \in C^{\mu+1}_{(t_0,x_0)}$, c'est-à-dire $m \in C^{1+\rho_0+\alpha}_{(t_0,x_0)}$ avec $0 < \alpha < \mu_0 - \rho_0$. Comme (t_0, x_0) est arbitraire, il vient $m \in C^{1+\rho_0+\alpha}_{\mathrm{loc}}(]a,b[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ donc par itération $m \in C^\infty$.

4. Régularité des traces

Soit $\rho_0 > 0$ et $m(t,x) \in C^{1+\rho_0}([0,T_0] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$ vérifiant (2.1) et l'équation de Garrett–Birkhoff (3.1) sur $]0,T_0[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On pose

$$n(x) = m(0,x) \in C^{1+\rho_0}. \tag{4.1}$$

On s'intéresse dans ce paragraphe à décrire au premier ordre l'équation de compatibilité que doit vérifier la trace $n(x)$; cette équation de compatibilité sera obtenue en écrivant les projecteurs de Calderon associés à la paralinéarisation de l'équation de Garrett–Birkhoff.

Dans toute la suite, on notera $\tilde{m}(t,x)$ une extension $C^{1+\rho_0}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$ de m satisfaisant 2.1.

Nous utiliserons ici un calcul pseudo différentiel tangentiel : pour $\delta \in]0,1[$, $\widetilde{\Sigma}^m_{\rho_0,\delta}$ désignera la classe des o.p.d. tangentiels de symbole $p(t,x,\xi)$ vérifiant

$$\forall\alpha,\beta, \exists C_{\alpha,\beta}\forall\xi \in \mathbb{R}\|\partial^\alpha_{t,x}\partial^\beta_\xi p(.,\xi); C^{\rho_0}(\mathbb{R}^2_{t,x})\| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|+\delta|\alpha|} \tag{4.2}$$

avec la quantification

$$p(t,x,D_x)f(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{ix\xi}p(t,x,\xi)\hat{f}(t,\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.3}$$

où $\hat{f}(t,\xi)$ désigne la transformée de Fourier partielle.

Nous noterons $\tilde{\phi}(\xi) \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ une fonction paire vérifiant $\tilde{\phi}(\xi) \equiv 1$ pour $|\xi| \leq 1/c, \tilde{\phi}(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq c$, $c \in]1,\sqrt{2}[$, $\tilde{\chi}(\xi) = \tilde{\phi}(\xi/2) - \tilde{\phi}(\xi)$, $\tilde{S}_\lambda(f)(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_x(\tilde{\phi}(2^{-\lambda}\xi)\hat{f}(t,\xi))$, où $\mathcal{F}_x$ et $\hat{f}(t,\xi)$ sont les transformées de Fourier partielles en x, $\tilde{\Delta}_j(f)(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_x(\tilde{\chi}(2^{-j}\xi)\hat{f}(t,\xi))$, $\tilde{\Delta}_{-1}(f) = \tilde{S}_0(f)$. La décomposition de Littlewood–Paley partielle s'écrit

$$f(t,x) = \sum_{j\geq -1}(\tilde{\Delta}_j f)(t,x). \tag{4.4}$$

Pour $\mu > 0$ non entier et $f \in C^\mu_{t,x}$, on a

$$|\tilde{\Delta}_j f|_{L^\infty(t,x)} \leq C2^{-j\mu}\|f\|_\mu. \tag{4.5}$$

Pour $\mu \in \mathbb{R}$, nous noterons W^μ l'espace des $f(t,x) \in C^0(\mathbb{R}_t, \mathcal{D}'_x)$ vérifiant

$$\exists A \quad \forall j \quad |\tilde{\Delta}_j f(t,x)|_{L^\infty(t,x)} \leq A2^{-j\mu}. \tag{4.6}$$

On a donc l'injection $C^\mu_{t,x} \hookrightarrow W^\mu$ pour $\mu > 0$ non entier. Les opérateurs $P \in \widetilde{\Sigma}^m_{\rho_0,\delta}$ sont bornés de W^μ dans $W^{\mu-m}$ et les commutateurs $[P,Q], P \in \widetilde{\Sigma}^{m'}_{\rho_0,\delta}, Q \in \widetilde{\Sigma}^{m''}_{\rho_0,\delta}$ sont bornés de W^μ dans $W^{\mu-m+1+\nu}$ pour tout $\nu > \delta[1-\rho_0]_+$.

Le résultat de compatibilité sur la trace $n(x) = m(0,x)$ des solutions de l'équation de Garrett–Birkhoff de classe $C^{1+\rho_0}$ définies sur $[0,T_0]$ est le suivant :

Théorème 4.1. *Pour* $\nu < \nu_0 = \min[1+\rho_0, 2\rho_0]$ *on a*

$$Im[\log(\partial_x n)\mathrm{e}^{-i\pi/4}] \in C^\nu. \tag{4.7}$$

On notera que (4.7) est indépendant du choix de la détermination du logarithme ; si s est l'absisse curviligne sur la courbe initiale, $g(s) > 0$ la densité de tourbillon, et $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{i\theta(s)}$, l'équation (4.7) équivaut à la condition du théorème 1.4

$$\theta(s) + \log g(s) \in C^\nu.$$

Pour vérifier le théorème 4.1, on commence par déduire de la proposition 2.1 dont nous conservons les notations une représentation tangentielle du noyau K.

Lemme 4.1. *Pour tout* $\delta \in]1/2, 1[$*, on a au voisinage de* (t_0, x_0)

$$K(\tilde{m}) = \sum_{j=0}^{\infty} S_{j\delta}\left(\frac{-\pi\theta}{(\partial_x\tilde{m})^2}\right)\tilde{\Delta}_j(|D_x|\theta m) + r_\delta \tag{4.8}$$

avec $r_\delta \in W^\mu$ *pour tout* $\mu < \mu_0$.

Démonstration. Dans (4.8), les opérateurs de lissage $S_{j\delta}$ opèrent sur les variables (t,x) ; la seule différence entre (2.3) et (4.8) est le remplacement de Δ_j par $\tilde{\Delta}_j$. Il s'agit donc de vérifier pour $f \in C^{\rho_0}_{(t,x)}$

$$\sum_j a_j(t,x)(\Delta_j - \tilde{\Delta}_j)(f) \in W^\mu \text{ pour } \mu < \mu_0 \tag{4.9}$$

lorsque les $\{a_j\}$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{l}\text{spectre } (a_j) \subset \{|\tau,\xi| \ll 2^j\} \ ; \ |\partial^\alpha a_j|_\infty \le C_\alpha 2^{j\delta|\alpha|} \\ |a_{j+\ell} - a_j|_\infty \le C2^{-\delta\rho_0 j}(C \text{ indépendant de } j, \text{ et } \ell \ge 0).\end{array}\right. \tag{4.10}$$

On a en utilisant les conditions de localisation spectrale

$$\sum_j a_j\Delta_j(f) = \sum_{k,j}\tilde{\Delta}_k(a_j\Delta_j(f)) = \sum_{j\ge k-2}\tilde{\Delta}_k(a_j\Delta_j(f)) = \sum_{j\ge k-2}\tilde{\Delta}_k(a_k\Delta_j(f)) + \sum_{j\ge k-2}\tilde{\Delta}_k((a_k - a_j)\Delta_j(f)) \tag{4.11}$$

et de même

$$\sum_j a_j\tilde{\Delta}_j(f) = \sum_{k,j}\tilde{\Delta}_k(a_j\tilde{\Delta}_j(f)) = \sum_{j\ge k-2}\tilde{\Delta}_k(a_k\tilde{\Delta}_j(f)) + \sum_{j\ge k-2}\tilde{\Delta}_k((a_k - a_j)\tilde{\Delta}_j(f)). \tag{4.12}$$

Pour $j \ge k-2$ et $f \in C^{\rho_0}_{t,x}$, on a

$$|(a_k - a_j)\Delta_j(f)|_\infty + |(a_k - a_j)\tilde{\Delta}_j(f)|_\infty \in \mathcal{O}(2^{-k\delta\rho_0}2^{-j\rho_0}).$$

Les deux opérateurs $\sum_{j\geq k-2}\tilde\Delta_k(a_k-a_j)\{\Delta_j,\tilde\Delta_j\}$ envoient donc C^{ρ_0} dans $W^{\rho_0+\delta\rho_0}$. Le lemme résulte alors de

$$\sum_{j\geq k-2}\tilde\Delta_k(a_k\Delta_j(f))=\sum_k\tilde\Delta_k(a_kf)=\sum_{j\geq k-2}\tilde\Delta_k(a_k\tilde\Delta_j(f)). \tag{4.13}$$

□

On écrit maintenant l'équation de Garrett–Birkhoff sous forme d'un système tangentiel. Avec $u_1=Re(m)$, $u_2=Im(m)$, on a

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\in C^{1+\rho_0}([0,T_0]\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^2)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_tu+M|D_x|u=f\in W^\mu([0,T_0])\ \text{(pour tout }\mu<\mu_0)\\ M=\frac12\Sigma_jS_{j\delta}\begin{pmatrix}Im(p)&Re(p)\\Re(p)&-Im(p)\end{pmatrix}\tilde\chi(2^{-j}\xi)\ p=(\partial_x\tilde m)^{-2}.\end{array}\right. \tag{4.14}$$

Dans (4.14), l'opérateur M appartient à la classe $\widetilde\Sigma^0_{\rho_0,\delta}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. (On remarquera que si $g(t,x)\in C^\mu$ est 2π périodique en x, les lissages $S_{j\delta}(g)$ sont 2π-périodiques, et les opérateurs $\tilde\chi(2^{-j}\xi)$ et $|D_x|$ conservent le caractère 2π périodique.)

Soient $e_\pm(t,x)\in(C^{\rho_0})^2$ les vecteurs propres normalisés de la matrice

$$\begin{pmatrix}Im(p)&Re(p)\\Re(p)&-Im(p)\end{pmatrix}$$

associés aux valeurs propres $\pm|p|(t,x)$ et

$$Q=\sum_jS_{j\delta}([e_+],[e_-])\tilde\chi(2^{-j}\xi)\in\tilde\Sigma^0_{\rho_0,\delta} \tag{4.15}$$

$$L=\sum_jS_{j\delta}(|p|)\tilde\chi(2^{-j}\xi)\in\tilde\Sigma^0_{\rho_0,\delta}. \tag{4.16}$$

L'opérateur Q est elliptique ; soit $Q^{-1}\in\tilde\Sigma^0_\rho$ une paramétrix de Q (*i.e.* $Q\circ Q^{-1}-Id\in\cap_m\tilde\Sigma^m_{\rho_0,\delta},Q^{-1}\circ Q-Id\in\cap_m\tilde\Sigma^m_{\rho_0,\delta}$).

Alors $v=Q^{-1}u\in W^{1+\rho_0}([0,T_0])$ vérifie,

$$\partial_tv+\begin{pmatrix}L&0\\0&-L\end{pmatrix}|D_x|v=g \tag{4.17}$$

$$g=[\partial_t,Q^{-1}]u+Q^{-1}M|D_x|(QQ^{-1}-Id)u+Q^{-1}f+Q^{-1}M[Q,|D_x|]v+\left[\begin{pmatrix}L&0\\0&-L\end{pmatrix}-Q^{-1}MQ\right]|D_x|v. \tag{4.18}$$

On a $[Q,|D_x|]v$ et $[\partial_t,Q^{-1}]u$ dans W^μ pour $\mu<\mu_0$. Pour $a\in C^{\rho_0}$, on a $|S_{j\delta}(a)(t,x)-\tilde S_{j-N_0}(a(t,.))(x)|_\infty\in\mathcal{O}(2^{-j\delta\rho_0})$. En notant $\widetilde T_a$ le paraproduit tangentiel à t fixé, l'opérateur $\widetilde T_a-\Sigma S_{j\delta}(a)\tilde\chi(2^{-j}\xi)$ envoie donc W^μ dans $W^{\mu+\delta\rho_0}$.

Comme $\tilde{T}_a \circ \tilde{T}_b - \tilde{T}_{ab}$ envoie W^μ dans $W^{\mu+\rho_0}$, et $\rho_0 + \delta\rho_0 \geq \mu_0$, on obtient également $\left[\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix} - Q^{-1}MQ\right]$ $|D_x|v \in W^\mu$ pour $\mu < \mu_0$. D'où

$$g \in W^\mu \text{ pour } \mu < \mu_0. \tag{4.19}$$

Lemme 4.2. *Soit $v_2 \in W^{1+\rho_0}([0,T_0])$ solution de*

$$\partial_t v_2 - L|D_x|v = g_2 \tag{4.20}$$

avec $g_2 \in W^\mu$ pour tout $\mu < \mu_0$. Alors $v_2(0,x) \in C^{\mu+1}$ pour $\mu < \mu_0$.

Démonstration. On utilise la méthode de dualité usuelle pour les problèmes aux limites elliptiques. Soit $\tilde{S}^m_{1,\delta}$ la classe des opérateurs tangentiels de symbole $a(t,x,\xi)$ vérifiant des estimations

$$\sup_{t,x} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(t,x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-|\beta|}.$$

On a $p(t,x,D) = L|D_x| \in \tilde{S}^1_{1,\delta}$, et pour un $c_0 > 0$, $L(t,x,\xi) \in [c_0, 1/c_0]$ pour $|\xi|$ grand. L'équation

$$\begin{cases} (\partial_t a)(t,x,D) + ({}^t p)(t,x,D) \circ a(t,x,D) \in \tilde{S}^{-\infty}_{1,\delta} \\ a(0,x,D) = Id \end{cases} \tag{4.21}$$

possède alors une solution $a \in \tilde{S}^0_{1,\delta}$ vérifiant de plus

$$t^N a(t,x,D) \in \tilde{S}^{-N}_{1,\delta} \text{ pour tout } N. \tag{4.22}$$

(En utilisant les règles de calcul symbolique, il suffit de vérifier que $a_0(t,x,\xi) = \exp - \int_0^t L(s,x,\xi)|\xi|\mathrm{d}s$ vérifie $t^N a_0 \in \tilde{S}^{-N}_{1,\delta}$ et que si $b(t,x,\xi) \in \cap_N t^{-N}\tilde{S}^{-m-N}_{1,\delta}$, on a $\beta(t,x,\xi) = \int_0^t b(0,x,\xi)\exp(-\int_s^t L(u,x,\xi)|\xi|\mathrm{d}u)\mathrm{d}s$ $\in \cap_N t^{-N}\tilde{S}^{-m-N}_{1,\delta}$. Ces deux points résultant de

$$\exp - \int_0^t L(s,.)|\xi|\mathrm{d}s = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-t|\xi|z}}{z-\alpha}\mathrm{d}z$$

où γ est un contour complexe dans $Re\ z \geq c_0/2$ entourant $[c_0, 1/c_0]$, et où $\alpha(t,x,\xi) = \int_0^1 L(tu,x,\xi)\mathrm{d}u \in \tilde{S}^0_{1,\delta}$.)

On fixe alors x_0 et on pose

$$h_k(t,x) = a(t,x,D)\hat{\tilde{\chi}}_k(x_0 - x) \tag{4.23}$$

où $\hat{\tilde{\chi}}_k$ est la k^{e} troncature de la décomposition de Littlewood–Paley.

Il existe alors C indépendant de k et x_0 tel que

$$\int_0^{T_0} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x|h_k(t,x)| \leq C2^{-k}. \tag{4.24}$$

On peut en effet comme dans la preuve du lemme B.1 décomposer a en $a' + a''$ où $a''(t,x,D)$ envoie W^μ dans $\cap_\sigma W^\sigma$ et où

$$a'(t,x,D)f = \int \mathrm{d}y \sum_{\ell \geq -1} a'_\ell(t,x,y)\tilde{\Delta}_\ell[f(t,+x+2^{-\ell}y)]\mathrm{d}y.$$

Le terme $a''(t,x,D)$ fournit une contribution $\mathcal{O}(2^{-k\infty})$ à (4.24).

Comme $\tilde{\Delta}_\ell(\tilde{\chi}_k)$ n'est non nul que pour $|k-\ell| \leq 2$, on peut remplacer dans (4.24) $h_k(t,x)$ par une fonction $e_k(t,x)$ vérifiant

$$\sup_t \int |t^N e_k(t,x)|\mathrm{d}x \leq C_N 2^{-kN}. \tag{4.25}$$

On a alors

$$\int_0^{T_0}\int |e_k(t,x)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leq C^{te}(c_0+c_2)2^{-k}$$

en écrivant $\int_0^{T_0} = \int_0^{2^{-k}} + \int_{2^{-k}}^{T_0}$, d'où (4.24).

En intégrant par parties on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_0^{T_0} (\partial_t v_2 - L|D_x|v_2)h_k(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \iint_0^{T_0} g_2 h_k \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \\ \displaystyle\Big[\int v_2 h_k \mathrm{d}x\Big]_0^{T_0} - \iint_0^{T_0} v_2 b(t,x,D)[\hat{\tilde{\chi}}(x_0-x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{cases} \tag{4.26}$$

avec $b = \partial_t a +^t (L|D_x|)\circ a \in \tilde{S}^{-\infty}_{1,\delta}$. On a

$$|b(t,x,D)[\hat{\tilde{\chi}}_k(x_0-x)]|_\infty \leq C_N 2^{-kN} \text{ et } |h_k(T_0,x)|_\infty \leq C_N 2^{-kN}\ .$$

On a aussi

$$\int_0^{T_0}\int g_2 h_k \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_0^{T_0}\int [{}^t a(t,x,D)g_2]\hat{\tilde{\chi}}_k(x_0-x)\mathrm{d}x$$

et ${}^t a(t,x,D)g_2 = w(t,x)$ vérifie pour $\mu<\mu_0$

$$|t^N\tilde{\chi}_k(D)w|_\infty \leq C_N 2^{-k(\mu+N)}$$

d'où comme précédemment pour $\mu<\mu_0$

$$\Big|\int_0^{T_0}\int g_2 h_k \mathrm{d}t\mathrm{d}x\Big| \leq C2^{-k(1+\mu)}.$$

Comme $h_k(0,x) = \hat{\tilde{\chi}}_k(x_0-x)$, on obtient par (4.26) pour $\mu<\mu_0$

$$|\tilde{\chi}_k(D)v_2(0,.)|(x_0) = \Big|\int h_k(0,x)v_2(0,x)\Big| \leq C2^{-k(1+\mu)}$$

d'où le lemme. □

Soit q et φ les modules et argument de $\partial_x\tilde{m}$; on a $p = q^{-2}\mathrm{e}^{-2i\varphi}$; en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on obtient $e_\pm = \mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}$, de sorte que la condition $v_2(0,x)\in C^{\mu+1}$ se réécrit

$$Im[\Sigma_j S_{j\delta}((\partial_x\tilde{m})^{-1})\tilde{\chi}(2^{-j}\xi)\mathrm{e}^{-i\pi/4}m](0,x) \in C^{\mu+1} \quad \forall \mu<\mu_0. \tag{4.27}$$

Comme $\tilde{m}\in C^{\rho_0}$ et $\tilde{m}_{|t=0} = n$, on a

$$|S_{j\delta}((\partial_x\tilde{m})^{-1})(0,x) - \tilde{S}_{j\delta}((\partial_x n)^{-1})(x)|_\infty \in \mathcal{O}(2^{-j\delta\rho_0}). \tag{4.28}$$

On a aussi $|\tilde{S}_{j\delta}((\partial_x n)^{-1}) - \tilde{S}_{j-N_0}((\partial_x n)^{-1}| \in \mathcal{O}(2^{-j\delta\rho_0})$.

En faisant tendre δ vers 1, on peut donc réécrire (4.27) sous forme de paraproduit

$$Im(\mathrm{e}^{-i\pi/4}T_{(\partial_x n)^{-1}}(n)) \in C^{1+\nu} \quad \forall \nu < \min(1+\rho_0, 2\rho_0) = \nu_0. \tag{4.29}$$

Comme $(\partial_x n)^{-1} \in C^{\rho_0}$ et $n \in C^{1+\rho_0}$, on a $T_{\partial_x((\partial_x n)^{-1})}(n) \in C^{\nu}$ pour $\nu < \nu_0$, d'où en dérivant (4.29)

$$Im(\mathrm{e}^{-i\pi/4}T_{(\partial_x n)^{-1}}((\partial_x n))) \in C^{\nu} \quad \forall \nu < \nu_0. \tag{4.30}$$

Or, on a pour $u \in C^{\rho_0}$, et $F \in C^{\infty}$, $F(u) \equiv T_{F'(u)}u$ modulo $C^{2\rho_0}$, d'où le théorème 4.1.

5. Régularité analytique

Soit $m(t,\lambda)$ une solution C^{∞} de l'équation de Garrett–Birkhoff (1.9). On note $\mathcal{L}$ l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L}(u) = \partial_t \bar{u} + \frac{1}{2i\pi} \fint \frac{u(t,\lambda) - u(t,\lambda')}{(m(t,\lambda) - m(t,\lambda'))^2} \mathrm{d}\lambda'. \tag{5.1}$$

On fixe $\rho \in]0,1[$. L'opérateur $\mathcal{L}$ envoie $C_0^{1+\rho}(]T_1,T_2[\times\mathbb{R}/\Lambda\mathbb{Z})$ dans $C_0^{\rho}(]T_1,T_2[\times\mathbb{R}/\Lambda\mathbb{Z})$ et est elliptique donc d'image fermée. Quitte à diminuer $T_2 - T_1$, on peut donc supposer $\mathcal{L}$ injectif, et il existe une constante M telle que

$$\|u\|_{1+\rho} \leq M\|\mathcal{L}u\|_{\rho} \quad \forall u \in C_0^{1+\rho}(]T_1,T_2[\times\mathbb{R}/\Lambda\mathbb{Z}). \tag{5.2}$$

Notons $g = m(t,\lambda) - m(t,\lambda')$, $g^{\nu} = \nabla_{t,\lambda}^{\nu} m(t,\lambda) - \nabla_{t,\lambda'}^{\nu} m(t,\lambda')$.

En utilisant la formule

$$\partial_x \int F(f(x) - f(y))\mathrm{d}y = \int (\partial_x + \partial_y) F(f(x) - f(y))\mathrm{d}y = \int (f'(x) - f'(y))F'(f(x) - f(y))\mathrm{d}y$$

on obtient en dérivant (1.9)

$$\mathcal{L}(\nabla_{t,\lambda}^{\alpha} m) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{\ell=2}^{|\alpha|} (-1)^{\ell} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_\ell=\alpha \\ |\nu_j|\geq 1}} \frac{\alpha!}{\nu_1!\cdots\nu_\ell!} \fint \frac{1}{g}\frac{g^{\nu_1}}{g}\cdots\frac{g^{\nu_\ell}}{g}\mathrm{d}\lambda'. \tag{5.3}$$

On peut supposer $(T_1,T_2) = (-T,T)$; pour $0 < r < r' < T$, on choisit des fonctions de localisation $\varphi_{r,r'}(t) \in C_0^{\infty}(]-r',r'[)$ égales à 1 sur $[-r,r]$, telles que l'on ait

$$\|\varphi(t)f\|_{\rho} \leq C^{te}[\|f\|_{\rho} + \frac{1}{r'-r}\|f\|_{\rho-1}]$$

et

$$\|\varphi'(t)f\|_{\rho} \leq C^{te}[\frac{1}{r'-r}\|f\|_{\rho} + \frac{1}{(r'-r)^2}\|f\|_{\rho-1}].$$

On pose pour $k \geq 0$

$$C_k(r) = \sum_{|\beta|=k} \left\| \frac{\nabla^{\beta}}{\beta!} m; C^{1+\rho}([-r,r]\times\mathbb{R}/\Lambda\mathbb{Z}) \right\|.$$

Nous vérifierons le lemme suivant dans l'appendice B.

Lemme 5.1. *On a, avec $h = f(t,\lambda) - f(t,\lambda')$, quitte à modifier M*

$$\begin{cases} \left\| \fint \frac{1}{g}\frac{h_1}{g}\cdots\frac{h_\ell}{g}\mathrm{d}\lambda' \right\|_\rho \le M^\ell \prod_{j=1}^{\ell} \|f_j\|_{1+\rho} \\ \left\| \fint \frac{1}{g}\frac{h_1}{g}\cdots\frac{h_\ell}{g}\mathrm{d}\lambda' \right\|_{\rho-1} \le M^\ell \|f_1\|_\rho \prod_{j=2}^{\ell} \|f_j\|_{1+\rho}. \end{cases} \tag{5.4}$$

En utilisant (5.2, 5.4) et $\mathcal{L}(\varphi\nabla^\alpha m) = \varphi\mathcal{L}(\nabla^\alpha m) + \varphi'(t)\nabla^\alpha m$ on obtient pour $0 < r < r' < T$, $k \ge 2$

$$C_k(r) \le M \left[\sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_\ell=k \\ |k_j|\ge 1}} M^\ell \left(1 + \frac{1}{k(r'-r)}\right) C_{k_1}(r')\cdots C_{k_\ell}(r') \right] + \frac{M}{r'-r}\frac{1}{k}C_{k-1}(r') + \frac{M}{(r'-r)^2}\frac{1}{k^2}C_{k-2}(r'). \tag{5.5}$$

En posant $E_k = \sup_{r<T} D(T-r)^{\max(k-2,0)} C_k(r)$, on obtient en optimisant (5.5) en $r' \in]r, T[$, pour un D convenable

$$E_k \le M \left[\sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_\rho=k \\ k_j\ge 1}} E_{k_1}\cdots E_{k_\ell} + E_{k-1} + E_{k-2} \right] (k \ge 3) \tag{5.6}$$

d'où l'existence de A, B tels que

$$E_k \le AB^k \tag{5.7}$$

ce qui prouve que m est analytique.

A. L'équation de Garrett–Birkhoff

Soit u solution faible de l'équation d'Euler vérifiant les hypothèses du théorème 3. On note

$$(t,s) \mapsto (t, M(t,s)) \in \mathbb{R}^3 \tag{A.1}$$

une paramétrisation de l'hypersurface Σ, avec M de classe $C^{1+\rho_0}$ et $\|\frac{\partial M}{\partial s}(t,s)\| \equiv 1$; la variable s est une abscisse curviligne sur la courbe Σ_t ; soit

$$T(t,s) = \frac{\partial M}{\partial s}(t,s)\ ,\ N(t,s) = R_{\pi/2}(T(t,s)) \tag{A.2}$$

les vecteurs tangents et perpendiculaires unitaires à Σ_t, $R_{\pi/2}$ désignant la rotation de $\pi/2$ dans le plan. Les fonctions T et N sont de classe C^{ρ_0}.

Soit $\psi(t,x,y)$ une fonction de courant telle que

$$(u_x, u_y) = \nabla^\perp\psi = (-\partial_y\psi, \partial_x\psi). \tag{A.3}$$

D'après (1.7), on a $\Delta\psi = g\delta_{\Sigma_t}$, d'où, u étant nul à l'infini.

$$u(t,Q) = R_{\pi/2}\frac{1}{2\pi}\int \frac{Q - M(t,s)}{\|Q - M(t,s)\|^2} g(t,s)\mathrm{d}s \quad (t,Q) \notin \Sigma. \tag{A.4}$$

Soit u^+ (resp. u^-) la restriction de u à l'ouvert extérieur (resp. intérieur) défini par Σ. Les champs $u^\pm$ sont harmoniques en (x,y). En utilisant (A.4), on obtient que les traces $u^\pm|_\Sigma$ existent et sont de la forme $u^\pm|_\Sigma = A^\pm g + r^\pm$, où $A^\pm(s,\partial s)$ est un o.p.d. de degré zéro en s et où les restes $r^\pm$ sont des champs $C^{\rho_0-\varepsilon}$ sur Σ. On note alors

$$u^\pm_{//} = u^\pm|_\Sigma.T \ ; \ u^\pm_\perp = u^\pm|_\Sigma.N. \tag{A.5}$$

L'équation $\mathrm{div}(u) = 0$ entraîne $u^+_\perp = u^-_\perp \overset{\text{def}}{=} u_\perp$ et on note

$$[u_{//}] = u^+_{//} - u^-_{//} \ ; \ \langle u_{//}\rangle = \frac{1}{2}\left(u^+_{//} + u^-_{//}\right). \tag{A.6}$$

Soit v le champ de vecteur

$$v = \begin{cases} \partial_x u_x^2 + \partial_y u_x u_y \\ \partial_x u_x u_y + \partial_y u_y^2. \end{cases} \tag{A.7}$$

L'équation du tourbillon s'écrit

$$\partial_t \omega + \mathrm{rot}(v) = 0 \tag{A.8}$$

et la distribution $\mathrm{rot}(v)$ est à support dans Σ. Pour calculer $\mathrm{rot}(v)$, on suppose d'abord Σ et g de classe C^∞ et on se place dans le système de coordonnées géodésique normal $(s,\ell) \mapsto M(t,s) + \ell N(t,s)$. En notant $\rho(t,s) = \rho$ la courbure de Σ_t en s, on a

$$\mathrm{div}(\alpha T + \beta N) = \frac{1}{1-\ell\rho}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial\ell}(1-\ell\rho)\beta\right)$$

$$\mathrm{rot}(\alpha T + \beta N) = \frac{1}{1-\ell\rho}\left(\frac{\partial\beta}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial\ell}((1-\ell\rho)\alpha)\right)$$

et si $u = \alpha T + \beta N$

$$\begin{cases} v &= aT + bN \\ a &= \dfrac{1}{1-\ell\rho}[\partial_s\alpha^2 - 2\rho\alpha\beta] + \partial_\ell(\alpha\beta) \\ b &= \dfrac{1}{1-\ell\rho}[\partial_s(\alpha\beta) + \rho(\alpha^2-\beta^2)] + \partial_\ell\beta^2. \end{cases}$$

On en déduit pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \mathrm{rot}\ v, \varphi\rangle = \iint [\alpha]\beta(\nabla\varphi.N)|_{\ell=0} - \frac{1}{2}\partial_s[\alpha^2]\varphi|_{\ell=0}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s \tag{A.9}$$

où $[f] = f|_{\ell=0} - f^-_{|\ell=0}$, donc

$$\langle \mathrm{rot}\ v,\ \varphi\rangle = -\iint_\Sigma [u_{//}]\left(u_\perp\nabla\varphi.N + \langle u_{//}\rangle\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s. \tag{A.10}$$

Comme on a $[u_{//}], \langle u_{//}\rangle, u_\perp \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(t, \bigcap_p L^p)$, l'équation (A.10) reste valable sous l'hypothèse $\Sigma \in C^{1+\rho_0}, g \in L^\infty$. L'équation (A.8) est donc équivalente à

$$\iint_\Sigma [u_{//}]\mathrm{d}\varphi.\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_\perp N + \langle u_{//}\rangle T\right)\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \tag{A.11}$$

et (A.11) reste valable pour $\varphi \in C_0^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$. Il en résulte déjà

$$\frac{\partial M}{\partial t}.N = u_\perp \tag{A.12}$$

donc $u_\perp \in C^{\rho_0}$; comme $A^\pm.N$ est elliptique, on obtient $g \in C^{\rho_0-\varepsilon}$, et en réutilisant (A.4)

$$g = [u_{//}], \langle u_{//}\rangle, u_\perp \in C^{\rho_0}. \tag{A.13}$$

La section $Z = \frac{\partial}{\partial t} + u_\perp N + \langle u_{//}\rangle T$ du fibré $T\mathbb{R}^3|_\Sigma$ est tangente à Σ et (A.11) s'écrit

$$\iint g \mathrm{d}\varphi(Z) \mathrm{d}t \ \mathrm{d}s = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^3) \tag{A.14}$$

qui équivaut à

$$\mathrm{d}(g \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}s \lrcorner Z) = 0 \tag{A.15}$$

où $\lrcorner$ désigne le produit intérieur. On a $Z = \partial_t + \underline{\alpha}\partial_s$ avec $\underline{\alpha} = \langle u_{//}\rangle - \frac{\partial M}{\partial t}.T$ et d'après (A.15), il existe une fonction $\lambda(t,s)$ (sur le revêtement de Σ) telle que

$$g = \frac{\partial \lambda}{\partial s}\ , \ -\underline{\alpha} g = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \tag{A.16}$$

et d'après (A.14) $\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}\lambda = \Lambda$ est constant (invariance de la masse totale du tourbillon).

On paramètre alors Σ par (t', λ)

$$(t', \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\Lambda \mapsto m(t', \lambda) = M(t,s) \quad \lambda = \lambda(t,s), t' = t.$$

On a

$$u(t', Q) = R_{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \int \frac{Q - m(t',\lambda)}{\|Q - m(t',\lambda)\|^2} \mathrm{d}\lambda \quad (t', Q) \notin \Sigma \tag{A.17}$$

et dans le système de coordonnées $(t', \lambda), Z = \frac{\partial}{\partial t'}$.

Comme $\frac{\partial M}{\partial t} = pT + [u_\perp]N$, on obtient

$$\frac{\partial m}{\partial t'} = \frac{\partial M}{\partial t} + \underline{\alpha} T = pT + [u_\perp]N + \langle u_{//}\rangle T - pT = \langle u_{//}\rangle T + [u_\perp]N$$

d'où d'après (A.17) en notant $⨍$ la partie finie

$$\frac{\partial m}{\partial t'}(t', \lambda) = R_{\pi/2} \frac{1}{2\pi} ⨍ \frac{m(t',\lambda) - m(t',\lambda')}{\|m(t',\lambda) - m(t',\lambda')\|^2} \mathrm{d}\lambda'. \tag{A.18}$$

En identifiant le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et en notant $\bar{m}$ le complexe conjugué de m, on obtient l'équation satisfaite par Σ, paramétrée dans le système de coordonnées (t, λ)

Équation de Garrett–Birkhoff

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial t}(t, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} ⨍ \frac{\mathrm{d}\lambda'}{m(t,\lambda) - m(t,\lambda')}\ . \tag{A.19}$$

B. Les espaces C^ρ et le calcul pseudodifférentiel

Rappelons que pour $\rho \in]0,1[$, l'espace de Hölder $C^\rho(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions $u(x)$ bornées telles que la fonction $\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^\rho}$ soit bornée sur $\mathbb{R}^{2d}$, muni de la norme

$$|u|_\rho = \sup |u(x)| + \sup \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\rho}\,. \tag{B.1}$$

Pour $\rho = m+r$, $m \in \mathbb{N}, r \in]0,1[$, l'espace $C^\rho(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions $u(x)$ telles que $\partial^\alpha u \in C^r(\mathbb{R}^d)$ pour tout α tel que $|\alpha| \le m$, muni de la norme $|u|_\rho = \sup\limits_{|\alpha|\le m} |\partial^\alpha u|_r$. Pour $\rho = m+r$, $m \in -\mathbb{N}$, l'espace C^ρ est l'espace des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de la forme $u = \sum\limits_{|\alpha|\le|m|} \partial^\alpha u_\alpha$, $u_\alpha \in C^r$, muni de la norme quotient.

Rappelons la caractérisation par décomposition de Littlewood–Paley des espaces de Hölder C^ρ. Soit $c \in]1,\sqrt{2}[$ et $\phi(\zeta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction radiale vérifiant $\phi(\zeta) \equiv 1$ pour $|\zeta| \le 1/c$ et $\phi(\zeta) \equiv 0$ pour $|\zeta| \ge c$. On pose $\chi(\zeta) = \phi(\zeta/2) - \phi(\zeta)$ et pour $\lambda \ge 0$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $j \in \mathbb{N}$, en notant $\hat{f} = F(f)$ la transformée de Fourier de f

$$S_\lambda(f) = F^{-1}(\phi(2^{-\lambda}\zeta)\hat{f}(\zeta)) \tag{B.2}$$

$$\Delta_j(f) = S_{j+1}(f) - S_j(f) = F^{-1}(\chi(2^{-j}\zeta)\hat{f}(\zeta)). \tag{B.3}$$

Le support de la distribution tempérée $\widehat{\Delta_j(f)}$ est contenu dans la couronne

$$C_j = \{\zeta, |\zeta| \in [2^j/c\ ,\ c2^{j+1}]\}\,. \tag{B.4}$$

On a $C_{j+2} \cap C_j = \phi$ et la décomposition de Littlewood–Paley de $f \in \mathcal{S}'$ est

$$f = S_0(f) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j(f). \tag{B.5}$$

Les espaces de Hölder C^ρ sont caractérisés comme suit. Pour $\rho \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, il existe une constante A telle que

$$\forall f \in C^\rho \quad \Delta_j(f) \in L^\infty \text{ et } \sup_{j\ge -1} |\Delta_j(f)|_{L^\infty} 2^{j\rho} \le A|f|_\rho \tag{B.6}$$

où on a noté $S_0(f) = \Delta_{-1}(f)$. Réciproquement, si $\{u_j\}_{j\ge -1}$ est une suite de fonctions bornées vérifiant support $(\hat{u}_j) \subset C_j$ (où C_{-1} désigne la boule $\{|\zeta| \le c\}$) et $|u_j|_{L^\infty} \le M2^{-j\rho}$ pour tout j, alors la série Σu_j est convergente dans $\mathcal{S}'$, sa somme u appartient à C^ρ et on a $|u|_\rho \le A \sup\limits_{j\ge -1} 2^{j\rho}|u_j|_{L^\infty}$.

Nous utiliserons le calcul pseudodifférentiel suivant sur $\mathbb{R}^d$. Pour $\delta \in]0,1[$, $\rho_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}$ nous noterons $\sum_{\rho_0,\delta}^m$ la classe des opérateurs pseudo différentiels de symbole $p(z,\zeta)$ vérifiant

$$\forall \alpha,\beta \quad \exists C_{\alpha,\beta} \quad \forall \zeta \quad \|\partial_z^\alpha \partial_\zeta^\beta p(.,\zeta); C^{\rho_0}(\mathbb{R}_z^d)\| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\zeta|)^{m-|\beta|+\delta|\alpha|} \tag{B.7}$$

avec la quantification

$$p(z,D)f = (2\pi)^{-d} \int \mathrm{e}^{iz\zeta} p(z,\zeta)\hat{f}(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{B.8}$$

Lemme B.1. *Soit $P = p(z, D)$ dans la classe $\Sigma^m_{\rho_0,\delta}$. On a $P = P' + P''$, où l'opérateur P'' envoie C^ρ dans $\cap C^r$ pour tout ρ, et où $P' \in \Sigma^m_{\rho_0,\delta}$ est de la forme*

$$P'(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\geq -1} p'_k(z,y)\Delta_k(f(z+2^{-k}y))\mathrm{d}y \tag{B.9}$$

où la suite de fonctions $p'_k(z,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ vérifie

$$\text{i) le support de la transformée de Fourier } \widehat{p'_k}(\zeta, y) \tag{B.10}$$

$$\text{est contenu dans la boule } \left\{|\zeta| \leq \frac{c}{4}2^k\right\}$$

$$\text{ii) pour tout } \alpha,\beta,\gamma \text{ il existe } C_{\alpha,\beta,\gamma} \text{ tels que} \tag{B.11}$$

$$\forall k, \forall y \quad |\partial_z^\alpha y^\beta \partial_y^\gamma p'_k(.,y)|_{\rho_0} \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} 2^{\delta|\alpha|k} 2^{km}.$$

Démonstration. Le symbole de P' est

$$p'(z,\zeta) = \sum_{k\geq -1} \int_{\mathbb{R}^d} p'_k(z,y)\mathrm{e}^{iy2^{-k}\zeta}\chi_k(\zeta)\mathrm{d}y \tag{B.12}$$

avec $\chi_k(\zeta) = \chi(2^{-k}\zeta)$ pour $k \geq 0$ et $\chi_{-1}(\zeta) = \phi(\zeta)$, de sorte que $p'(z,\zeta)$ vérifie les estimations (B.7) d'après (B.11).

Réciproquement, si $p(z,\zeta)$ vérifie (B.7), il existe des p_k vérifiant (B.11) tels qu'on ait

$$p(z,\zeta) = \sum_{k\geq -1} \int_{\mathbb{R}^d} p_k(z,y)\mathrm{e}^{iy2^{-k}\zeta}\chi_k(\zeta)\mathrm{d}y. \tag{B.13}$$

Il suffit pour cela de choisir deux fonctions $\theta_{-1}(\zeta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \theta(\zeta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus 0)$ vérifiant $\theta_{-1}(2\zeta) \equiv 1$ au voisinage du support de $\phi = \chi_{-1}$ et $\theta(\xi) \equiv 1$ au voisinage du support de χ, et poser

$$p_{-1}(z,y) = (2\pi)^{-d} \int p(z, u/2)\theta_{-1}(u)\mathrm{e}^{-iuy}\mathrm{d}u$$

$$p_k(z,y) = (2\pi)^{-d} \int p(z, 2^k u)\theta(u)\mathrm{e}^{-iuy}\mathrm{d}u$$

(B.13) résulte alors de

$$p(z,\zeta) = \sum_{k\geq -1} p(z,\zeta)\chi_k(\zeta) = p(z,\zeta)\theta_{-1}(2\zeta)\phi(\zeta) + \sum_{k\geq 0} p(z,\zeta)\theta(2^{-k}\zeta)\chi_k(\zeta).$$

Or toute suite de fonctions C^∞ $p_k(z,y)$ vérifiant (B.11) se décompose sous la forme $p_k = p'_k + p''_k$, où p'_k vérifie (B.11) et (B.10) et où $p''_k(z,y)$ vérifie

Pour tout α,β,γ,N, il existe $C_{\alpha,\beta,\gamma,N}$ tels que

$$\forall k, \quad |\partial_z^\alpha y^\beta \partial_y^\gamma p''_k(.,y)|_{L^\infty_{(z,y)}} \leq C_{\alpha,\beta,\gamma N} 2^{-Nk}. \tag{B.14}$$

Il suffit pour cela de poser $p'_k = S_{k-2}p_k$; les opérateurs S_λ étant uniformément bornées en λ sur C^{ρ_0} et commutant aux ∂_z^α , p'_k vérifie bien (B.10) et (B.11). On a aussi

$$\begin{cases} \forall N, \beta, \gamma \quad \exists C_{N,\beta,\gamma} , \forall_j \geq 0 \quad \forall k \quad \forall y \\ \|2^{2jN} \chi_j(D_z) y^\beta \partial_y^\gamma p_k(.y)\|_{L^\infty(z)} \leq C_{N,\beta,\gamma} 2^{-j\rho_0} 2^{2Nk\delta} 2^{km}. \end{cases} \tag{B.15}$$

(Si $\hat{\psi}(\zeta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus 0)$ est égal à 1 près de la couronne C_0, et $\hat{\psi}_N(\zeta) = (\frac{-1}{|\zeta|^2})^N \hat{\psi}(\zeta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus 0)$, on a $2^{2jN} \chi_j(D_z) p_k = 2^{2jN} \hat{\psi}(2^{-j}\zeta) \chi_j(D_z) p_k = \hat{\psi}_N(2^{-j}\zeta) \chi_j(D_z) \Delta_z^N p_k$; comme $\hat{\psi}_N(2^{-j}\zeta)$ est borné uniformément en j sur L^∞ (B.15) résulte de (B.11) et (B.6).)

Comme $p''_k(z, y) = \sum_{j \geq k-2} \chi_j(D_z) p_k(z, y)$, l'équation (B.14) résulte de (B.15) et de $\delta < 1$.

Comme, pour $f \in C^\rho$, on a $|\partial_z^\alpha \Delta_k f(z + 2^{-k}y)|_{L^\infty_{(z,y)}} \leq C_\alpha 2^{k|\alpha|} 2^{-k\rho} |f|_\rho$ l'opérateur P'', défini par (B.9) avec p''_k, vérifie donc

$$\forall \alpha, \exists C_\alpha \quad |\partial_z^\alpha P''(f)|_{L^\infty} \leq C_\alpha |f|_\rho$$

donc est borné de C^ρ dans C^r pour tout couple (ρ, r). □

Il résulte du lemme précédent que pour $\rho_0 > 0$, un opérateur $P(z, D)$ dans la classe $\Sigma^m_{\rho_0,\delta}$ est borné de C^r_* dans C^{r-m}_* pour tout $r \in \mathbb{R}$, où C^r_* est l'espace de Besov (qui coïncide avec C^r pour r non entier)

$$C^r_* = \left\{ f \in \mathcal{S}', \forall_j \geq -1, \Delta_j(f) \in L^\infty \text{et} \sup_{j \geq -1} |\Delta_j(f)|_{L^\infty} 2^{j\rho} < +\infty \right\} \cdot \tag{B.16}$$

On a en effet $p'(f) = \sum_{k \geq -1} g_k$, où $g_k(z) = \int_{\mathbb{R}^d} p'_k(z, y) \Delta_k(f(z + 2^{-k}y) \mathrm{d}y$ vérifie support $(\hat{g}_k(\zeta)) \subset C'_k$, $C'_k = \{|\zeta| \in [2^k(\frac{1}{c} - c/4), 2^k(2c + c/4)]$ pour $k \geq 0$, $C'_{-1} = \{|\zeta| \leq c + c/4\}$; on a $C'_k \subset C_{k-1} \cup C_k \cup C_{k+1}$, donc $|\Delta_j(p'(f))|_\infty \leq C^{te} \sum_{|k-j| \leq 1} |g_k|_\infty \leq C^{te} 2^{jm} 2^{-jr} |f|_{C^r_*}$, car $|\Delta_k(f(z + 2^{-k}y))|_\infty = |\Delta_k(f)|_\infty$.

Comme C^{ρ_0} est une algèbre pour $\rho_0 > 0$, la formule de composition des opérateurs pseudodifférentiels,

$$p(z, D) \circ q(z, D) = r(z.D)$$

$$r(z, \zeta) = (2\pi)^{-d} \int \mathrm{e}^{-ix\theta} p(z, \zeta + \theta) q(z + x, \zeta) \mathrm{d}x \mathrm{d}\theta$$

$$r(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_\zeta^\alpha p(z, \zeta) \partial_z^\alpha q(z, \zeta) + r_{N+1}(z, \zeta) \tag{B.17}$$

$$r_{N+1}(z, \zeta) = \sum_{|\gamma| = N+1} (2\pi)^{-d} \int_0^1 (1-t)^{N+1} \mathrm{d}t \int \mathrm{e}^{-ix\theta} \frac{\theta^\gamma}{\gamma!} \partial_\zeta^\gamma p(z, \zeta + t\theta) q(z + x, \zeta) \mathrm{d}x \mathrm{d}\theta \tag{B.18}$$

implique qu'on a pour $P \in \Sigma^m_{\rho_0,\delta}$ et $Q \in \Sigma^{m'}_{\rho_0,\delta}, P \circ Q \in \Sigma^{m+m'}_{\rho_0,\delta}$ et pour tout N

$$P \circ Q - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_\zeta^\alpha p \partial_z^\alpha q(z, D) \in \Sigma_{\rho_0}^{m+m'-(N+1)(1-\delta)}. \tag{B.19}$$

(Car $\partial_\zeta^\alpha p \partial_z^\alpha q \in \Sigma_{\rho_0,\delta}^{m+m'-|\alpha|(1-\delta)}$, et $\partial_z^\alpha \partial_\zeta^\beta r_{N+1}$ est combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$J(x,\zeta) = \int_0^1 (1-t)^{N+1}\mathrm{d}t \int \mathrm{e}^{-ix\theta} \partial_\zeta^{\gamma+\beta_1} \partial_z^{\alpha_1} p(z,\zeta+t\theta) \partial_\zeta^{\beta_2} \partial_z^{\gamma+\alpha_2} q(z+x,\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$$

où l'intégrale en (x,θ) est oscillante. En utilisant $\delta < 1, (1-\Delta_\theta)^N \mathrm{e}^{-ix\theta} = (1+x^2)^N \mathrm{e}^{-ix\theta}, (1-\Delta_x)^M \mathrm{e}^{-ix\theta} = (1+\theta^2)^M \mathrm{e}^{-ix\theta}$, $(1+|\zeta+t\theta|)^\nu \leq C(1+|\zeta|)^\nu (1+|\theta|)^{|\nu|}$, on obtient en intégrant par parties dans l'intégrale définissant $J(z,\zeta)$, la propriété :

Pour tout $A > 0$ et tout p, il existe $N(p,A)$ tel que $|\alpha| + |\beta| \leq p$ et $N \geq N(p,A)$ implique

$$\|\partial_z^\alpha \partial_\zeta^\beta r_{N+1}(\cdot,\zeta)\ ;\ C^{\rho_0}(\mathbb{R}_\zeta^d\| \leq C^{te}(1+|\zeta|)^{-A}$$

ce qui prouve (B.19).)

Lemme B.2. *Soit* $P \in \Sigma_{\rho_0,\delta}^{m'}, Q \in \Sigma_{\rho_0,\delta}^{m''}$, $m = m' + m''$

i) pour $\rho_0 \in]0,1[$, *le commutateur* $[P,Q]$ *est borné de* C_*^r *dans* $C_*^{r-m+1-\nu}$ *pour tout* r *et tout* $\nu > \delta(1-\rho_0)$ *;*

ii) pour $\rho_0 > 1$, *le commutateur* $[P,Q]$ *est borné de* C_*^r *dans* C_*^{r-m+1} *pour tout* r.

Démonstration. D'après (B.19), il suffit d'étudier l'opérance des opérateurs $(\partial_\zeta^\gamma p \partial_\xi^\gamma q)(z,D) = c_\gamma(z,D)$ pour $|\gamma| \geq 1$.

Pour $\rho_0 > 1$, on a $c_\gamma(z,\zeta) \in \Sigma_{\rho_0-1,\delta}^{m-1}$, d'où ii).

Pour $\rho_0 \in]0,1[$ et $0 < t < \rho_0$ on a $\partial_\zeta^\gamma p \in \Sigma_{\rho_0-t,\delta}^{m'-|\gamma|}$ et (en utilisant l'inégalité de convexité $|f|_{\alpha\rho_1+(1-\alpha)\rho_2} \leq C|f|_{\rho_1}^\alpha |f|_{\rho_2}^{1-\alpha}$) $\partial_z^\gamma q \in \Sigma_{\rho_0-t,\delta}^{m''+\delta|\gamma|-t\delta}$, donc $c_\gamma \in \Sigma_{\rho_0-t,\delta}^{m-1+\delta(1-t)}$ d'où i) en faisant tendre t vers ρ_0. □

Si $z = (z',z''), z' \in \mathbb{R}^{d'}, z'' \in \mathbb{R}^{d''}$, nous utiliserons également des résultats d'opérance de l'opérateur $|D_{z'}|$ défini par

$$|D_{z'}|u = K * u\ ,\ \widehat{K}(\zeta) = |\zeta'| \quad \zeta = (\zeta',\zeta''). \tag{B.20}$$

On a $K = K'(z') \otimes \delta_{z''=0}$, où la distribution K' est invariante par rotation, homogène de degré $-1-d'$, donc égale à $C^{te}pf|z'|^{-(1+d')}$.

Lemme B.3. *i)* $|D_{z'}|$ *est borné de* C_*^r *dans* C_*^{r-1} *pour tout* r.

ii) Pour $\rho_0 > 0$ *et* $p(z,D) \in \Sigma_{\rho_0,\delta}^0$, *le commutateur* $[P,|D_{z'}|]$ *est borné de* C_*^r *dans* $C_*^{r-\nu}$ *pour tout* $\nu > \delta[1-\rho_0]_+$.

Démonstration.

i) On peut décomposer K' sous la forme $K' = K_0' + \ell(x')$ où $K_0' \in \mathcal{E}'$ est à support dans $|z'| \leq 1$ et $\ell \in L^1(\mathbb{R}^{d'})$. Soit $u \in C_*^r$ et $u = \sum_{-i}^\infty u_j$ la décomposition de Littlewood–Paley de u ; on a $|u_j|_\infty \leq C|u|_{C_*^r} 2^{-jr}$. La distribution tempérée $v_j = (K_0' \otimes \delta_{z''=0}) * u_j + (k \otimes \delta_{z''=0}) * u_j$ est bien définie et le support de $\hat{v}_j$ est contenu dans la couronne C_j. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\psi(\zeta) \equiv 1$ pour $|\zeta| \leq 4c$. On a $\psi(2^{-j}D)u_j = u_j$. Il suffit donc de vérifier qu'on a

$$K * 2^{jd}\hat{\psi}(2^j z) = A_j \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ et } \|A_j\|_{L^1} \leq C2^j\ .$$

La fonction $\widehat{K}$ étant homogène de degré 1, on a $A_j(z) = 2^{j(d+1)}A_0(2^j z)$ et $A_0 = A_0^1 + A_0^2$, avec

$$A_0^1 = (K_0' \otimes \delta_{z''=0}) * \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ et } A_0^2 = (\ell \otimes \delta_{z''=0}) * \hat{\psi} \in L^1,$$

d'où le résultat.

ii) On peut supposer P de la forme (B.9). Pour $f \in C_*^r$, on a

$$\Delta_k(|D_{z'}|f)(z+2^{-k}y) = (|D_z|'\Delta_k(f))(z+2^{-k}y)$$

et la fonction $v_k(z,y) = (\Delta_k(f))(z+2^{-k}y)$ vérifie $|v_k|_\infty \leq C^{te}|f|_{C_*^r}2^{-rk}$. On a

$$\left\{\begin{array}{ll} [D_{z'},P]f & = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y \sum_{k\geq -1} g_k(z,y) \\ g_k(z,y) & = |D_{z'}|p_k(z,y)v_k - p_k(z,y)|D_{z'}|v_k. \end{array}\right. \tag{B.21}$$

Comme le spectre de g_k est contenu dans C_k', il suffit de vérifier $|g_k(.,y)|_\infty \leq C^{te}|f|_{C_*^r}2^{-\rho k}(1+|y|)^{-(1+d)}$ pour $\rho < r - \delta[1-\rho_0]_+$.

D'après le point i) on a

$$g_k(z,y) = \int A_k(z-w)[p_k(w,y) - p_k(z,y)]v_k(w,y)\mathrm{d}w. \tag{B.22}$$

Il suffit donc de vérifier qu'on a, pour $\nu > \delta[1-\rho_0]_+$

$$\int |A_k(z-w)||p_k(w,y) - p_k(z,y)|\mathrm{d}w \leq C_\nu 2^{k\nu}(1+|y|)^{-(1+d)}. \tag{B.23}$$

D'après (B.11), on a

$$\left\{\begin{array}{l} |p_k(w,y)-p_k(z,y)| \leq c_\beta|w-z|^{1-\beta}(1+|y|)^{-(1+d)} \\ \text{ si } \rho_0 > 1 \text{ et } 0<\beta<1 \\ |p_k(w,y)-p_k(z,y)| \leq c_\beta|w-z|^{1-\beta}(1+|y|)^{-(1+d)}2^{k\delta(1-\beta-\rho_0)} \\ \text{ si } \rho_0 < 1 \text{ et } \rho_0 < 1-\beta < 1. \end{array}\right. \tag{B.24}$$

Comme $A_k(z) = 2^{k(d+1)}A_0(2^k z)$, l'équation (B.23) est conséquence de (B.24) et de

$$\int_{\mathbb{R}^d} |A_0(z)||z|^{1-\beta}\mathrm{d}z < \infty \quad \text{pour} \quad 0<\beta<1. \tag{B.25}$$

Démonstration du lemme 5.1. Le problème étant de nature locale, et puisqu'on sait déjà que $m \in C^\infty$, on peut supposer $g(\lambda,\lambda') = \lambda - \lambda'$ et $f_k(t,\lambda) \in C_0^{1+\rho}(R^2)$ pour $1 \leq k \leq \ell$.

Soit $f_k = \sum_{j\geq 0} f_{k,j}$ la décomposition de Littlewood–Paley de f_k (avec $f_{k,0} = (S_0 + \triangle_0)(f_k)$). Posons

$$v_{k,j}(t,\lambda,\lambda') = f_{k,j}(t,\lambda) - f_{k,j}(t,\lambda').$$

On a

$$\sum_{j\geq 0} v_{k,j} = h_k = f_k(t,\lambda) - f_k(t,\lambda').$$

Soit A l'ensemble des applications α de $\{1,...\ell\}$ dans N. On posera pour $\alpha \in A$

$$J_\alpha = \max\{\alpha(k)\}$$

$$\sigma(\alpha) = \sum \alpha(k)$$

$$\beta(\alpha) = \sigma(\alpha) - J_\alpha + 1$$

$$v^\alpha = \prod_{k=1}^{\ell} v_{k,\alpha(k)}.$$

On a alors

$$\prod_{k=1}^{\ell} h_k = \sum_{\alpha\in A} v^\alpha.$$

Lemme B.4. *Il existe une constante C_0 telle que :*
Les fonctions $\theta_{k,j}(t,\lambda,\lambda') = \frac{v_{k,j}}{\lambda-\lambda'}$ vérifient

$$|\partial^\gamma \theta_{k,j}|_{L^\infty} \leq C_0 2^{j|\gamma|} 2^{-j\rho} \|f_k\|_{1+\rho} \tag{B.26}$$

$$\left| \int |\partial_{\lambda'}\theta_{k,j}(t,\lambda,\lambda')| \mathrm{d}\lambda' \right|_{L^\infty(t,\lambda)} \leq C_0(1+j)2^{-j\rho}\|f_k\|_{1+\rho}. \tag{B.27}$$

Les fonctions $w^\alpha(t,\lambda) = pf \int \frac{v^\alpha(t,\lambda,\lambda')}{(\lambda-\lambda')^{\ell+1}} \mathrm{d}\lambda'$ vérifient

$$|w^\alpha|_{L^\infty} \leq C_0^\ell\ \beta(\alpha)\ 2^{-\sigma(\alpha)\rho} \prod_{k=1}^{\ell} \|f_k\|_{1+\rho} \tag{B.28}$$

$$|w^\alpha|_{L^\infty} \leq C_0^\ell\ \beta(\alpha)\ 2^{-\sigma(\alpha)\rho}\ 2^{J_\alpha}\ \|f_1\|_\rho \prod_{k=2}^{\ell} \|f_k\|_{1+\rho} \tag{B.29}$$

$$sp(w^\alpha) \subset \left\{ \zeta, |\zeta| \leq 2c \sum_k 2^{\alpha(k)} \right\}. \tag{B.30}$$

Démonstration. On a pour $j \geq 1$, $f_{k,j} = \varphi_j *_\lambda f_{k,j}$ avec $\varphi_j = 2^j\phi(2^j\lambda)$ pour un ϕ dans $\mathcal{S}(R)$, d'où

$$\begin{cases} \theta_{k,j} = \displaystyle\int \frac{\varphi_j(\lambda-z) - \varphi_j(\lambda'-z)}{\lambda-\lambda'} f_{k,j}(t,z)\mathrm{d}z \\ = \displaystyle\int \left(\int_0^1 \varphi_j'(\lambda + s(\lambda-\lambda') - z)\mathrm{d}s \right) f_{k,j}(t,z)\mathrm{d}z \end{cases} \tag{B.31}$$

(B.26) résulte donc de (B.31) et de

$$\|\partial^\beta_{\lambda,\lambda'} \varphi_j'(\lambda + s(\lambda-\lambda') - z)\|_{L^1(dz)} \leq C_0 2^j 2^{j|\beta|} \tag{B.32}$$

et pour obtenir (B.27), il suffit décrire $\lambda' = \lambda - \mu$ et d'utiliser

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{|\mu|\leq B} |\partial_\mu \theta_{k,j}(t,\lambda,\lambda-\mu)|\mathrm{d}\mu = \\ \displaystyle\int_{|\mu|\leq B} \mathrm{d}\mu \left| \int f_{k,j}(t,z)\mathrm{d}z (\int_0^1 s\varphi_j''(\lambda + s\mu - z)\mathrm{d}s) \right| = \\ \displaystyle\int_{|\mu|\leq B} \frac{\mathrm{d}\mu}{|\mu|} \left| \int f_{k,j}(t,z)\mathrm{d}z \left(\int_0^1 2^{2j}(\phi'(2^j\lambda + 2^j s\mu - 2^j z) - \phi'(2^j\lambda + 2^j\mu - 2^j z) \right) \right| \mathrm{d}s \\ = 2^j \displaystyle\int_{|\mu|\leq 2^j B} \frac{\mathrm{d}\mu}{|\mu|} \left| \int f_{k,j}(t, 2^{-j}z)\mathrm{d}z \left(\int_0^1 (\phi'(2^j\lambda + s\mu - z) - \phi'(2^j\lambda + \mu - z) \right) \right| \mathrm{d}s. \end{cases} \tag{B.33}$$

□

Pour vérifier (B.28), on choisit pour tout α un $m \in \{1, ..., \ell\}$ tel que $\alpha(m) = J_\alpha$ et on pose

$$\Theta^\alpha = \prod_{k \neq m} \theta_{k,\alpha(k)}. \tag{B.34}$$

On a alors

$$\begin{cases} \dfrac{v^\alpha}{(\lambda - \lambda')^{1+\ell}} = \Theta^\alpha \dfrac{v_{m,\alpha(m)}}{(\lambda - \lambda')^2} = I + II \\ I = \Theta^\alpha(t, \lambda, \lambda) \dfrac{v_{m,\alpha(m)}(t, \lambda, \lambda')}{(\lambda - \lambda')^2} \\ II = \displaystyle\int_0^1 \partial_{\lambda'}(\Theta^\alpha)(t, \lambda, \lambda + s(\lambda - \lambda')\theta_{m,\alpha(m)}(t, \lambda, \lambda')\mathrm{d}s \end{cases} \tag{B.35}$$

de sorte que (B.28) résulte de (B.26) et (B.27).

On obtient (B.29) par un argument analogue.

On a

$$⨍ \frac{1}{g} \frac{h_1}{g} \cdots \frac{h_\ell}{g} \mathrm{d}\lambda' = \sum_n H_n \tag{B.36}$$

$$H_n = \sum_{\alpha \in A_n} w^\alpha \tag{B.37}$$

$$A_n = \left\{ \alpha \in A \ : \ 2^{n-1} \leq \sum_k 2^{\alpha(k)} < 2^n \right\}. \tag{B.38}$$

On a $sp(H_n) \subset \{\zeta \, ; |\zeta| \leq c 2^{n+1}\}$, et comme on a $\rho > 0$ (5.4) sera conséquence des estimations

$$\|H_n\|_\infty \leq M^\ell 2^{-n\rho} \prod_{k=1}^{\ell} \|f_k\|_{1+\rho} \tag{B.39}$$

$$\|H_n\|_\infty \leq M^\ell 2^{-n\rho} \; 2^n \; \|f_1\|_\rho \prod_{k=2}^{\ell} \|f_k\|_{1+\rho}. \tag{B.40}$$

Or on vérifie aisément que (B.39) et (B.40) sont conséquences de (B.41) et (B.42) :

$$\sum_{\alpha \in A_n} \beta(\alpha) 2^{-\sigma(\alpha)\rho} \leq C_1^\ell \; 2^{-n\rho} \tag{B.41}$$

$$\sum_{\alpha \in A_n} \beta(\alpha) 2^{-\sigma(\alpha)\rho} \; 2^{J_\alpha} \leq C_1^\ell \; 2^n \; 2^{-n\rho} \tag{B.42}$$

Je remercie L.C. Evans qui m'a signalé que S. Wu a indépendamment obtenu des résultats similaires aux nôtres.

Références

[1] G. Birkhoff, Helmholtz et Taylor instability. *Proc. Symp. Appl. Math* **XIII.** *Amer. Math. Soc.* (1962) 55-76.
[2] C. Bardos, U. Frisch, C. Sulem et P.L. Sulem, Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin–Helmholtz instability. *CMP* **80** (1981) 485-516.
[3] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. IV* **14** (1981) 209-246.
[4] J.-M. Delort, Existence de nappes de tourbillon en dimension deux. *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991) 553-586.
[5] J. Duchon et R. Robert, Global vortex sheet solutions of Euler equation in the plane. *J. Differential Equations* **73** (1988) 215-224.
[6] G. Lebeau, *Régularité du problème de Kelvin–Helmholtz pour l'équation d'Euler 2d.* Séminaire X-EDP 2000/2001, exposé 1 (2000).