

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RAPHAËL KRIKORIAN

**Réductibilité presque partout des flots fibrés quasi-périodiques
à valeurs dans des groupes compacts**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 32, n° 2 (1999), p. 187-240

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1999_4_32_2_187_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉDUCTIBILITÉ PRESQUE PARTOUT DES FLOTS FIBRÉS QUASI-PÉRIODIQUES À VALEURS DANS DES GROUPES COMPACTS

PAR RAPHAËL KRIKORIAN

ABSTRACT. – Let us be given a compact “semi-simple” Lie group G with Lie algebra g , a regular element $A \in g$, a bounded interval $\Lambda \subset \mathbf{R}$ and a diophantine vector $\omega \in \mathbf{R}^d$; then if $F \in C^\omega(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, g)$ is small enough, ω meaning here “real analytic”, for Lebesgue-a.e. $\lambda \in \Lambda$, the quasi-periodic system $\lambda A + F(\frac{\omega_1}{2\pi}t, \dots, \frac{\omega_d}{2\pi}t)$, with frequency vector ω , is Floquet-reducible modulo some finite covering depending only on the group G . This theorem is a generalization of the one proved in [5]. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – Soient donnés un groupe de Lie compact semi-simple G d’algèbre de Lie g , un élément régulier $A \in g$, un intervalle borné $\Lambda \subset \mathbf{R}$ et un vecteur diophantien $\omega \in \mathbf{R}^d$; alors si $F \in C^\omega(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, g)$ est suffisamment petit, ω signifiant ici « analytique réel », pour presque tout $\lambda \in \Lambda$ (au sens de la mesure de Lebesgue), le système quasi-périodique $\lambda A + F(\frac{\omega_1}{2\pi}t, \dots, \frac{\omega_d}{2\pi}t)$, de vecteur de fréquence ω , est réductible au sens de Floquet, modulo un revêtement fini ne dépendant que du groupe. Ce théorème est une généralisation de celui prouvé dans [5]. © Elsevier, Paris

1. Introduction. Nous considérons, par la suite, des flots fibrés quasi-périodiques à valeurs dans des groupes de Lie compacts semi-simples, c’est-à-dire des flots de champs de vecteurs sur $\mathbf{T}^d \times G$ (où $\mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ est le tore d -dimensionnel et G un groupe compact semi-simple d’algèbre de Lie g) de la forme,

$$(1.1) \quad \dot{X}(\theta) = U(\theta)X(\theta), \quad \dot{\theta} = \frac{\omega}{2\pi},$$

avec $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbf{R}^d$ et $U \in C^\omega(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, g)$, « ω » voulant dire « analytique réel ».

Quand $d = 1$, on sait depuis Floquet que toute solution de (1.1) admet une *représentation de Floquet* de la forme $X(t) = b(t)e^{U_0 t}$ avec $b(t) = B(\frac{\omega}{2\pi}t + \bar{\theta})$, $B \in C^\omega(\mathbf{R}/T\mathbf{Z}, G)$, $U_0 \in g$ et où T vaut 1 ou 2 (1 dans le cas compact). Il est naturel de chercher une écriture semblable lorsque $d > 1$, c’est-à-dire de pouvoir donner, pour toute solution $X(t)$ de (1.1) admettant $(\bar{\theta}, Id)$ pour condition initiale en $t = 0$, une écriture

$$(1.2) \quad X(t) = B\left(\frac{\omega_1}{2\pi}t + \bar{\theta}_1, \dots, \frac{\omega_d}{2\pi}t + \bar{\theta}_d\right)e^{U_0 t},$$

avec $U_0 \in g$, $B \in C^\omega(\mathbf{R}^d/T\mathbf{Z}^d, G)$. Lorsque c’est le cas, nous disons que le champ de vecteurs $(\frac{\omega}{2\pi}, U)$ est *réductible*.

Il est équivalent d'écrire,

$$(1.3) \quad \forall \theta \in \mathbf{T}^d, U(\theta) = L_{\frac{\omega}{2\pi}} B(\theta).B(\theta)^{-1} + \text{Ad}(B(\theta)).U_0,$$

$$\text{où } L_{\frac{\omega}{2\pi}} = \sum_{i=1}^d \frac{\omega_i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \text{ et } \text{Ad}(B).U = B.U.B^{-1}.$$

Si (1.3) a lieu avec U_1, U_2 à la place de U_0 et U , nous dirons que B conjugue $(\frac{\omega}{2\pi}, U_1)$ à $(\frac{\omega}{2\pi}, U_2)$, ce que nous noterons $(\frac{\omega}{2\pi}, U_1) \mathcal{R}(B)(\frac{\omega}{2\pi}, U_2)$. Notons $(t\frac{\omega}{2\pi}, Z_t(\theta)) \in \text{Diff}^\omega(\mathbf{T}^d \times G)$, $t \in \mathbf{R}$, $Z_t(\cdot) \in C^\omega(\mathbf{T}^d, G)$, le temps t du flot associé à U , qui agit donc sur $\mathbf{T}^d \times G$ comme $(\theta, y) \mapsto (\theta + t\frac{\omega}{2\pi}, Z_t(\theta).y)$, et $(0, B) : \mathbf{T}^d \times G \rightarrow \mathbf{T}^d \times G$ l'application $(\theta, y) \mapsto (\theta, B(\theta).y)$. L'équation (1.3) est alors équivalente à

$$\left(t\frac{\omega}{2\pi}, Z_t\right) = (0, B) \circ \left(t\frac{\omega}{2\pi}, e^{tU_0}\right) \circ (0, B)^{-1},$$

c'est-à-dire est en fait à une véritable équation de conjugaison. Nous donnerons au 1.2.5 quelques rappels de résultats généraux dans ce contexte. Nous aurons besoin dans la suite de quelques rappels sur les groupes et algèbres de Lie compacts semi-simples. Dans la suite G est un tel groupe et \mathfrak{g} est son algèbre de Lie associée; nous notons, pour $u \in G$, $\text{Ad}(u)$ l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} et si $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(X)$ celle de \mathfrak{g} sur elle-même. Si $X \in \mathfrak{g}$, nous notons $e^X \in G$ l'exponentielle de X .

Si $X \in \mathfrak{g}$, il existe toujours (au moins) un tore maximal t de \mathfrak{g} contenant X , c'est-à-dire une sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{g} . Il existe alors un ensemble (fini) $\Delta \subset t^*$ de formes linéaires sur t tel que $\Delta = -\Delta$, et pour tout $\alpha \in \Delta$, un élément $X_\alpha \in \mathfrak{g}$ tel que,

- pour tout $H \in t$, $\text{ad}(H)|_t = 0$;
- pour tout $H \in t$, $\text{ad}(H).X_\alpha = \sqrt{-1}\alpha(H).X_{-\alpha}$.

Les éléments de $\Delta \subset t^*$ s'appellent les *racines*. Un élément $X \in \mathfrak{g}$ sera dit *régulier* si pour tout $\alpha \in \Delta$, $\alpha(X) \neq 0$, et *générique* si l'adhérence de $(e^{tX})_{t \in \mathbf{R}}$ est égal à e^t . Nous poserons $\tilde{q} = \#\Delta$ et $w = \#S$, où S est une base de Weyl des racines.

Nous imposerons par la suite à ω de satisfaire une *condition diophantienne* $CD(\gamma, \sigma)$:

$$(1.4) \quad \forall k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}, |(k, \omega)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma},$$

où $\gamma > 0$ et $\sigma > d - 1$ seront fixés (nous avons noté (\cdot, \cdot) le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^d et $|\cdot|$ la norme l^1).

Si $f \in C^\omega(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d)$ admet une extension holomorphe \tilde{f} à une bande $B_h = \mathbf{R}^d \oplus \sqrt{-1}(-h, h)^d$ (un tel $h > 0$ existe toujours), nous noterons, $|f|_h = \sup_{|Imz| < h} |\tilde{f}(z)|$ et écrirons $f \in C_h^\omega(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d)$. Si $f \in C^\omega(\mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2})$ est une fonction analytique réelle de deux variables $f(t_1, t_2)$ et admet une extension analytique complexe à $B_{h_1} \times B_{h_2}$, nous définirons de la même façon $|f|_{h_1, h_2}$. Si maintenant f est, par exemple, seulement C^∞ en t_2 , nous écrirons $f \in C^{\omega, \infty}$. Ceci étant nous pouvons énoncer le

1.1. Théorème. *Soient ω vérifiant la condition $CD(\gamma, \sigma)$ ci-dessus, $h > 0$, $\Lambda \subset \mathbf{R}$ un intervalle, et $A \in \mathfrak{g}$ un élément générique. Il existe alors ϵ_0 dépendant de Λ, A, ω, h , tels que si $F \in C_h^\omega(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, \mathfrak{g})$ vérifie $|F|_h \leq \epsilon_0$, alors pour presque tout $\lambda \in \Lambda$, $(\frac{\omega}{2\pi}, \lambda A + F(\theta))$ est*

réductible modulo un revêtement χ_G -fini où χ_G est un entier ne dépendant que du groupe, c'est-à-dire qu'il existe $B_\lambda \in C^\omega(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$ et un $U_\lambda \in g$ tels que,

$$(1.5) \quad (L_{\frac{\omega}{2\pi}} B_\lambda(\theta)).B_\lambda(\theta)^{-1} + \text{Ad}(B_\lambda(\theta)).(\lambda A + F(\theta)) = U_\lambda = \text{constante} \in g.$$

En outre si G est un groupe spécial unitaire $\text{SU}(w + 1)$, alors $\chi_G = 1$.

Des résultats de ce type étaient connus auparavant dans les cas $G = \text{SL}(2, \mathbf{R})$ (qui est non compact, cf. [1]) et $G = \text{SU}(2), \text{SO}(3, \mathbf{R})$ (cf. [5], chap. 6). La démonstration du théorème reprend essentiellement les idées de [5], chap. 2 et chap. 5 sur l'élimination des résonances ainsi que celles de transversalité à la Pyartli, et de (M, δ, c, r) -transversalité de [5], chap. 6. Nous avons cependant besoin de généraliser cette dernière notion (cf. section 2 et 3) comme l'a fait L.H. Eliasson dans [3].

Remerciements: L'auteur tient à remercier L.H. Eliasson, M.R. Herman, F. Laudenbach et J.C. Yoccoz pour leurs encouragements et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail (Juillet 1996).

1.2. Esquisse de la démonstration. Considérons $A \in g, F \in C_h^\omega(\mathbf{T}^d, g)$ et $t \subset g$ un tore maximal contenant A . Si Δ sont les racines par rapport à t , les valeurs propres de $\text{ad}(A)$ sont 0 avec multiplicité $\dim t$ et les $\sqrt{-1}\alpha(A), \alpha \in \Delta$. Nous parlerons souvent dans la suite, et bien que cela soit un abus de langage, des racines de A (ce qui suppose la donnée d'un tore contenant A) au lieu des parties imaginaires des valeurs propres de l'adjoint de A .

1.2.1. Méthode KAM. Définissons, si N, K désignent des réels positifs (grands), et $P \geq 1$, un entier

$$(1.6) \quad DS(N, K, P) = \left\{ \alpha \in \mathbf{R}, \forall 0 < |k| \leq N, \left| \alpha - \left(\frac{k}{P}, \omega \right) \right| > K^{-1} \right\}$$

et $RS(N, K, P)$ son complémentaire. Nous noterons $DS(N, K)$ et $RS(N, K)$ les ensembles $DS(N, K, 1)$ et $RS(N, K, 1)$. Remarquons que si $\tau > \sigma$ est fixé, nous pouvons définir plus classiquement un ensemble de nombres satisfaisant la condition diophantienne,

$$DC_\tau(N, K) = \left\{ \alpha \in \mathbf{R}, \forall 0 < |k| \leq N, \left| \alpha - (k, \omega) \right| \geq \frac{K^{-1}}{|k|^\tau} \right\};$$

on a, $DS(N, K) \subset DC_\tau(N, K) \subset DS(N, KN^\tau)$.

Les ensembles définis précédemment sont respectivement des ensembles de réels diophantiens et presque résonnants « à l'ordre N ». En outre si K est choisi suffisamment grand (de l'ordre d'une puissance de N), et si $\alpha \in RS(N, K)$, il existe un *unique* $0 < |k_0| \leq N$ tel que $|\alpha - (k_0, \omega)| \leq K^{-1}|k_0|^{-\tau} \leq K^{-1}$.

Nous introduirons par la suite de façon analogue des suites N_n, K_n tendant vers l'infini.

Nous voulons à présent conjuguer $A_1 + F_1 = A + F, F_1$ étant supposée petite, à $A_2 + F_2$ avec $A_2 \in g$ et $F_2 \in C_{h_2}^\omega(\mathbf{T}^d, g)$ bien plus petite que F_1 (typiquement $|F_2|_{h_2} \simeq |F_1|_{h_1}^{1+\beta}$), par une conjugaison $B = e^Y$ proche de l'identité (i.e. $Y \in C^\omega(\mathbf{T}^d, g)$ proche de 0). Il s'agit donc de résoudre,

$$(1.7) \quad L_{\frac{\omega}{2\pi}} e^Y . e^{-Y} + \text{Ad}(e^Y).(A_1 + F_1) = A_2 + F_2,$$

ce que l'on fait de façon approchée en résolvant l'équation linéarisée,

$$(1.8) \quad -L_{\frac{\omega}{2\pi}} Y + \text{ad}(A_1).Y = T_{N_1} F_1 - \hat{F}_1(0),$$

(où on a noté $T_N F$ la troncature de la série de Fourier de F à l'ordre N) et en posant

$$(1.9) \quad A_2 = A_1 + \hat{F}_1(0).$$

Passant en composantes de Fourier, on voit que l'on peut résoudre l'équation (1.8) avec de bonnes estimations sur Y si l'on sait par exemple que

$$(1.10) \quad \forall \alpha \in \Delta, \quad \alpha(A_1) \in DS(N_1, K_1),$$

(nous noterons alors $A_1 \in DS(N_1, K_1)$). On obtient alors A_2, F_2 avec les propriétés désirées. Si de même, $A_2 \in DS(N_2, K_2)$, on peut construire A_3, F_3 avec F_3 beaucoup plus petite que F_2 et ainsi de suite. Pour que cette procédure de récurrence fonctionne, il faut qu'à chaque étape, $A_n \in DS(N_n, K_n)$, ce qui n'est même pas assuré à la première étape. Pour remédier à ce problème il suffit de plonger A_1 dans une famille $A_1(\lambda)$ à un paramètre $\lambda \in \Lambda$ telle que,

$$(1.11) \quad \forall \alpha \in \Delta, \quad |\partial_\lambda \alpha(A_1(\lambda))| \geq \chi_1 > 0,$$

χ_1 n'étant pas trop petit. On peut ainsi, quitte à enlever à la première étape une union d'intervalles de Λ de mesure petite, obtenir les conditions (1.10). A_2 , qui dépend de λ , vérifie alors pour les λ qui restent une estimation semblable à (1.11). On peut alors itérer cette procédure, enlevant à chaque étape une union d'intervalles de mesure de plus en plus petite. Comme lors de la procédure, les Y_n qui sont de l'ordre de F_n décroissent très vite, les conjugaisons $e^{Y_{n-1}} \dots e^{Y_1}$ qui conjuguent le système initial $\lambda A + F(\theta)$ à un système $A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \theta)$ convergent vers un $B_\lambda(\theta)$. Il est alors facile de voir, si $A_\infty(\lambda)$ est la limite des $A_n(\lambda)$ pour λ dans l'ensemble des paramètres décrits plus haut, que B_λ conjugue $\lambda A + F$ à $A_\infty(\lambda)$. On démontre de cette façon un théorème en mesure positive sur les λ : *Si la perturbation F est suffisamment petite, l'ensemble des λ pour lesquels $(\frac{\omega}{2\pi}, \lambda A + F)$ est non réductible est de mesure d'autant plus petite que la perturbation est petite.*

Il est clair que pour obtenir un résultat pour presque tout $\lambda \in \Lambda$ il faut savoir traiter le cas où à la n -ième étape $A_n \in RS(N_n, K_n)$.

1.2.2. Elimination des résonances. Supposons que $A_1 \in RS(N_1, K_1)$. L'idée est de trouver un $B \in C^\omega(\mathbf{T}^d, G)$ qui conjugue $A_1 + F_1$ à un système $\tilde{A}_1 + \tilde{F}_1$ où \tilde{A}_1 est désormais diophantien. Illustrons la tout d'abord dans le cas où le groupe G égale $SO(3, \mathbf{R})$. Dans ce cas un élément $A \in \mathfrak{g}$ n'a que deux racines $\pm \alpha(A)$. Comme l'a montré L.H. Eliasson dans [2] (cf. aussi [1]), le choix de B qui s'impose, quand $A_1 \in SO(3, \mathbf{R})$ vérifie la condition de résonance $|\alpha(A_1) - (k_0, \omega)| \leq K_1^{-1}$, est $B_1(\theta) = e^{-2\pi(k_0, \theta)(\frac{A_1}{|A_1|})}$.

Vu que B est à valeurs dans un tore maximal et commute à A , l'expression

$$\tilde{A}_1 = L_{\frac{\omega}{2\pi}} B_1(\theta) \cdot B_1(\theta)^{-1} + \text{Ad}(B_1(\theta)) \cdot (A_1),$$

est constante en θ et vérifie $\alpha(A_1) = \alpha(A) - (k_0, \omega)$.

Or maintenant, $\alpha(A_1)$ est proche de 0 et donc « suffisamment loin » des (k, ω) pour $0 < |k| \leq N_1$ (pour un choix convenable de K_1). Il est donc diophantien. Par ailleurs le terme $\tilde{F}_1 = \text{Ad}(B_1(\theta)) \cdot F_1(\theta)$ reste petit. Il est donc possible d'appliquer la méthode décrite dans la section précédente pour obtenir $A_2 + F_2(\theta)$, avec $F_2(\theta)$ beaucoup plus petit que F_1 , conjugué à $\tilde{A}_1 + \tilde{F}_1(\theta)$ – et donc à $A_1 + F_1(\theta)$ – par une conjugaison de

la forme $e^{\tilde{Y}_1}$. On a alors $A_2 = \tilde{A}_1 + \hat{F}_1(0)$. Malheureusement la conjugaison B_1 n'est pas proche de l'identité, si bien que les conjugaisons obtenues ainsi à la n -ième étape $e^{\tilde{Y}_{n-1}}B_{n-1} \cdots e^{\tilde{Y}_1}B_1$ n'ont aucune chance de converger si le nombre de B_i est infini (cf. section 2 « Transversalité »). La situation dans le cas d'un groupe compact général est plus compliquée du fait d'éventuelles résonances entre les racines. En particulier il n'est pas toujours possible de trouver un $B \in C^\omega(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, t_A)$ (t_A étant un tore maximal passant par A) qui conjugue A_1 à un \tilde{A}_1 diophantien. Cependant, quitte à affaiblir la condition diophantienne sur A_1 , il est toujours possible de trouver un $B \in C^\omega(\mathbf{R}^d, t_A)$ avec les propriétés désirées, à condition d'accepter que B , au lieu d'être \mathbf{Z}^d -périodique, soit seulement $P\mathbf{Z}^d$ -périodique (P entier plus grand que 1).

Plus précisément, comme nous l'avons montré dans [5] chap. 5, il est toujours possible de trouver un réel $a > 1$, un entier $D \geq 1$ ne dépendant que du groupe, un entier p , $0 \leq p \leq q$ (où q est le nombre de racines de l'algèbre \mathfrak{g}) et une conjugaison B_1 analytique à valeurs dans un tore t contenant A_1 , tels que, \tilde{A}_1 défini par

$$\tilde{A}_1 = L_{\frac{\omega}{2\pi}} B_1(\theta).B_1(\theta)^{-1} + \text{Ad}(B_1(\theta)).(A_1),$$

vérifie $\tilde{A}_1 \in DS(a^{p+1}N_1, K_1, D^{p+1})$. Précisons que,

- B_1 est de la forme,

$$(1.15) \quad B_1(\theta) = \exp\left(-\sum_{i=1}^w (x_i, \theta) H_i\right),$$

où les $x_i \in D^{-(q+1)}\mathbf{Z}^d$, $H_i \in t_A$.

- B_1 est nécessairement loin de l'identité;
- B_1 peut être $c_G.D^{q+1}\mathbf{Z}^d$ -périodique (c_G étant le cardinal du centre de G), tandis que F_2 peut être $D^{q+1}\mathbf{Z}^d$ -périodique.
- dans le cas $G = \text{SU}(w+1)$, on a $D = 1$ et il n'y a donc pas de perte de périodicité à chaque étape.

On peut donc ainsi construire à la n -ième étape des suites $\tilde{A}_n, \tilde{F}_n, A_{n+1}, F_{n+1}$ telles que,

$$(1.16) \quad A_{n+1} = \tilde{A}_n + \tilde{F}_n(0),$$

et $|F_n|_{h_n} \simeq e^{-(1+\beta)^n}$.

Faisons les remarques importantes suivantes:

- a) le produit des conjugaisons permettant de conjuguer $A_1 + F_1$ à $A_n + F_n$ n'a aucune raison de converger;
- b) à la n -ième étape $A_n + F_n$ est seulement $D^{(q+1)(n-1)}\mathbf{Z}^d$ -périodique.

En fait la procédure d'élimination des résonances décrite précédemment est insuffisante pour notre propos mais on peut l'améliorer un peu de façon à obtenir:

- c) quitte à choisir $D' > D$, on peut toujours supposer que si $\alpha(A_1)$ et $\alpha'(A_1)$ sont proches pour deux racines α, α' , il en est de même de $\alpha(\tilde{A}_1)$ et $\alpha'(\tilde{A}_1)$.

Ainsi même dans le cas $G = \text{SU}(w+1)$ on ne peut éviter la perte de périodicité.

Comme le résultat que nous voulons obtenir concerne des familles à un paramètre, il est important d'étudier la dépendance des racines des $A_n(\lambda), \tilde{A}_n(\lambda)$ en fonction de λ .

1.2.3. Dépendance des racines en fonction du paramètre.

1.2.3.1. Transversalité. Comme nous l'avons remarqué dans [5] chap. 6, on ne peut pas espérer garder un contrôle facile (comme celui qu'on avait dans la section 1.2.1) des racines après une résonance. Ainsi dans le cas $SO(3)$, si à la n -ième étape les racines, qui sont $\pm\alpha_n(\lambda)$, ont leurs dérivées *premières* qui ne s'annulent pas, à la $(n+1)$ -ième étape et après résonance, on peut seulement dire que les dérivées *secondes* de $\pm\alpha_{n+1}(\lambda)$ ne s'annulent pas. Nous désignerons ceci comme la *perte de transversalité*. La notion de transversalité naturelle pour les fonctions numériques est alors la suivante: une fonction f est r -transverse (r entier ≥ 0) si au moins une des dérivées $f^{(j)}$, $0 \leq j \leq r$, n'est pas trop petite.

Nous aurons besoin par la suite d'une notion de transversalité pour des ensembles de zéros (ou racines) de polynômes dépendant d'un paramètre $\lambda \in \Lambda$ ou plus généralement pour des unions disjointes finies $\Sigma(\lambda)$ de points de \mathbf{R} de cardinal inférieur à q (des diviseurs positifs de \mathbf{R} de degré inférieur à q). Ainsi $\Sigma(\lambda)$ sera transverse à l'ordre r si pour tout u dans un 1-voisinage de $\Sigma(\Lambda)$ la fonction définie sur l'intervalle Λ : $\lambda \mapsto \prod_{\sigma \in \Sigma(\lambda)} (u - \sigma) = \chi_{\Sigma(\lambda)}(u)$ (où nous avons noté χ_{Σ} le polynôme caractéristique de Σ) est une fonction r -transverse. Cette notion de transversalité jouit de propriétés très simple. Introduisons tout d'abord la définition suivante: une décomposition $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ est une décomposition ν -séparée de $\Sigma(\lambda)$, si pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $(\sigma_i, \sigma_j) \in \Sigma_i \times \Sigma_j$ ($i \neq j$), $|\sigma_i - \sigma_j| \geq \nu$. Nous appellerons les Σ_i , les *amas* de la décomposition. Les propriétés importantes sont alors les suivantes.

- (i) Si $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ une décomposition ν -séparée, alors si $\Sigma(\lambda)$ est r -transverse il en est de même des $\Sigma_i(\lambda)$;
- (ii) Si $\Sigma_1(\lambda), \dots, \Sigma_l(\lambda)$ sont respectivement r_1, \dots, r_l transverses, $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ est $r_1 + \dots + r_l$ -transverse.
- (iii) Soient $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_2(\lambda)$ une décomposition ν -séparée, et $\Sigma'_1(\lambda), \dots, \Sigma'_l(\lambda)$ tels que

$$\chi_{\Sigma'_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma'_l(\lambda)} - \chi_{\Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)}$$

soit suffisamment petit (vu comme application de Λ dans l'espace des polynômes de degré q); alors si $\Sigma_1(\lambda), \dots, \Sigma_l(\lambda)$ sont r_1, \dots, r_l -transverses, il en est de même de $\Sigma'_1(\lambda), \dots, \Sigma'_l(\lambda)$.

Comme dans [5] chap. 6, l'obtention de bonnes estimations de transversalité repose sur le fait que r_n (l'ordre de transversalité à la n -ième étape de la récurrence) croît extrêmement lentement.

1.2.3.2. Le phénomène d'accrétion des racines.

Notons $\Sigma_n(\lambda)$ les racines de $A_n(\lambda)$ à la n -ième étape, fixons ν_n tel que, $\epsilon_n \ll \nu_n \ll K_n^{-1}$ et séparons $\Sigma_n(\lambda)$ en amas $\Sigma_{n,1}(\lambda), \dots, \Sigma_{n,l_n}(\lambda)$ ν_n -séparés. Nous supposons pour simplifier que chacun des $\Sigma_{n,j}$ est r_n -transverse. Le fait que ν_n soit choisi très petit par rapport à K_n^{-1} permet de considérer chacun des amas $\Sigma_{n,j}$ comme une racine multiple. En particulier, en vertu de la remarque c) faite au paragraphe 1.2.2, tant que $K_{n+k}^{-1} > \nu_n$, les éléments d'un $\Sigma_{n,j}$ suivent la même évolution au cours des procédures décrites en 1.2.1 et 1.2.2.

Examinons ce qui se passe lors du passage de l'étape n à l'étape $n+1$.

- soit $l_n = l_{n+1}$ et chacun des amas reste ν_n -séparé des autres, ce qui implique que chacun des $\Sigma_{n+1,j}$ reste r_n -transverse;

- soit certains amas s'agglutinent et on obtient $l_{n+1} < l_n$ amas à peu près ν_n -séparés. On dit alors qu'il y a *accrétion des racines*. Chacun des $\Sigma_{n+1,j}$ provenant de l'accrétion d'au plus q des $\Sigma_{n,j}$, est au plus qr_n -transverse.

Par ailleurs tant que $K_{n+k}^{-1} > \nu_n$, le phénomène d'accrétion ne peut avoir lieu qu'au plus q fois, jusqu'à accrétion éventuelle de toutes les racines; ainsi, si s_n est tel que $K_{n+s_n}^{-1} > \nu_n$, pour tout $k \leq s_n$, $r_{n+k} \leq q^k r_n$. Vu que s_n est très grand, ceci montre que r_n croît extrêmement lentement. On obtient donc des estimations de transversalité exploitables.

1.2.4. Théorème en mesure positive et transversalité. Nous obtenons donc à la n -ième étape un système $(\frac{\omega}{2\pi}, A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \cdot))$ qui est défini sur $\mathbf{R}^d / D^{(q+1)(n-1)} \mathbf{Z}^d \times G$ où F_n est très petit et les valeurs propres de $\text{ad}(A_n(\lambda))$ satisfont de bonnes conditions de transversalité. On peut en fait contrôler le discriminant du polynôme caractéristique de $\text{ad}(A_n)$. Ceci entraîne en particulier qu'en dehors d'une union d'intervalles de mesure petite, les valeurs absolues des dérivées premières des valeurs propres de $\text{ad}(A_n(\lambda))$ sont minorées par une constante positive. Sous cette dernière condition le théorème en mesure positive mentionné en 1.2.1 s'applique et permet de démontrer que l'ensemble des λ pour lesquels $A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \cdot)$ est réductible sur $\mathbf{R}^d / D^{(q+1)(n-1)} \mathbf{Z}^d \times G$ est de mesure comparable à une puissance de la norme de F_n . Or cette dernière décroît très vite. Par conséquent: *l'ensemble des λ pour lesquels $\lambda A + F(\theta)$ est réductible sur $\mathbf{R}^d / P_\lambda \mathbf{Z}^d \times G$ (P_λ entier dépendant de λ) est de mesure totale.* Il reste enfin à démontrer que la réductibilité a en fait lieu sur $\mathbf{R}^d / \mathbf{Z}^d \times G$ ce qui s'effectue comme dans [5] chap. 5 (cf. aussi 1.2.5).

Utilisant les résultats de la section précédente, on peut donc démontrer le théorème dans le cas $G = \text{SU}(w+1)$.

1.2.5. Cas général. Le groupe G étant supposé compact, il admet une représentation fidèle ρ dans un $\text{U}(L)$. On peut supposer que $\rho(\lambda A)$ vérifie des hypothèses de transversalité et donc affirmer que pour presque toute valeur de λ , $\lambda A + F$ est C^ω -réductible dans $\text{U}(w+1)$. Mais ceci entraîne que le flot engendré par $(\frac{\omega}{2\pi}, \lambda A + F)$ sur $\mathbf{T}^d \times G$ est compact pour la C^∞ -topologie. Rappelons alors le résultat suivant (cf. [5] chap. 2): Reprenons les notations du 1.

1.2.5.1. Théorème. *Si $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbf{R}^d$ est minimal, G est un groupe compact et si la famille des difféomorphismes $(t \frac{\omega}{2\pi}, Z_t) \in \text{Diff}^\infty(\mathbf{R}^d / \mathbf{Z}^d \times G)$, $t \in \mathbf{R}$ est relativement compacte en topologie C^∞ , alors il existe un entier χ_G ne dépendant que du groupe, un $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d / \chi_G \mathbf{Z}^d)$ et un U_0 tels que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}^d$ l'équation (1.3) est vérifiée. Si G est un groupe spécial unitaire $\chi_G = 1$.*

Le système $(\frac{\omega}{2\pi}, U)$ est donc C^∞ -réductible sur $\mathbf{R}^d / \chi_G \mathbf{Z}^d \times G$. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 de [5] pour une démonstration. Revenant à notre problème, on peut donc dire que pour presque toute valeur de λ , $\lambda A + F$ est C^∞ -réductible dans G , modulo un revêtement χ_G -fini.

A présent, dans $\text{U}(w+1)$ nous disposons de deux conjugaisons, disons B_1, B_2 qui réduisent le même système, B_1 étant analytique à valeurs dans $\text{U}(L)$ et B_2 lisse à valeurs dans G . Nous utilisons à présent le résultat suivant dont la démonstration repose sur l'étude des centralisateurs des systèmes produits croisés (cf. [5] chap. 2).

1.2.5.2. Proposition. *Avec les notations du 1, si $U_0 \in g$, $U \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ et $B_1, B_2 \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ vérifient, $(\frac{\omega}{2\pi}, U_0) \mathcal{R}(B_i)(\frac{\omega}{2\pi}, U)$ pour $i = 1, 2$, alors, $B_2(\theta).B_1(\theta)^{-1}$ est un morphisme de tore, et est donc en particulier analytique.*

La conclusion du théorème est alors immédiate: $B_1.B_2^{-1}$ est analytique (c'est un morphisme de tores); B_1 l'étant également, B_2 , c'est-à-dire la conjugaison dans G , est aussi analytique (mais seulement $\chi_G \mathbf{Z}^d$ -périodique).

Ceci est la démonstration du théorème.

1.3. Plan. Le plan de la démonstration sera donc le suivant.

Nous introduirons tout d'abord les notions de transversalité dont nous aurons besoin ainsi que leurs propriétés, pour les fonctions numériques dans la section 2 dans un premier temps puis pour les racines de polynômes dans la section 3. Après avoir fait quelques rappels élémentaires d'algèbre linéaire au 4, nous décrivons au 5 la procédure d'élimination des résonances, ce qui nous permet de donner les lemmes fondamentaux de conjugaison et de préciser la façon dont la transversalité des racines est affectée du fait d'une résonance dans la section 6. La section 7 est consacrée à la mise en oeuvre de la procédure de récurrence et fournit toutes les estimations dont nous avons besoin, en particulier en ce qui concerne la transversalité. Ceci nous permet, dans la section 9, de démontrer le théorème dans le cas $G = \text{SU}(w + 1)$, après avoir utilisé un théorème en mesure positive au 8. La section 10 enfin conclut la démonstration du théorème dans le cas général.

N.B.: Dans ce qui suit, certaines formules font intervenir des constantes b, κ dont les valeurs peuvent changer d'une ligne à la suivante, ceci afin de ne pas alourdir les notations.

2. Transversalité. Nous généralisons dans cette section la notion de transversalité que nous avons introduite dans [5] chap. 6 en suivant Pyartli [6]. Nous modifions cependant, comme dans [3], légèrement les définitions.

2.1. Définition. Une fonction $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ est dite (C, c, r) -Pyartli, si f est de classe C^{r+1} et si pour tout $x \in (a, b)$,

$$(i) \quad \sup_{0 \leq j \leq r+1} |\partial^j f(x)| \leq C, \quad (ii) \quad \sup_{0 \leq j \leq r} |\partial^j f(x)| \geq c > 0.$$

Nous avons alors le lemme suivant (adapter les démonstrations des lemmes de la section 6.4 de [5] chap. 6):

2.2. Lemme. Si f est (C, c, r) -Pyartli sur (a, b) ($r \geq 1$) alors pour tout $0 < \chi < c$, l'ensemble $\{\lambda \in (a, b), |f(\lambda)| > \chi\}$ a au plus $(2r((b-a)\frac{C}{c} + 1))$ composantes connexes et la mesure de Lebesgue de $\{\lambda \in (a, b), |f(\lambda)| \leq \chi\}$ est plus petite que $(2r(b-a)\frac{C}{c} + 1)2^{r+2}(\frac{\chi}{c})^{\frac{1}{r}}$. Le même résultat vaut (si $0 < \chi < c$) avec f' (la dérivée de f) à la place de f .

L'intérêt de prendre, dans le (ii) de la définition 2.1, le sup pour $0 \leq j \leq r$, vient du fait que la notion de transversalité ainsi définie est stable par multiplication. Cependant, avant d'aller plus loin, nous introduisons, de façon semblable à [5] chap. 6, une définition un peu plus forte de transversalité qui permet de contrôler une infinité de dérivées.

2.3. Définition. Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction analytique réelle, nous dirons que f est (M, δ, c, r) -transverse si:

- (i) $f \in C_\delta^\omega(a, b)$ et $|f|_\delta \leq M$.
- (ii) pour tout $x \in (a - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2})$, $\sup_{0 \leq j \leq r} |\partial^j f(x)| \geq c > 0$.

Quand seule l'inégalité (i) a lieu nous disons que f est (M, δ) -bornée.

Les lemmes importants sont alors les suivants: tout d'abord le lemme 2.4 dit qu'un produit de fonctions transverses est transverse; le lemme 2.5 quant à lui montre que si un produit de fonctions « pas trop grandes » est transverse, alors chacune d'entre elles l'est également.

2.4. Lemme. *Soient f_1, \dots, f_l des fonctions $(M_i, \delta_i, c_i, r_i)$ -transverses. Posons $M = \sup M_i$, $\delta = \inf \delta_i$, $c = \inf c_i$ et $r = r_1 + \dots + r_l$. Alors $f = f_1 \cdots f_l$ est (M', δ, c', r) transverse, avec:*

$$M' = M^l, \quad c' = \left(\left(\frac{\delta}{4r^2 M} \right)^{rl} c \right)^{l^{r+1}}.$$

Remarquons que dans le cas où les f_i sont égales on obtient une estimation bien meilleure sur c' (cf. [5] chap. 6).

Démonstration (cf. [3]). – Supposons qu'au point $t \in (a, b)$, et pour des j_i , $0 \leq j_i \leq r_i$,

$$|\partial^{j_i} f_i(t)| \geq c_i > 0.$$

Alors d'après la formule de Leibniz, pour $k = j_1 + \dots + j_l \leq r$,

$$\begin{aligned} \partial^k f(t) &= \sum_{k_1 + \dots + k_l = k} \binom{k}{k_1 \dots k_l} \partial^{k_1} f_1(t) \cdots \partial^{k_l} f_l(t), \\ (3) \quad &= \binom{k}{j_1 \dots j_l} \partial^{j_1} f_1(t) \cdots \partial^{j_l} f_l(t) + \Sigma', \end{aligned}$$

où Σ' est la somme étendue aux k_1, \dots, k_l tels que $k_1 + \dots + k_l = k$ et $|k_1 - j_1| + \dots + |k_l - j_l| \geq 1$. Si Σ' est $< \binom{k}{j_1 \dots j_l} c^l / 2$ le résultat est démontré. Sinon il existe un (k_1, \dots, k_l) tel que $k_1 + \dots + k_l = k$, $|k_1 - j_1| + \dots + |k_l - j_l| = 2s \geq 1$, et:

$$\binom{k}{k_1 \dots k_l} |\partial^{k_1} f_1(t) \cdots \partial^{k_l} f_l(t)| \geq \binom{k}{j_1 \dots j_l} \frac{c^l}{2} \frac{1}{r^l},$$

c'est-à-dire,

$$|\partial^{k_1} f_1(t) \cdots \partial^{k_l} f_l(t)| \geq \binom{k_1 \dots k_l}{j_1 \dots j_l} \frac{c^l}{2} \frac{1}{r^l} \geq \frac{1}{r^s} \frac{c^l}{2} \frac{1}{r^l},$$

puisque,

$$\frac{1}{r^s} \leq \binom{k_1 \dots k_l}{j_1 \dots j_l} \leq r^s.$$

Comme $s \leq rl$ et $|\partial^{k_i} f_i(t)| \leq \frac{M}{(\delta/2)^{k_i}}$, on a pour tout i ,

$$|\partial^{k_i} f_i(t)| \geq \frac{1}{r^{rl}} \frac{c^l}{2} \frac{1}{r^l} \frac{(\delta/2)^r}{M^l}.$$

Par conséquent, si on pose $\tilde{k}_i = \min(k_i, j_i)$ on aura la même inégalité, et on a $\sum \tilde{k}_i < \sum k_i$; on peut alors recommencer. Le processus s'arrête forcément au bout d'au plus r étapes auquel cas $\tilde{k}_{i,r} = 0$ et on récupère une estimation pour $f(t) = \prod f_i(t)$. Ainsi dans tous les cas pour un $(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_l)$ tel que $\tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_l \leq r$ on conclut

$$|\partial^{\tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_l} f(t)| \geq \left(\frac{1}{r^{rl}} \frac{(\delta/4)^r}{(rM)^l} c \right)^{l^{r+1}}. \quad \square$$

2.5. Lemme.. Soient f_1, \dots, f_l des fonctions dans $C_\delta^\omega(\Lambda)$ telles que $|f_i|_\delta \leq M$. Alors si $f = f_1 \cdots f_l$ est (M, δ, c, r) -transverse, chaque f_i est (M, δ, c', r) -transverse avec $c' = \left(\frac{2lM}{\delta}\right)^{-rl} c$.

Démonstration. – Montrons le pour f_1 . Pour $0 \leq k \leq r$,

$$\partial^k f(t) = \sum_{k=k_1+\dots+k_l} \binom{k}{k_1 \dots k_l} \partial^{k_1} f_1(t) \cdots \partial^{k_l} f_l(t),$$

c'est-à-dire,

$$|\partial^k f(t)| \leq \max_{i, 0 \leq j \leq k} |\partial^j f_i(t)| \sum_{k=k_1+\dots+k_l} \binom{k}{k_1 \dots k_l} \leq l^k M^l \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-kl} \max_{i, 0 \leq j \leq k} |\partial^j f_i(t)|.$$

Vu que par hypothèse $\sup_{0 \leq k \leq r} |\partial^k f(t)| \geq c > 0$, on conclut

$$\sup_{0 \leq k \leq r} |\partial^k f_1(t)| \geq c \cdot \left(l^r M^l \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-rl} \right)^{-1}. \quad \square$$

3. Racines d'une équation algébrique. Dans la suite nous considérons des polynômes de $\mathbf{C}[X]$ de la forme $\chi = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$, $n \leq q$. Nous munirons $\mathbf{C}_q[X]$ (les polynômes de degré inférieur ou égal à q) de la norme sup sur les coefficients: $|\chi| = \sup_{1 \leq i \leq q} |a_i|$. Par la suite les polynômes que nous considérerons auront les propriétés suivantes: (i) ils dépendront analytiquement d'un paramètre réel $\lambda \in \Lambda$ (c'est-à-dire que leurs coefficients dépendront analytiquement de λ); (ii) leurs racines pour $\lambda \in \Lambda$ sont également réelles. Cependant comme les coefficients admettent une extension holomorphe à un voisinage de Λ dans \mathbf{C} nous serons amenés à considérer des valeurs complexes de λ pour lesquelles les racines sont complexes. Ainsi si les a_i dépendent analytiquement de $\lambda \in \Lambda$ réel, nous dirons que $\chi(\lambda)(X)$ est dans $C_\delta^\omega(\Lambda, \mathbf{R}_q[X])$ si les coefficients a_i sont dans C_δ^ω et nous poserons,

$$(3.1) \quad |\chi|_\delta = \sup(|a_i|_\delta).$$

Si $\chi_{\Sigma}(X) = \prod_{i=1}^k (X - z_i)^{\beta_i}$, avec $\beta_1 + \cdots + \beta_k = m$ ($z_i \neq z_j$), nous désignerons par Σ_χ l'ensemble des racines (zéros) de χ comptées avec multiplicités, c'est-à-dire l'union disjointe des $z_1, \dots, z_1, \dots, z_k, \dots, z_k$; on peut aussi voir Σ_χ comme un diviseur positif de \mathbf{C} de degré m et on écrira $\Sigma_\chi \in \text{Div}_m^+(\mathbf{C})$. Si on note

$$(3.2) \quad \rho_j = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_j \\ \tau_{i_j} \in \Sigma_\chi}} \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_j},$$

les fonctions symétriques élémentaires en les racines, on a $a_j = (-1)^{n-j} \rho_j$. Rappelons que si $P(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbf{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ est un polynôme symétrique en les σ_i , il s'écrit sous la forme, $P(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = Q(\rho_1, \dots, \rho_n)$, $Q \in \mathbf{C}[\rho_1, \dots, \rho_n]$. Un cas particulier du résultat précédent concerne les formules dites de Newton: si $\pi_j = \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma^j$, alors,

$$(3.3) \quad \rho_j = \frac{(-1)^j}{j!} \det \begin{pmatrix} \pi_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \pi_2 & \pi_1 & 2 & 0 & \dots \\ \pi_3 & \pi_2 & \pi_1 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_j & \pi_{j-1} & \pi_{j-2} & \pi_{j-3} & \dots \end{pmatrix}.$$

Si $\Sigma \subset \text{Div}^+(\mathbf{C})$ est de degré fini nous poserons,

$$(3.4) \quad \chi_\Sigma = \prod_{\sigma \in \Sigma} (X - \sigma);$$

c'est le polynôme caractéristique de Σ .

Soient à présent deux polynômes $\chi_1(X), \chi_2(X)$ de degré respectif m_1, m_2 dans $\mathbf{C}[X]$; leur *résultant* est par définition,

$$(3.5) \quad \text{Res}(\chi_1, \chi_2) = \prod_{\substack{\sigma_i \in \Sigma_{\chi_1} \\ \tau_j \in \Sigma_{\chi_2}}} (\sigma_i - \tau_j), = \prod_{\sigma_i \in \Sigma_{\chi_1}} \chi_{\Sigma_2}(\sigma_i), = (-1)^{m_2} \prod_{\tau_j \in \Sigma_{\chi_2}} \chi_{\Sigma_1}(\tau_j).$$

C'est un polynôme en les coefficients de χ_1, χ_2 nul si χ_1, χ_2 ont des racines communes et c'est aussi le déterminant de l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{C}_{m_2}[X] \times \mathbf{C}_{m_1}[X] &\rightarrow \mathbf{C}_{m_1+m_2}[X], \\ (U, V) &\mapsto \chi_1 U + \chi_2 V. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\chi_1(X) = X^{m_1} + a_1 X^{m_1-1} + \dots + a_{m_1}$ et $\chi_2(X) = X^{m_2} + b_1 X^{m_2-1} + \dots + b_{m_2}$, $\text{Res}(\chi_1, \chi_2)$ est un déterminant ayant pour coefficients les a_i, b_j . Si $u \in \mathbf{C}$ nous poserons

$$\text{Res}(\chi_1, \chi_2; u) = \text{Res}(\chi_1(X), \chi_2(X - u)).$$

On a donc $\text{Res}(\chi_1, \chi_2; 0) = \text{Res}(\chi_1, \chi_2)$, et $\text{Res}(\chi_1(X - u), \chi_2(X - u)) = \text{Res}(\chi_1, \chi_2)$.

Définissons également le *discriminant* d'un polynôme χ comme étant,

$$\Delta_0(\chi) = \text{Res}(\chi, \chi'),$$

où χ' désigne la dérivée du polynôme χ ; on a,

$$(3.6) \quad \Delta_0(\chi) = \prod_{\substack{\sigma_i, \sigma_j \in \Sigma_\chi \\ \sigma_i \neq \sigma_j}} (\sigma_i - \sigma_j).$$

C'est un polynôme en les coefficients de χ nul si χ a des racines multiples.

On a pour tout $u \in \mathbf{C}$,

$$\Delta_0(\chi(\cdot - u)) = \Delta_0(\chi).$$

Quand $\chi_i = \chi_{\Sigma_i}$ ($i = 1, 2$) nous noterons souvent $\Delta_0(\Sigma_i), \Delta(\Sigma_1, \Sigma_2; u)$, etc. pour $\Delta_0(\chi_{\Sigma_i}), \Delta(\chi_{\Sigma_1}, \chi_{\Sigma_2}; u)$, etc.. Si $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l$, et $u \in \mathbf{C}$ on a alors,

$$(3.8) \quad \Delta_0(\Sigma) = \prod_{i=1}^l \Delta_0(\Sigma_i). \prod_{1 \leq i \neq j \leq l} \text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j).$$

De même, vu que $\text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j; u) = \prod_{\substack{\sigma_i \in \Sigma_i \\ \sigma_j \in \Sigma_j + u}} (\sigma_i - \sigma_j)$, on a,

$$(3.9) \quad \text{Res}(\Sigma, \Sigma; u) = \prod_{1 \leq i, j \leq l} \text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j; u).$$

Le fait que les expressions précédentes soient polynomiales en les coefficients des polynômes permet d'établir:

Lemme. Pour $\chi, \chi_1, \chi_2 \in \mathbf{C}[X]$ de degrés respectifs m, m_1, m_2 , et $u \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} |\chi(\cdot - u)| &\leq (1 + |u|)^m (1 + |\chi|), \\ |\text{Res}(\chi_1, \chi_2)| &\leq \text{cste.} (1 + |\chi_1|)^{m_2} (1 + |\chi_2|)^{m_1}, \\ |\Delta_0(\chi)| &\leq \text{cste.} (1 + |\chi|)^{2m-1}, \\ |\text{Res}(\chi_1, \chi_2(\cdot - u))| &\leq \text{cste.} [(1 + |u|)^{m_1 m_2} (1 + |\chi_1|)^{m_2} (1 + |\chi_2|)^{m_1}], \end{aligned}$$

et, si $\chi_2(X) = \chi_1(X) + \eta(X)$, avec $|\eta| \leq 1$,

$$|\text{Res}(\chi_1, \chi_2)| \leq \text{cste.} (1 + |\chi_1|)^{m_1 + m_2} |\eta|.$$

3.1. Dépendance analytique des racines. On sait que les racines d'un polynôme dépendent continûment de ses coefficients. Si en outre les $a_j(\lambda) \in \mathbf{C}^\omega(\Lambda)$ et si pour $\lambda_0 \in \Lambda$, une racine $\sigma(\lambda_0)$ est simple, alors au voisinage de λ_0 , $\sigma(\lambda)$ est analytique. Ce résultat classique admet la généralisation suivante: si $\Sigma_1(\lambda)$ est un sous ensemble de racines de $\Sigma(\lambda)$ « suffisamment séparé » des autres racines, alors les fonctions symétriques élémentaires en les $\sigma_1 \in \Sigma_1$, sont analytiques au voisinage de λ_0 et par conséquent $\chi_{\Sigma_1(\lambda)}$ l'est également (*i.e.* ses coefficients le sont). Nous donnons dans la suite une version plus quantitative de ce fait (par ailleurs classique). Dans la suite nous dirons que $\Sigma(\lambda)$ est (M, δ) -bornée si les coefficients de $\chi_{\Sigma(\lambda)}$ le sont.

3.1.1. Définition. (i) Si $\nu > 0$, nous dirons qu'une partition de $\Sigma \in \text{Div}^+(\mathbf{C})$, $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l$ est ν -séparée si pour tout $i \neq j$ et tout $(\sigma_i, \sigma_j) \in \Sigma_i \times \Sigma_j$, $|\sigma_i - \sigma_j| > \nu$. Les Σ_i seront appelés les amas de la décomposition. (ii) Si en outre il existe $\zeta > 0$ tel que pour tout $1 \leq i \leq l$, chaque amas Σ_i est de diamètre inférieur à ζ , nous dirons que la décomposition est (ν, ζ) -séparée.

Remarque: La définition (i) précédente permet de définir un graphe sur Σ . Si les Σ_i correspondent aux composantes connexes maximales de celui-ci, nous dirons que la décomposition séparée est *maximale*. Dans ce cas on a nécessairement $\zeta \leq q\nu$.

Considérons $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l$ une décomposition ν -séparée maximale de $\Sigma \in \text{Div}^+(\mathbf{R})$ ($\nu \leq 1$) et notons χ_Σ son polynôme caractéristique (que nous supposerons de degré inférieur à q) et χ_{Σ_i} ceux des Σ_i . Introduisons également un polynôme $\eta \in \mathbf{C}_q[X]$ (noter qu'on suppose η à coefficients complexes) qui sera « petit ». Enfin notons $\Sigma' \in \text{Div}^+(\mathbf{C})$ les zéros de

$$(3.9) \quad \chi_{\Sigma'}(X) = \chi_\Sigma(X) + \eta(X).$$

Nous supposerons qu'il existe $R > 0$ tel que $\Sigma \subset \{|z| \leq R\} = D(0, R)$.

3.1.2. Lemme. Si $0 < \nu < 1$, $\Sigma \subset D(0, R)$ et

$$(3.10) \quad |\eta| \leq b.(R^{3q+1}\nu^{-2q}(1 + |\chi_\Sigma|))^{-1},$$

(où b est une constante ne dépendant que de q), il existe une décomposition $\Sigma' = \Sigma'_1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma'_l$ telle que,

(i) pour tout $1 \leq i \leq l$,

$$(3.11) \quad |\chi_{\Sigma'_i} - \chi_{\Sigma_i}| \leq b.(1 + |\chi_\Sigma|)^q R^{4q^2} \nu^{-2q^2} |\eta|;$$

(ii) pour tout $\sigma'_i \in \Sigma'_i$,

$$(3.12) \quad \text{dist}(\sigma'_i, \Sigma_i) \leq b.(1 + |\chi_\Sigma|) R^5 \nu^{-2} |\eta|^{\frac{1}{q}}.$$

(iii) $\Sigma = \Sigma'_1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma'_l$ est ν' -séparée avec

$$(3.13) \quad \nu' = \nu - b.(1 + |\chi_\Sigma|) R^5 \nu^{-2} |\eta|^{\frac{1}{q}}.$$

(iv) En outre χ_{Σ_i} vérifie,

$$(3.14) \quad |\chi_{\Sigma_i}| \leq b R^{3q^2} \nu^{-q^2} (1 + |\chi_\Sigma|)^q.$$

(v) Pour tous $1 \leq i, j \leq l$,

$$(3.15) \quad |\Delta_0(\Sigma'_i) - \Delta_0(\Sigma_i)| \leq b(R\nu^{-1}(1 + |\chi_\Sigma|))^{10q^3} |\eta|,$$

$$(3.16) \quad |\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u) - \text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j; u)| \leq b(R\nu^{-1}(1 + |\chi_\Sigma|))^{10q^3} |\eta|.$$

Démonstration. – Les Σ_i étant ν -séparés, inclus dans \mathbf{R} , il est possible de trouver des courbes simples γ_i de longueur $l(\gamma_i) \leq 2(R + 1)$ (si la décomposition est maximale on aura $l(\gamma_i) \leq 2(q + 1)\nu$), à distance au moins $\nu/2$ des points de Σ et entourant les points de Σ_i . Nous noterons D_i l'intérieur de ces courbes. Posons pour $0 \leq j \leq \#\Sigma_1$,

$$(3.17) \quad \tilde{\pi}_{1,j} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} z^j \frac{\partial_z(\chi_\Sigma + \eta)(z)}{(\chi_\Sigma + \eta)(z)} dz,$$

et,

$$(3.18) \quad \pi_{1,j} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} z^j \frac{\partial_z \chi_\Sigma(z)}{\chi_\Sigma(z)} dz.$$

D'après la formule de Cauchy,

$$(3.20) \quad \tilde{\pi}_{1,j} = \sum_{\sigma \in \Sigma' \cap D_1} \tilde{\sigma}^j,$$

$$(3.21) \quad \pi_{1,j} = \sum_{\sigma \in \Sigma_1} \sigma^j,$$

les sommes étant prises avec multiplicité. Pour $z \in \gamma_1$,

$$(3.22) \quad |\chi_\Sigma(z)| = \left| \prod_{\sigma \in \Sigma} (z - \sigma) \right| \geq (\nu/2)^q,$$

et

$$(3.23) \quad \sup_{z \in \gamma_1} (|\eta(z)|, |\partial_z \eta(z)|) \leq qR^q |\eta|,$$

$$(3.24) \quad \sup (|\chi_\Sigma(z)|, |\partial_z \chi_\Sigma(z)|) \leq qR^q |\chi_\Sigma|.$$

En outre,

$$(3.25) \quad |\tilde{\pi}_{1,j} - \pi_{1,j}| \leq \int_{\gamma_1} |z|^j \frac{|\partial_z \chi_\Sigma(z)| |\eta(z)| + |\chi_\Sigma(z)| |\partial_z \eta(z)|}{|\chi_\Sigma(z)| |(\chi_\Sigma + \eta)(z)|} dz,$$

si bien que d'après (3.22),

$$(3.26) \quad |\tilde{\pi}_{1,j} - \pi_{1,j}| \leq \frac{l(\gamma_1)}{2\pi} (R+1)^j \frac{q^2 R^{2q} |\eta| |\chi_\Sigma|}{\frac{1}{2}(\nu/2)^{2q}},$$

si

$$(3.27) \quad qR^q |\eta| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{2}\right)^q,$$

ce qui est bien le cas. On a donc

$$(3.28), \quad |\tilde{\pi}_{1,j} - \pi_{1,j}| \leq bR^{3q+1} \nu^{-2q} |\chi_\Sigma| |\eta|$$

avec $b = 2^{q+2} q^2 2^{2q}$ puisque $l(\gamma_1) \leq 2(R+1)$. En particulier d'après (3.26) si $j = 0$, on a, $|\tilde{\pi}_{1,0} - \pi_{1,0}| \leq bR^{2q} |\chi_\Sigma| |\eta| \nu^{-2q} \leq \frac{1}{2}$, pourvu que

$$(3.29) \quad b|\eta| |\chi_\Sigma| R^{2q} \nu^{-2q} < \frac{1}{2};$$

par conséquent, si $|\eta| \leq bR^{-2q} \nu^{2q} (1 + |\chi_\Sigma|)^{-1}$, on a

$$\#(\Sigma' \cap D_1) = \#\Sigma_1$$

(remarque que $\tilde{\pi}_{1,0} = \#(\Sigma' \cap D_1)$, $\pi_{1,0} = \#\Sigma_1$). Nous poserons donc $\Sigma'_1 = \Sigma_1 \cap D_1$ et définirons similairement Σ'_i .

D'autre part si pour $j \geq 1$ on note $\tilde{\rho}_{1,j}$ les fonctions symétriques élémentaires en les $\tilde{\sigma} \in \Sigma'_1$, et $\rho_{1,j}$ celles en les $\sigma \in \Sigma_1$, la formule (3.3) (développer le déterminant) montre que

$$|\tilde{\rho}_{1,j} - \rho_{1,j}| \leq b(1 + |\max \pi_{1,j}|)^{q-1} |\tilde{\pi}_{1,j} - \pi_{1,j}|;$$

or d'après (3.18), (3.22) et (3.27) on a en tenant compte de (3.28),

$$(3.30) \quad |\pi_{1,j}| \leq \frac{l(\gamma_1)}{2\pi} (R+1)^q \frac{qR^q |\chi_\Sigma|}{\left(\frac{\nu}{2}\right)^q} \leq bR^{2q+1} \nu^{-q} |\chi_\Sigma|,$$

avec $b = \frac{q2^q}{2\pi}$. Par conséquent en tenant compte de (3.28),

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}_{1,j} - \rho_{1,j}| &\leq b(1 + |\chi_\Sigma|)^{q-1} R^{(2q+1)(q-1)} \nu^{-2q(q-1)} |\tilde{\pi}_{1,j} - \pi_{1,j}| \\ &\leq b(1 + |\chi_\Sigma|)^{q-1} R^{2q^2 - q - 1} \nu^{-2q(q-1)} R^{3q+1} (1 + |\chi_\Sigma|) |\eta| \nu^{-q} \\ &\leq b(1 + |\chi_\Sigma|)^q R^{2q^2 + 2q} \nu^{-2q^2} |\eta| \\ &\leq b(1 + |\chi_\Sigma|)^q R^{4q^2} \nu^{-2q^2} |\eta| \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$(3.31) \quad |\chi_{\Sigma'_i} - \chi_{\Sigma_i}| \leq b(1 + |\chi_\Sigma|)^q R^{4q^2} \nu^{-2q^2} |\eta|.$$

Ceci montre (i).

D'autre part, si $\sigma' \in \Sigma'_i$, $\chi_{\Sigma'_i}(\sigma') = \chi_{\Sigma_i}(\sigma') + (\chi_{\Sigma'_i} - \chi_{\Sigma_i})(\sigma') = 0$, et donc

$$\left| \prod_{\sigma \in \Sigma_i} (\sigma_i - \sigma') \right| = |\chi_{\Sigma_i}(\sigma')| \leq b(1 + |\chi_\Sigma|)^q R^{5q^2} \nu^{-2q^2} |\eta|;$$

par conséquent, un au moins des termes $|\sigma_i - \sigma'|$ dans le produit est minoré; plus précisément,

$$\text{dist}(\sigma', \Sigma_i) \leq b(1 + |\chi_{\Sigma_i}|) R^5 \nu^{-2} |\eta|^{\frac{1}{q}}.$$

Ceci prouve (ii). D'autre part, (iii) est une conséquence immédiate de (ii).

Pour l'estimation (iv) il suffit de constater que d'après (3.30) et (3.3),

$$|\rho_{1,j}| \leq b(1 + |\max \pi_{1,j}|)^q \leq b(R^{2q+1} (1 + |\chi_\Sigma|) \nu^{-q})^q \leq R^{3q^2} \nu^{-q^2} (1 + |\chi_\Sigma|)^q,$$

c'est-à-dire la conclusion du (iv).

(v) Montrons à présent les estimations relatives à $\Delta_0(\Sigma'_i)$ et $\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u)$. Remarquons pour cela que les quantités Res et Δ_0 sont des déterminants et que l'on a donc,

$$\begin{aligned} |\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j) - \text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j)| &\leq b(1 + |\chi_{\Sigma_i}|)^{m_j} (1 + |\chi_{\Sigma_j}|)^{m_i} |\chi_{\Sigma'_i} - \chi_{\Sigma_i}| \\ &\leq b(R^{3q^2} \nu^{-q^2} (1 + |\chi_\Sigma|)^q)^{2q} (1 + |\chi_\Sigma|)^q R^{4q^2} \nu^{-2q^2} |\eta| \\ &\leq bR^{6q^3 + 4q^2} \nu^{-2q^3 - 2q^2} (1 + |\chi_\Sigma|)^{2q^2 + q} |\eta| \\ &\leq b(R\nu^{-1} (1 + |\chi_\Sigma|))^{10q^3} |\eta|. \end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} |\Delta_0(\Sigma'_i) - \Delta_0(\Sigma_i)| &= |\text{Res}(\chi_{\Sigma'_i}, \chi'_{\Sigma'_i}) - \text{Res}(\chi_{\Sigma_i}, \chi'_{\Sigma_i})| \\ &\leq b(1 + |\chi_{\Sigma_i}|)^{2m_i - 1} |\chi_{\Sigma'_i} - \chi_{\Sigma_i}| \\ &\leq b(R^{3q^2} \nu^{-2q^2} (1 + |\chi_\Sigma|)^q)^{2q} (1 + |\chi_\Sigma|)^q R^{4q^2} \nu^{-2q^2} |\eta| \\ &\leq bR^{10q^3} \nu^{-4q^3} (1 + |\chi_\Sigma|)^{2q^2 + q} |\eta| \\ &\leq b(R\nu^{-1} (1 + |\chi_\Sigma|))^{10q^3} |\eta|. \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration du lemme. □

Notons $\Lambda_\delta = W_\delta(\Lambda)$ un δ -voisinage dans \mathbf{C} de $\Lambda \subset \mathbf{R}$ et montrons:

3.1.3. Lemme. Soient $\Sigma(\lambda)$ qui est (M, δ) -bornée sur un intervalle Λ et $R > 0$ tel que $\Sigma(\Lambda_\delta) \subset D(0, R)$. Supposons en outre qu'il existe une décomposition $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ ν -séparée sur Λ . Alors les $\Sigma_i(\lambda)$ sont (M', δ') -bornés avec

$$\delta' = b(R^{3q+1}M^2\nu^{-2q})^{-1}\delta, \quad M' = b(R^{3q^2}\nu^{-q^2})M^q.$$

Démonstration. – Écrivons, pour $\lambda \in \mathbf{R}, \tilde{\lambda} \in \mathbf{C}$, tels que $|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \delta' < \delta$,

$$\chi_{\Sigma(\tilde{\lambda})} = \chi_{\Sigma(\lambda)} + (\chi_{\Sigma(\tilde{\lambda})} - \chi_{\Sigma(\lambda)}) = \chi_{\Sigma(\lambda)} + \eta;$$

on a d'après les inégalités de Cauchy,

$$|\eta(\lambda, \tilde{\lambda})| = |\chi_{\Sigma(\tilde{\lambda})} - \chi_{\Sigma(\lambda)}| \leq \frac{M}{(\delta/2)}|\tilde{\lambda} - \lambda|.$$

Il suffit donc de choisir en vertu du lemme 3.1.2 précédent, δ' tel que,

$$\frac{M}{(\delta/2)}\delta' < b(R^{3q+1}\nu^{-2q}(1 + |\chi_\Sigma|))^{-1},$$

c'est-à-dire $\delta' < b(R^{3q+1}\nu^{-2q}M^2)^{-1}\delta$. On a alors, d'après le (iv) du lemme précédent, $M' = bR^{3q^2}\nu^{-2q^2}M^q$, ce qui complète la démonstration du lemme. \square

3.1.4.3. Lemme. Si $\deg \Sigma(\cdot) = n$ et si pour tout $u \in \mathbf{R}$ la fonction $f_u : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto \chi_{\Sigma(\lambda)}(u)$ est $(M(1 + |u|)^n, \delta)$ -bornée, alors $\lambda \mapsto \chi_{\Sigma(\lambda)}$ est (bM, δ) -bornée.

Démonstration. – Écrivons $f_u(\lambda) = u^n + a_1(\lambda)u^{n-1} + \dots + a_n(\lambda)$ et posons $g_u(\lambda) = u^{-n}f_u(\lambda)$. On a alors pour tout $z \in W_\delta(\Lambda)$ et tout $|u| \geq 1$,

$$-1 + g_u(z) = a_1(z)\left(\frac{1}{u}\right) + \dots + a_n(z)\left(\frac{1}{u}\right)^n,$$

avec $|g_u(z) - 1| \leq 1 + 2^n M$. Par conséquent pour u_1, \dots, u_n tous distincts et vérifiant $|u_i| \geq 1$, on a:

$$\begin{pmatrix} a_1(\lambda) \\ \vdots \\ a_n(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{-1} & \dots & u_1^{-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^{-1} & \dots & u_n^{-n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_{u_1}(z) - 1 \\ \vdots \\ g_{u_n}(z) - 1 \end{pmatrix},$$

où la matrice précédente est inversible car,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (u_i^{-1} - u_j^{-1}) \neq 0.$$

On a donc bien $|a_i(z)| \leq bM$ si $z \in W_\delta(\Lambda)$. \square

3.2. Transversalité pour les racines. Dans ce qui suit nous considérons des décompositions $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ dépendant continûment de λ sur un intervalle

$\Lambda \subset \mathbf{R}$ et telles que pour $\lambda \in \Lambda$, $\#\Sigma_i(\lambda) = m_i = \text{cste}$ ($1 \leq i \leq l$). Nous noterons pour $\delta > 0$, $W_\delta(\Lambda)$ ou Λ_δ un δ -voisinage de Λ dans \mathbf{C} et par $D(0, R)$ le disque de centre 0 et de rayon R dans \mathbf{C} .

3.2.1. Définitions. Remarquons que si $\chi = \prod \chi_i$ et si $u \in \mathbf{R}$ est à distance supérieure à 1 des racines de χ , $|\chi(u)| \geq 1$. Ceci motive la définition suivante:

3.2.1.1. Définition. Une application $\Sigma : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}_m[X]$ sera dite (M, δ, c, r) -transverse, si

- (i) $\lambda \mapsto \Delta_0(\Sigma(\lambda))$ est (M, δ, c, r) -transverse.
- (ii) Pour tout $u \in \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto \chi_{\Sigma(\lambda)}(u)$ est $(M(1 + |u|)^m, \delta, c, r)$ -transverse;
- (iii) Pour tout $u \in \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto \text{Res}(\Sigma(\lambda), \Sigma(\lambda); u)$ est $(M(1 + |u|)^{m^2}, \delta, c, r)$ -transverse.

3.2.1.2. Définition. Une décomposition $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ sur Λ avec $\#\Sigma_i(\lambda) = m_i$, sera dite (M, δ, c, r) -transverse si

- (i) pour tout i , $\lambda \mapsto \Sigma_i(\lambda)$ est (M, δ, c, r) -transverse;
- (ii) pour tout (i, j) ($i \neq j$) et tout $u \in \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto \text{Res}(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_j(\lambda); u)$ est $(M(1 + |u|)^{m_i m_j}, \delta, c, r)$ -transverse.

Nous donnons à présent trois propositions importantes.

3.2.2. Accrétion des racines. Nous supposons pour simplifier que $\Sigma : \Lambda \rightarrow \text{Div}^+(\mathbf{R})$ et que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\deg \Sigma(\lambda) = m \leq q$ où q est un entier positif. Par ailleurs comme précédemment les quantités c, δ, ν seront positives et inférieures à 1 tandis que les M, R seront plus grandes que 1.

3.2.2.1. Proposition.

Soient $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ une décomposition (M, δ, c, r) -transverse telle que $\Sigma(\Lambda_\delta) \subset D(0, R)$, $R > 1$. Alors $\lambda \mapsto \Sigma(\lambda)$ est (M', δ', c', r') -transverse avec

$$M' = M^{l^2} \leq M^{q^2}, \quad \delta' = \delta,$$

$$c' = \left(\left(\frac{b\delta}{l^4 r^2 M R^{m^2}} \right)^{r l^4} c \right)^{l^{2(l^2 r + 1)}}, \quad r' = l^2 r.$$

Démonstration. – Il faut vérifier les points (i), (ii), (iii) du 3.2.1.1.

(i) Pour $\Delta_0(\Sigma(\lambda))$, d'après (3.8),

$$\Delta_0(\Sigma(\lambda)) = \prod_{i=1}^l \Delta_0(\Sigma_i(\lambda)) \cdot \prod_{1 \leq i \neq j \leq l} \text{Res}(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_j(\lambda)),$$

et donc d'après le lemme 2.4, $\lambda \mapsto \Delta_0(\Sigma(\lambda))$ est (M_1, δ, c_1, r_1) -transverse avec

$$M_1 = M^{l^2}, \quad r_1 = l^2 r, \quad c_1 = \left(\left(\frac{\delta}{4(l^2 r)^2 M} \right)^{r l^4} c \right)^{l^{2(l^2 r + 1)}}.$$

(ii) Pour $\chi_{\Sigma(\lambda)}(u)$, comme $\chi_{\Sigma(\lambda)}(u) = \prod_{i=1}^l \chi_{\Sigma_i(\lambda)}(u)$, on a toujours,

$$\sup_{\lambda \in W_\delta(\Lambda)} |\chi_{\Sigma(\lambda)}(u)| \leq \prod_{i=1}^l |\chi_{\Sigma_i(\lambda)}(u)|_\delta \leq \prod_{i=1}^l (1 + |u|)^{m_i} \cdot M, \leq (1 + |u|)^m M^l.$$

En outre

- si u est tel que $u \geq (1 + R)$ alors $\text{dist}(\Sigma(\Lambda_\delta), u) > 1$, et on a $|\chi_{\Sigma(\lambda)}(u)| \geq 1$;
 $\lambda \mapsto \chi_{\Sigma(\lambda)}(u)$ est par conséquent $(M^l(1 + |u|)^m, \delta, 1, 0)$ -transverse.
- sinon, $|u| \leq R + 1$ et,

$$\sup_{\lambda \in W_\delta(\Lambda)} |\chi_{\Sigma(\lambda)}(u)| \leq (2 + R)^{m_i} M,$$

si bien que le lemme 2.4 montre que $\lambda \mapsto \prod \chi_{\Sigma_i(\lambda)}(u) = \chi_{\Sigma(\lambda)}(u)$ est (M_2, δ, c_2, lr) -transverse avec

$$M_2 = (2 + R)^m M^l, \quad c_2 = \left(\left(\frac{b\delta}{l^2 r^2 M R^m} \right)^{r l^2} c \right)^{l^{r+1}}.$$

(iii) Pour $\lambda \mapsto \text{Res}(\Sigma(\lambda), \Sigma(\lambda); u)$, d'après (3.9),

$$\text{Res}(\Sigma(\lambda), \Sigma(\lambda); u) = \prod_{1 \leq i, j \leq l} \text{Res}(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_j(\lambda); u),$$

et la décomposition étant (M, δ, c, r) -transverse, l'application $\lambda \mapsto \text{Res}(\Sigma(\lambda), \Sigma(\lambda); u)$ vérifie toujours, $|\text{Res}(\Sigma(\lambda), \Sigma(\lambda); u)|_\delta \leq \prod_{1 \leq i, j \leq l} (1 + |u|)^{m_i m_j} M \prod_{1 \leq i, j \leq l} M$, vu que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq l} m_i m_j = \left(\sum_{i=1}^l m_i \right)^2,$$

$$|\text{Res}(\Sigma(\cdot), \Sigma(\cdot); u)|_\delta \leq (1 + |u|)^{m^2} M^{l^2}.$$

D'autre part:

- si $u \geq 2R + 1$, on a pour tous $(\sigma, \tau) \in \Sigma \times (u + \Sigma)$, $|\sigma - \tau| > 1$ si bien que $|\text{Res}(\Sigma(\lambda), \Sigma(\lambda); u)| > 1$, et donc, $\lambda \mapsto \text{Res}(\Sigma(\lambda), \Sigma(\lambda); u)$ est $((1 + |u|)^{m^2} M^{l^2}, \delta, 1, 0)$ -transverse.
- sinon, $|\text{Res}(\Sigma_i(\cdot), \Sigma_i(\cdot); u)|_\delta \leq [2(R + 1)]^{m_i^2} M$, et le lemme 2.4 montre que $\lambda \mapsto \text{Res}(\Sigma(\cdot), \Sigma(\cdot); u)$ est (M_3, δ, c_3, r_3) -transverse avec

$$M_3 = [2(R + 1)]^{m^2} M^{l^2}, \quad r_3 = l^2 r, \quad c_3 = \left(\left(\frac{b\delta}{l^4 r^2 M R^{m^2}} \right)^{r l^4} c \right)^{l^{2(l^2 r + 1)}}.$$

Finalement $\lambda \mapsto \Sigma(\lambda)$ est (M', δ, c', r') -transverse avec M', c', r' comme annoncés plus haut. \square

Donnons une version un peu plus générale du résultat précédent.

3.2.2.2. Proposition. Soit $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ une décomposition (M, δ, c, r) -transverse sur Λ telle que $\Sigma(W_\delta(\Lambda)) \subset D(0, R)$, $R > 1$ et $\#\Sigma(\lambda) \leq q$. Soit en outre $\{1, \dots, l\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{l'}$ une partition. Posons $\gamma_k = \#C_k$ et définissons pour $1 \leq k \leq l'$,

$$(3.32) \quad \hat{\Sigma}_k(\lambda) = \bigcup_{i \in C_k} \Sigma_i(\lambda).$$

Nous noterons $\hat{m}_i = \deg \hat{\Sigma}_i$. Alors la décomposition $\Sigma(\lambda) = \hat{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \hat{\Sigma}_{l'}(\lambda)$ est $(\hat{M}, \hat{\delta}, \hat{c}, \hat{r})$ -transverse avec

$$\hat{M} = M^{q^2}, \quad \hat{\delta} = \delta, \quad \hat{c} = \left(\left(\frac{b\delta}{q^4 r^2 M^q R^{q^2}} \right)^{q^4 r} c \right)^{q^2(q^2 r + 1)}, \quad \hat{r} = q^2 r.$$

a) Montrons déjà que les $\hat{\Sigma}_k(\cdot)$ sont $(\hat{M}, \hat{\delta}, \hat{c}, \hat{r})$ -transverses.

a) (i) De (3.32) on déduit, $\chi_{\hat{\Sigma}_k(\lambda)}(u) = \prod_{i \in C_k} \chi_{\Sigma_i(\lambda)}(u)$; remarquons que l'on a toujours

$$\sup_{\lambda \in W_\delta(\Lambda)} |\chi_{\hat{\Sigma}_k(\lambda)}(u)| \leq \prod_{i \in C_k} |\chi_{\Sigma_i(\lambda)}(u)|, \quad \leq \prod_{i \in C_k} (1 + |u|)^{m_i} M, \quad \leq M^{\gamma_k} (1 + |u|)^{\hat{m}_k}.$$

En outre

- si $u > R + 1$, alors $\text{dist}(\Sigma(\Lambda_\delta), u) > 1$ et on a, $|\chi_{\hat{\Sigma}_k(\lambda)}(u)| > 1$. Mais alors, $\chi_{\hat{\Sigma}_k(\cdot)}(u)$ est $(M^{\gamma_k} (1 + |u|)^{\hat{m}_k}, \delta, 1, 0)$ -transverse.
- sinon, $|u| \leq R + 1$ et,

$$\sup_{\lambda \in W_\delta(\Lambda)} |\chi_{\Sigma_i(\lambda)}(u)| \leq (2 + R)^{m_i} M,$$

si bien que le lemme 2.4 montre que $\chi_{\hat{\Sigma}_k(\cdot)}(u)$ est $(M_2, \delta, c_2, \gamma_k r)$ -transverse avec

$$c_2 = \left(\left(\frac{b\delta}{\gamma_k^2 r^2 M R^{\hat{m}_k}} \right)^{r \gamma_k^2} c \right)^{\gamma_k^{\gamma_k r + 1}}.$$

a) (ii) Pour $\Delta(\hat{\Sigma}_k(\cdot), u)$. D'après (3.9),

$$\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\lambda), \hat{\Sigma}_k(\lambda); u) = \prod_{i, j \in C_k} \text{Res}(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_j(\lambda); u).$$

La décomposition $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_\Sigma}(\lambda)$ étant (M, δ, c, r) -transverse, l'application $\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\cdot), \hat{\Sigma}_k(\cdot); u)$ vérifie toujours $|\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\cdot), \hat{\Sigma}_k(\cdot); u)|_\delta \leq \prod_{i, j \in C_k} ((1 + |u|)^{m_i m_j} M)$, ce qui donne,

$$\sum_{i, j \in C_k} m_i m_j = \left(\sum_{i \in C_k} m_i \right)^2, \quad |\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\cdot), \hat{\Sigma}_k(\cdot); u)|_\delta \leq (1 + |u|)^{(\hat{m}_k)^2} M^{\gamma_k^2}.$$

D'autre part,

- si $u \geq 2R + 1$, on pour tout $(\sigma, \tau) \in \hat{\Sigma}_k \times \hat{\Sigma}_k + u$, $|\sigma - \tau| > 1$, si bien que pour $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$, $|\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\lambda), \hat{\Sigma}_k(\lambda); u)| > 1$, et donc $\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\lambda), \hat{\Sigma}_k(\lambda); u)$ est $((1 + |u|)^{\hat{m}_k^2} M^{\gamma_k^2}, \delta, 1, 0)$ -transverse.
- sinon, pour $i \in C_k$, $|\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\lambda), \hat{\Sigma}_k(\lambda); u)|_\delta \leq [2(R + 1)]^{m_k^2} M$, et le lemme 2.4 montre que $\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\lambda), \hat{\Sigma}_k(\lambda); u)$ est $(M_3, \delta_3, c_3, r_3)$ -transverse avec

$$M_3 = (2(R+1))^{\hat{m}_k^2} M^{\gamma_k^2}, \quad r_3 = \gamma_k^2 r, \quad c_3 = \left(\left(\frac{b\delta}{\gamma_k^4 r^2 M R^{\hat{m}_k^2}} \right)^{r\gamma_k^4} c \right)^{\gamma_k^{2(\gamma_k r + 1)}}.$$

a) (iii) Les estimations sur $\Delta_0(\hat{\Sigma}_k)$ se démontrent de la même façon (c'est même plus facile).

b) Montrons que la *décomposition* est transverse.

Si $k, k' \in \{1, \dots, l'\}$, $\hat{\Sigma}_k(\lambda) = \bigcup_{i \in C_k} \Sigma_i(\lambda)$, $\hat{\Sigma}_{k'}(\lambda) = \bigcup_{j \in C_{k'}} \Sigma_j(\lambda)$ et donc,

$$\begin{aligned} \text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\lambda), \hat{\Sigma}_{k'}(\lambda); u) &= \prod_{\substack{\hat{\sigma} \in \hat{\Sigma}_k \\ \hat{\tau} \in \hat{\Sigma}_{k'}}} (\hat{\sigma} - \hat{\tau} - u), \\ &= \prod_{(i,j) \in C_k \times C_{k'}} \prod_{\substack{\sigma_i \in \Sigma_i \\ \tau_j \in \Sigma_j}} (\sigma_i - \tau_j - u), \\ &= \prod_{(i,j) \in C_k \times C_{k'}} \text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j; u). \end{aligned}$$

Chacun des facteurs du produit précédent est $(M(1 + |u|)^{m_i m_j}, \delta, c, r)$ -transverse et donc en particulier,

$$|\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\cdot), \hat{\Sigma}_{k'}(\cdot); u)| \leq \prod_{(i,j) \in C_k \times C_{k'}} (1 + |u|)^{m_i m_j} M \leq (1 + |u|)^{\hat{m}_k \hat{m}_{k'}} M^{\gamma_k \gamma_{k'}},$$

car, $\sum_{(i,j) \in C_k \times C_{k'}} m_i m_j = (\sum_{i \in C_k} m_i)(\sum_{j \in C_{k'}} m_j) = \hat{m}_k \hat{m}_{k'}$. -si $|u| > 2R + 1$, alors pour tout $(\sigma, \tau) \in \hat{\Sigma}_k \times (\hat{\Sigma}_{k'} + u)$, on a $|\sigma - \tau| > 1$, si bien que, $|\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\cdot), \hat{\Sigma}_{k'}(\cdot); u)| > 1$ et cette dernière fonction est $(M_4, \delta, 1, 0)$ -transverse avec

$$M_4 = (1 + |u|)^{\hat{m}_k \hat{m}_{k'}} M^{\gamma_k \gamma_{k'}}, \quad r_4 = \gamma_k \gamma_{k'} r;$$

- sinon, $|u| \leq 2R + 1$ et chaque facteur est en $|\cdot|_\delta$ plus petit que $(2(R + 1))^{m_i m_j}$. Donc $\text{Res}(\hat{\Sigma}_k(\lambda), \hat{\Sigma}_{k'}(\lambda); u)$ est $(2(1 + R))^{\hat{m}_k \hat{m}_{k'}} M^{\gamma_k \gamma_{k'}}$, δ, c_4, r_4 -transverse avec

$$c_4 = \left(\left(\frac{b\delta}{(\gamma_k \gamma_{k'})^2 r^2 M^m R^{\hat{m}_k \hat{m}_{k'}}} \right)^{(\gamma_k \gamma_{k'})^2 r} c \right)^{(\gamma_k \gamma_{k'})^{\gamma_k \gamma_{k'} r + 1}}.$$

En comparant a), b) on obtient la conclusion de la proposition. \square

3.2.3. Séparation des racines.

3.2.3.1. Proposition. *Si $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ est une décomposition ν -séparée telle que $\lambda \mapsto \Sigma(\lambda)$ est (M, δ) -bornée, alors pour tout $i, j, u \in \{1, \dots, l\}^2 \times \mathbf{R}$:*

- a) $|\chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)|_{\delta'} \leq b(1 + |u|)^{m_i} (bRM\nu^{-1})^{3q^2}$,
- b) $|\Delta_0(\Sigma_i(\cdot))|_{\delta'} \leq (bMR\nu^{-1})^{6q^3}$,
- c) $|\text{Res}(\Sigma_i(\cdot), \Sigma_j(\cdot); u)|_{\delta'} \leq (1 + |u|)^{m_i m_j} (bRM\nu^{-1})^{6q^3}$,

où $\delta' = b(RM\nu^{-1})^{-4q}\delta$.

Démonstration. – Le lemme 3.1.4.3 montre que $\lambda \mapsto \chi_{\Sigma(\cdot)}$ est (bM, δ) -bornée; le lemme 3.1.3 permet donc d'établir que les applications $\lambda \mapsto \chi_{\Sigma_i(\cdot)}$ sont (M_1, δ_1) -bornées avec

$$M_1 = (bR^{3q^2} \nu^{-q^2} M^q), \quad \delta_1 = bR^{-(3q+1)} M^{-2} \nu^{2q} \delta.$$

L'inégalité sur $\chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)$ est alors claire.

Montrons par exemple l'inégalité portant sur $\text{Res}(\Sigma_i(\cdot), \Sigma_j(\cdot); u)$, les autres s'établissant de façon analogue. L'inégalité du lemme du 3 montre que,

$$\begin{aligned} |\text{Res}(\chi_{\Sigma_i}(X), \chi_{\Sigma_j}(X - u))|_{\delta'} &\leq b(1 + |\chi_{\Sigma_i}|_{\delta'})^{m_j} (1 + |\chi_{\Sigma_i}(X - u)|_{\delta'})^{m_i} (1 + |u|)^{m_i m_j} \\ &\leq (1 + |u|)^{m_i m_j} (bR^{3q^2} \nu^{-q^2} M^q)^{m_i + m_j} \\ &\leq (1 + |u|)^{m_i m_j} (bR^{3q^2} \nu^{-q^2} M^q)^{2q} \\ &\leq (1 + |u|)^{m_i m_j} (bRM\nu^{-1})^{6q^3}. \end{aligned}$$

De même $|\Delta_0(\Sigma_i)|_{\delta'} \leq b(1 + |\chi_{\Sigma_i}|_{\delta'})^{2q-1} \leq (bR^{3q^2} \nu^{-q^2} M^q)^{2q} \leq (bRM\nu^{-1})^{6q^3}$. \square

3.2.3.2. Proposition. *Soit $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ une décomposition ν -séparée sur Λ telle que $\lambda \mapsto \Sigma(\lambda)$ soit (M, δ, c, r) -transverse et vérifie $\Sigma(\Lambda_\delta) \subset D(0, R)$ ($R > 1$). Alors, la décomposition $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ est (M', δ', c', r') -transverse avec*

$$\begin{aligned} M' &= (bRM\nu^{-1})^{6q^3}, & \delta' &= (bRM\nu^{-1})^{-4q}\delta, \\ c' &= (bRM\nu^{-1}\delta^{-1})^{-7q^5} r c, & r' &= r. \end{aligned}$$

Démonstration. – Pour $\Delta_0(\Sigma_i(\lambda))$ il suffit d'appliquer le lemme 2.5 aux formules (3.6), (3.8), (3.9). Écrivons,

$$\Delta_0(\Sigma(\lambda)) = \prod_{i=1}^l \Delta_0(\Sigma_i(\lambda)) \prod_{1 \leq i \neq j \leq l} \text{Res}(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_j(\lambda)).$$

Le lemme 3.2.3.1 montre que $\Delta_0(\Sigma_i(\cdot))$ est $((bRM\nu^{-1})^{6q^3}, \delta')$ -bornée avec

$$\delta' = (bRM\nu^{-1})^{-4q}\delta,$$

et que les $\text{Res}(\Sigma_i(\cdot), \Sigma_j(\cdot))$ sont $((bRM\nu^{-1})^{6q^3}, \delta')$ -bornées. D'après le lemme 2.5, $\Delta_0(\Sigma_i(\cdot))$ ainsi que $\text{Res}(\Sigma_i(\cdot), \Sigma_j(\cdot))$ sont donc $((bRM\nu^{-1})^{7q^4} \delta^{-4q}, \delta', c_1, r)$ -transverses avec $c_1 = (2l^2 (bRM\nu^{-1})^{6q^3} \delta^{-1})^{-rl^2} c \geq (bRM\nu^{-1} \delta^{-1})^{-6q^5} r c$.

- Pour $\chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)$.
 - si u est tel que $u \geq R + 1$, alors $\text{dist}(u, \Sigma(\Lambda_\delta)) \geq 1$ et $|\chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)| \geq 1$, si bien que $\chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)$ est d'après 3.2.3.1.a $\left((1 + |u|)^{m_i} (RM\nu^{-1})^{3q^2}, \delta', 1, 0 \right)$ -transverse;
 - sinon $u \leq R + 1$ et $|\chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)|_{\delta'} \leq (2 + R)^{m_i} (RM\nu^{-1})^{3q^2} \leq (bRM\nu^{-1})^{4q^2}$.
- Le lemme 2.5 montre donc que $\chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)$ est

$$\left((1 + |u|)^{m_i} (bRM\nu^{-1})^{4q^2}, (bRM\nu^{-1})^{-4q}\delta, c_2, r \right)\text{-transverse}$$

avec $c_2 = (2l(bRM\nu^{-1})^{4q^2}\delta^{-1})^{-r}c \geq (bRM\nu^{-1}\delta^{-1})^{-4q^3}r c$.

- Pour $\text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j; u)$: écrivons, $\text{Res}(\Sigma, \Sigma; u) = \prod_{1 \leq i, j \leq l} \text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j; u)$.
- si $|u| \geq 2R + 1$, chaque facteur du produit précédent est évidemment $(M', \delta', 1, 0)$ avec $M' = (1 + |u|)^{m_i m_j} ((bRM\nu^{-1})^{3q^2})^{2q} \leq (1 + |u|)^{m_i m_j} (bRM\nu^{-1})^{6q^3}$.
- sinon, $|u| \leq 2R + 1$, et

$$|\text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j; u)|_{\delta'} \leq [2(R + 1)]^{m_i m_j} (bRM\nu^{-1})^{6q^3} \leq (bRM\nu^{-1})^{7q^3}.$$

Le lemme 2.5 montre alors que chaque terme est (M', δ, c_3, r) -transverse avec

$$c_3 = (2l^2(bRM\nu^{-1})^{7q^3}\delta^{-1})^{-l^2}r c \geq (bRM\nu^{-1}\delta^{-1})^{-7q^5}r c.$$

La proposition est donc démontrée. \square

3.2.4. Effet d'une perturbation. Nous considérons à présent la situation suivante. Supposons que $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ soit ν -séparée sur Λ vérifie $\Sigma(\Lambda) \subset (-R, R)$ et soit (M, δ) -bornée. Nous désignerons par $\eta(\lambda) \in C_0^\infty(\Lambda, \mathbf{R}_q[X])$ une perturbation très petite. Soit $\Sigma'(\lambda) \subset \mathbf{C}$ tel que $\chi_{\Sigma'(\lambda)}(X) = \chi_{\Sigma(\lambda)}(X) + \eta(\lambda, X)$.

3.2.4.1. Lemme. *Sous les hypothèses précédentes, supposons que $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ soit une décomposition (M, δ, c, r) -transverse, ν -séparée sur Λ , telle que $\Sigma(\Lambda_\delta) \subset D(0, R)$ et supposons que,*

$$(3.33) \quad |\eta|_\delta \leq (bR^{3q+1}\nu^{-2q}M)^{-1};$$

alors, si on note $\Sigma'(\lambda) = \Sigma(\chi_{\Sigma(\lambda)} + \eta(\lambda, X))$, il existe une décomposition (M', δ', c', r) -transverse, (ν', ζ') -séparée, $\Sigma'(\lambda) = \Sigma'_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma'_l(\lambda)$ telle que $W_{\delta'}(\Lambda) \subset D(0, R')$ avec

$$\begin{aligned} M' &= M + (bRM\nu^{-1})^{10q^4} |\eta|_{\delta'}, & \delta' &= (bRM\nu^{-1})^{-4q}\delta, \\ c' &= c - (bMR\nu^{-1}\delta^{-1})^{11q^4(r+1)} |\eta|_{\delta'}, & \nu' &= \nu - bMR^5\nu^{-2} |\eta|_{\delta'}^{\frac{1}{q}}, \\ R' &= R + bMR^5\nu^{-2} |\eta|_{\delta'}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Démonstration. - Écrivons, $\chi_{\Sigma(\tilde{\lambda})} = \chi_{\Sigma(\lambda)} + [(\chi_{\Sigma(\tilde{\lambda})} - \chi_{\Sigma(\lambda)}) + \eta(\tilde{\lambda})]$, et remarquons que pour $|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \delta'$ nous sommes dans les hypothèses du lemme 3.1.2 et pouvons définir les $\Sigma'_i(\tilde{\lambda})$:

$$|\chi_{\Sigma'_i(\tilde{\lambda})} - \chi_{\Sigma_i(\lambda)}| \leq bM^q R^{4q^2} \nu^{-2q^2} |\eta|_{\delta'},$$

car $|\chi_{\Sigma_i}|_\delta \leq bM$; par conséquent pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$|\chi_{\Sigma'_i(\cdot)}(u) - \chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)|_{\delta'} \leq (1 + |u|)^{m_i} bM^q R^{4q^2} \nu^{-2q^2} |\eta|_{\delta'}.$$

Les estimations sur $|\chi_{\Sigma'_i}|_{\delta'}$ sont alors claires. En outre la formule précédente entraîne:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq j \leq r} |\partial_\lambda^j (\chi_{\Sigma'_i(\cdot)}(u) - \chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u))| &\leq |\chi_{\Sigma'_i(\cdot)}(u) - \chi_{\Sigma_i(\cdot)}(u)|_{\delta'} (\delta'/2)^{-r}, \\ &\leq bM^q R^{4q^2} \nu^{-2q^2} |\eta|_{\delta'} (1 + |u|)^{m_i} ((bRM\nu^{-1})^{-4q}\delta)^{-r} \\ &\leq (1 + |u|)^{m_i} (bRM\nu^{-1}\delta^{-1})^{5q^2(r+1)} |\eta|_{\delta'}. \end{aligned}$$

Des inégalités (3.12), (3.13) il vient que si η vérifie l'inégalité (3.33), alors, $\Sigma'_i(\Lambda_\delta) \subset D(0, R')$ avec $R' = R + bMR^5\nu^{-2}|\eta|_\delta^{\frac{1}{2}} (< R + 1)$. Ainsi,

- si $u \geq R' + 1$, $\chi_{\Sigma'_i}(u)$ est alors $(M', \delta', 1, 0)$ -transverse;
- sinon, $\chi_{\Sigma'_i}(u)$ est (M', δ', c_1, r) -transverse avec

$$c_1 = c - (bRM\nu^{-1}\delta^{-1})^{6q^2(r+1)} |\eta|_{\delta'}.$$

Les inégalités correspondantes pour $\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u)$, $\Delta_0(\Sigma'_i)$ se démontrent de la même façon. Faisons le pour $\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u)$: Remarquons que $|\chi_{\Sigma'_i}|_{\delta'} \leq |\chi_{\Sigma_i}|_\delta + 1 \leq 2M$;

- si $u > 2R + 1$ alors $|\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u)| > 1$ et d'autre part d'après le lemme du 3,

$$\begin{aligned} |\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u)|_{\delta'} &\leq b(1 + |u|)^{m_i m_j} (1 + |\chi_{\Sigma'_i}|_{\delta'})^{m_j} (1 + |\chi_{\Sigma'_j}|_{\delta'}^{m_i}), \\ &\leq b(1 + |u|)^{m_i m_j} M^{m_i + m_j}, \\ &\leq b(1 + |u|)^{m_i m_j} M^{2q}, \end{aligned}$$

et $\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u)$ est donc $(bM^{2q}, \delta', 1, 0)$ -transverse.

- sinon, $u < 2R + 1$ et alors d'après (3.11)

$$|\chi_{\Sigma'_i}(u) - \chi_{\Sigma_i}(u)|_{\delta'} \leq (1 + R)^{m_i} (bMR\nu^{-1})^{5q^2} |\eta|_{\delta'} \leq (bMR\nu^{-1})^{5q^2} |\eta|_{\delta'} \leq 1,$$

$$\text{et } |\chi_{\Sigma}(u)|_{\delta'} \leq (1 + R)^q |\chi_{\Sigma}|_{\delta'} \leq (bRM\nu^{-1})^{4q^2}.$$

Ainsi d'après (3.16),

$$|\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u) - \text{Res}(\Sigma_i, \Sigma_j; u)|_{\delta'} \leq (bR\nu^{-1}R^q M)^{10q^3} |\eta|_{\delta'} \leq (bR\nu^{-1}M)^{11q^4} |\eta|_{\delta'}.$$

Pour $\Delta_0(\Sigma'_i)$ il n'y a pas lieu de distinguer les deux cas précédents: il suffit de constater que, $|\Delta_0(\Sigma'_i) - \Delta_0(\Sigma_i)|_{\delta'} \leq (bRM\nu^{-1})^{10q^3} |\eta|$. Ainsi, $\text{Res}(\Sigma'_i, \Sigma'_j; u)$ et $\Delta_0(\Sigma'_i)$ sont (M', δ', c_2, r) -transverses avec

$$c_2 = c - (bRM\nu^{-1})^{11q^4} |\eta| \left(\frac{\delta'}{2}\right)^{-r} \geq c(bRM\nu^{-1}\delta^{-1})^{14q^4(r+1)} |\eta|_{\delta'}.$$

□

3.2.4.2. Lemme. *Sous les hypothèses précédentes, si la décomposition de $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ est (M, δ, c, r) -transverse, alors celle correspondant à $\Sigma'(\lambda)$ est (M', δ', c', r) -transverse avec*

$$\begin{aligned} M' &\leq M + (bMR\nu^{-1})^\kappa |\eta|_\delta, \\ \delta' &\geq (bMR\nu^{-1})^{-\kappa} \delta, \\ c' &\geq c - (bMR\nu^{-1}\delta^{-1})^{\kappa(r+1)} |\eta|_\delta, \end{aligned}$$

où $\kappa, b > 0$ sont des constantes.

La démonstration s'effectue comme précédemment. \square

4. Algèbre.

4.a. Nous considérons dans ce qui suit le cas où $G = \mathrm{SU}(w+1)$ est l'ensemble des matrices unitaires de déterminant 1. Nous noterons $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{w+1})$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_{w+1}$. Les valeurs propres de $u \in \mathrm{SU}(w+1)$ sont sur le cercle unité. Le centre de $\mathrm{SU}(w+1)$ est isomorphe à l'ensemble des racines $w+1$ -ième de l'unité. L'algèbre de Lie de $G = \mathrm{SU}(w+1)$ est $g = \mathrm{SU}(w+1)$ l'ensemble des matrices anti-hermitiennes de trace nulle et les valeurs propres des $A \in g$ sont imaginaires pures. De façon plus précise, si $A \in g$ il existe $P \in \mathrm{SU}(w+1)$ telle que

$$(4.1) \quad A = P \begin{pmatrix} (\sqrt{-1})e_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\sqrt{-1})e_{w+1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

L'ensemble

$$t = t_{A,P} = \left\{ P \begin{pmatrix} (\sqrt{-1})\mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\sqrt{-1})\mu_{w+1} \end{pmatrix} P^{-1}, \mu_j \in \mathbf{R}, \sum_{j=1}^{w+1} \mu_j = 0 \right\},$$

sera appelé un tore maximal de A : c'est une sous algèbre abélienne maximale de g contenant A . Soit à présent $H \in t_{A,P}$ dont les parties imaginaires des valeurs propres sont dans l'écriture (4.1) $e_1(H), \dots, e_{w+1}(H)$. Les $e_i(\cdot)$ sont alors des formes linéaires réelles sur t . Les valeurs propres de $\mathrm{ad}(H) \in \mathrm{gl}(g)$ sont alors les $\sqrt{-1}(e_k(H) - e_l(H))$, $1 \leq k, l \leq w+1$, c'est-à-dire si nous notons $\alpha_i(H) = e_i(H) - e_{i+1}(H)$, $1 \leq i \leq w$, 0 avec multiplicité w et les $\pm\sqrt{-1} \sum_{j=k}^l \alpha_j(H)$, $1 \leq k \leq l \leq w$.

Nous noterons $\Delta^+ \subset t^*$ l'ensemble constitué des $\sum_{j=k}^l \alpha_j$, $1 \leq k \leq l \leq w$ et $\Delta = \Delta^+ \cup (-\Delta^+)$. La famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_w)$ est alors clairement une base de t^* que nous noterons W et appellerons la base de Weyl (relative à t). Appelons $(H_1, \dots, H_w) \subset t$ la base duale pour le crochet de dualité (et non pas pour la forme de Cartan Killing) de la base de Weyl $(\alpha_1, \dots, \alpha_w)$. On a alors,

$$H_j = P \mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) P^{-1} - \frac{j}{w+1} \mathrm{Id},$$

où les 1 occupent les j premières places sur la diagonale; on peut aussi écrire,

$$H_j = P \left(\sum_{k=1}^j E_{kk} - \frac{j}{w+1} \sum_{l=0}^{w+1} E_{ll} \right) P^{-1} \in t_{A,P},$$

où on a noté E_{ij} la matrice dont les coefficients sont tous nuls sauf celui placé à la i -ième ligne et j -ième colonne qui vaut 1. Considérons à présent la situation où $A \in \text{SU}(w+1)$ admet l'écriture suivante,

$$A = P \begin{pmatrix} U_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & U_l \end{pmatrix} P^{-1},$$

P appartenant à $\text{SU}(w+1)$ et où les U_i sont anti-hermitiennes $U_i \in u(m_i)$, $\sum_{i=1}^l m_i = w+1$. Nous noterons E_1, \dots, E_l les images des projecteurs hermitiens associés, $\mathbf{C}^l = E_1 \oplus \dots \oplus E_l$, $A|E_i = U_i$ et définirons V_i comme étant l'ensemble des parties imaginaires des valeurs propres de $A|E_i$ comptées avec multiplicités. On a alors, $V_1 = \{e_1(A), \dots, e_{i_1}(A)\}$, $V_2 = \{e_{i_1+1}(A), \dots, e_{i_2}(A)\}, \dots, V_l = \{e_{i_{l-1}+1}(A), \dots, e_{w+1}(A)\}$.

Nous noterons $I = \{i_1, \dots, i_{l-1}\}$, $i_0 = 1, i_l = w+1$. On a alors le lemme immédiat suivant,

Lemme. *Pour tout $i_r, i_s \in I$, on a $[A, H_{i_r}] = 0$ et $[H_{i_r}, H_{i_s}] = 0$.*

4.b. Notons $\tilde{\pi}_A$ le polynôme caractéristique de $A \in \text{gl}(w+1, \mathbf{C})$ et $\tilde{\chi}_A$ celui de $\text{ad}(A) \in \text{gl}(g)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_A(X) &= \det(X \text{Id} - A) = \prod_{j=1}^{w+1} (X - \sqrt{-1}\lambda_j) \\ \tilde{\chi}_A(X) &= \det(X \text{Id} - \text{ad}(A)) = X^w \prod_{\alpha \in \Delta} (X - \sqrt{-1}\alpha(A)). \end{aligned}$$

Nous définissons alors

$$\begin{aligned} \pi_A(X) &= \frac{1}{(\sqrt{-1})^{w+1}} \tilde{\pi}_A(\sqrt{-1}X) = \prod_{j=1}^{w+1} (X - \lambda_j), \\ \chi_A(X) &= \frac{1}{(\sqrt{-1})^{\#\Delta} X^w} \tilde{\chi}_A(\sqrt{-1}X) = \prod_{\alpha \in \Delta} (X - \alpha(A)). \end{aligned}$$

Remarquons alors que si $A, A' \in \mathbf{C}_\delta^\omega(\Lambda, g)$, $|A - A'|_\delta \leq 1$, on a,

$$|\tilde{\chi}_A - \tilde{\chi}_{A'}|_\delta \leq C.(1 + |A|_\delta)^\kappa |A - A'|_\delta.$$

Par conséquent,

$$|\chi_A - \chi_{A'}|_\delta \leq C.(1 + |A|_\delta)^\kappa |A - A'|_\delta$$

et de même,

$$|\pi_A - \pi_{A'}|_\delta \leq C(1 + |A|_\delta)^\kappa |A - A'|_\delta,$$

où $\kappa > 0$ est une constante ne dépendant que de w . Si $A \in g$ a toutes ses valeurs propres distinctes, on sait qu'il ne passe qu'un seul tore maximal par A (on dit alors que A est régulier) et tout A' dans un voisinage de A possède la même propriété. Si on note $t_{A'}$ ce tore, l'application $A' \rightarrow t(A')$ est alors analytique sur ce voisinage. Nous donnons à présent

une généralisation classique de ce résultat dans le cas où certaines de ces valeurs propres ne sont plus distinctes. Il est alors impossible de suivre analytiquement où même continûment les tores (il peut d'ailleurs en avoir plusieurs passant par un même A) mais il est possible de contrôler la dépendance analytique de certains sous-espaces vectoriels des $t_{A'}$.

4.1. Proposition. Soit $A(\lambda) \in C_\delta^\omega(\Lambda, su(w+1))$ et supposons que $\Sigma(\lambda) = \Sigma(\pi_{A(\lambda)})$ admette une décomposition $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$, ν -séparée sur Λ , chacun des $\Sigma_i(\lambda)$ étant (M, δ) -bornés. Alors, il est possible de trouver $P \in C_{\delta'}^\omega(\Lambda, SU(w+1))$ et des matrices $U_i(\lambda)$ anti-hermitiennes dans $C_{\delta'}^\omega(\Lambda)$ telles que,

(i) pour $\lambda \in \Lambda$,

$$A(\lambda) = P(\lambda) \begin{pmatrix} U_1(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & U_l(\lambda) \end{pmatrix} P(\lambda)^{-1};$$

(ii) les applications $\lambda \mapsto P(\lambda)$ et $\lambda \mapsto U_i(\lambda)$ sont (M', δ') -bornées avec

$$M' = (bRM\nu^{-1})^\kappa, \quad \delta' = (bMR\nu^{-1})^{-\kappa}\delta,$$

où $\kappa > 0$ est une constante ne dépendant que de w .

(iii) pour tout $1 \leq j \leq l$ et $\lambda \in \Lambda$, $\Sigma(\pi_{U_j(\lambda)}) = \Sigma_j(\lambda)$.

Démonstration. – Il suffit d'utiliser le fait que le projecteur hermitien sur la somme des espaces propres associés à $\Sigma_j(\lambda)$ est donné par,

$$Q_j(\lambda) = \int_{\gamma(\lambda)} (A(\lambda) - z \cdot \text{Id})^{-1} dz,$$

où $\gamma(\lambda)$ est un lacet entourant $\Sigma_j(\lambda)$ et le ν -séparant des $\Sigma_k(\lambda)$, $k \neq j$. Il suffit alors de procéder comme en 3.1.2 et 3.2.4. \square

5. Elimination des résonances dans le cas $SU(w+1)$. Nous décrivons dans cette section la procédure d'élimination des résonances dans le cas où $G = SU(w+1)$. La méthode s'inspirant fortement de [5] chap. 5, nous faisons auparavant quelques rappels.

Note. – Dans ce qui suit $\Sigma(A)$ désignera l'ensemble des racines (des $\alpha(A)$, $\alpha \in \Delta$) de $A \in su(w+1)$ comptées avec multiplicités et $V(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A comptées avec multiplicités.

Remarque: Nous dirons que $A \in C_\delta^\omega(\Lambda, g)$ admet des (Σ, V) -décompositions (M, δ, c, r) -transverses, (ν, ζ) -séparées s'il existe des décompositions

$$\Sigma(A(\lambda)) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_\Sigma}(\lambda) \quad \text{et} \quad V(A(\lambda)) = V_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup V_{l_V}(\lambda)$$

qui sont (M, δ, c, r) -transverses, (ν, ζ) -séparées.

5.1. Rappels. Rappelons que nous avons fixé $\omega \in CD(\gamma, \sigma)$ c'est-à-dire que,

$$\forall k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}, \quad |(k, \omega)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma}.$$

Soient N, K des réels positifs et P un entier plus grand que 1. Notons,

$$DS_\omega(N, K, P) = \left\{ \alpha \in \mathbf{R}, \forall 0 < |k| \leq N, \left| \alpha - \left(\frac{k}{P}, \omega \right) \right| > K^{-1}, \right\},$$

et $RS_\omega(N, K, P)$ son complémentaire. Nous noterons, ω étant fixé, ces ensembles $DS(N, K, P)$, $RS(N, K, P)$.

Rappelons (cf. [5] chap. 5) les résultats faciles suivants:

5.1.1. Lemme. Soient $N' \geq N \geq 1$:

- (i) si $K > 2^{1+\sigma} \gamma P(N')^\sigma$, et si $\alpha \in RS(N, K, P)$ alors il existe un unique $k_0 \in \mathbf{Z}^d$, $0 < |k_0| \leq N$ tel que $|\alpha - (\frac{k_0}{P}, \omega)| \leq K^{-1}$ et dans ce cas, $|\alpha - (\frac{k_0}{P}, \omega)| \in DS(N', K, P)$;
- (ii) si $\alpha \in DS(N, K, P)$ alors pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$, $\alpha - (\frac{k}{P}, \omega) \in DS(N - |k|, K, P)$;
- (iii) si un $(\frac{k}{P}, \omega) \in DS(N, K, P)$ avec $|k| \leq N$ alors $k = 0$.

Supposons donnés deux entiers $q, D > 0$ et un réel $a > 0$. Définissons pour tout entier $N > 0$ une suite de $q + 2$ entiers, $N_0 = N, N_1, \dots, N_{q+1}$ tels que,

$$(5.1) \quad N_{i+1} \geq aN_i, \quad 0 \leq i \leq q.$$

5.1.2. Définition. Soient $1 \leq p \leq q$ un entier, $J_{\text{res}} \subset \{1, \dots, q\}$ un ensemble d'indices et $k : J_{\text{res}} \rightarrow \mathbf{Z}^d$ une application telle que, $|k_j| \leq N_p$ pour $j \in J_{\text{res}}$ (en notant $k_j = k(j)$). Nous dirons que $(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \mathbf{R}^q$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{H}_{a,q,D}(p, J_{\text{res}}, k)$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}_{a,q,D}(p, J_{\text{res}}, k)$) si pour tout $j \in J_{\text{res}}$, on a $|\sigma_j - (\frac{k_j}{D^p}, \omega)| \leq K^{-1}$ (resp. $|\sigma_j - (\frac{k_j}{D^p}, \omega)| \leq 2K^{-1}$) et pour tout $j \in \{1, \dots, q\} \setminus J_{\text{res}}$ on a $\sigma_j \in DS(N_{p+1}, K, D^{p+1})$ (resp. $\sigma_j \in DS(N_{p+1}, 2K, D^{p+1})$).

Si les conditions précédentes sont vérifiées pour une famille $\lambda \mapsto (\sigma_1(\lambda), \dots, \sigma_q(\lambda))$ λ décrivant Λ , nous dirons que l'hypothèse est vérifiée sur Λ .

5.1.3. Lemme. Pour tout $(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \mathbf{R}^q$, il existe toujours $0 \leq p \leq q$, J_{res}, k , pour lesquels l'hypothèse $\mathcal{H}_{a,q,D}(p, J_{\text{res}}, k)$ est vérifiée (donc $\tilde{\mathcal{H}}$ aussi).

Considérons maintenant un espace vectoriel \hat{t} réel de dimension \hat{w} sur lequel sont définies $\hat{q} \geq \hat{w}$ formes linéaires $\{\beta_1, \dots, \beta_{\hat{q}}\} = \hat{B}$ et supposons que les $\{\beta_1, \dots, \beta_{\hat{w}}\} = \hat{W}$ constituent une base du dual \hat{t}^* ; nous noterons $(\hat{H}_i)_{1 \leq i \leq \hat{w}} \subset \hat{t}$ une base duale de \hat{W} . Faisons en outre l'hypothèse qu'il existe des entiers $m_{ij} \in \mathbf{Z}$, $(i, j) \in \{\hat{w} + 1, \dots, \hat{q}\} \times \{1, \dots, \hat{w}\}$,

tels que pour tout $\hat{w} + 1 \leq i \leq \hat{q}$, $\beta_i = \sum_{j=1}^{\hat{w}} m_{ij} \beta_j$.

Si ν est une matrice inversible extraite de la matrice (m_{ij}) , son inverse est à coefficients rationnels; comme les ν sont en nombre fini, on peut supposer qu'il existe des entiers $\hat{D} \geq 1$ et $\hat{b} \geq 1$ tels que les coefficients de ν sont de la forme $\frac{x}{\hat{D}}$ avec $|x| \leq \hat{b}$, $x \in \mathbf{Z}$; nous supposons également \hat{b} choisi assez grand pour que $\max(|m_{ij}|) \leq \hat{b}$. Posons $\hat{a} = 4(1 + \hat{b})^2(\hat{q} + 1)^3 2^{1+\hat{q}\sigma} \gamma \hat{D}^{1+\tau}$ et définissons pour tout entier $N > 0$, une suite de $q + 2$ entiers N_0, \dots, N_{q+1} , tels que $N_{i+1} \geq \hat{a}N_i$, $N_0 = N$. Nous poserons également $\hat{Q} = 2^{1+\hat{q}}(2 + \hat{q})^3$.

Donnons nous $(\sigma_1, \dots, \sigma_{\hat{q}}) \in \mathbf{R}^{\hat{q}}$: Nous avons alors (cf. [5] chap. 5):

5.1.4. Proposition. Soit $K > 20(q + 1)^2 2^{1+\sigma} \gamma N_q^\sigma$ et $A \in \hat{t}$; alors si $(\beta_1(A), \dots, \beta_{\hat{q}}(A))$ vérifie l'hypothèse $\tilde{\mathcal{H}}_{\hat{a}, \hat{q}, \hat{D}}(p, J_{\text{res}}, k)$, il existe des entiers $\tilde{k}_i \in \mathbf{Z}^d$, $1 \leq i \leq \hat{w}$ vérifiant

$|\tilde{k}_i| \leq \hat{Q}N_p$ et tels que si l'on pose $\tilde{A} = A - \sum_{i=1}^{\hat{w}} \left(\frac{\tilde{k}_i}{\hat{D}^p}, \omega \right) \hat{H}_i$, on ait pour tout $j \leq \hat{q}$, $\beta_j(\tilde{A}) \in DS((1/2)N_{p+1}, 2K, \hat{D}^{p+1})$. En outre $|\tilde{A}| \leq Q(1 + |A|)$ et les entiers \tilde{k}_i ne dépendent que des entiers $k_j = k(j)$ intervenant dans l'hypothèse $\mathcal{H}_{\hat{a}, \hat{q}, \hat{D}}(p, J_{\text{res}}, k)$.

5.2. Applications. Donnons nous $A \in C_\delta^\omega(\Lambda, su(w+1))$ qui admet une décomposition $V(A(\lambda)) = V_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup V_{l_V}(\lambda)$, (ν, ζ) -séparée et (M, δ, c, r) -transverse. On sait alors qu'il existe $P \in C_\delta^\omega(\Lambda, SU(w+1))$ et des $U_i \in C_\delta^\omega(\Lambda, u(m_i))$, $1 \leq i \leq l_V$, $m_1 + \dots + m_{l_V} = w+1$ telles que,

$$A(\lambda) = P(\lambda) \begin{pmatrix} U_1(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & U_{l_V}(\lambda) \end{pmatrix} P(\lambda)^{-1};$$

nous notons encore $C^{w+1} = E_1(\lambda) \oplus \dots \oplus E_{l_V}(\lambda)$ la décomposition associée,

$$A(\lambda)|_{E_i(\lambda)} = U_i(\lambda), \quad \Sigma(\pi_{U_i(\lambda)}) = V_i(\lambda)$$

et notons $I = \{i_1, \dots, i_{l_V-1}\}$ l'ensemble défini en 4. Fixons $\lambda \in \Lambda$, notons $A = A(\lambda)$, $\Sigma = \Sigma(A(\lambda))$, etc. et posons $t = t_{A,P}$,

$$W_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_w),$$

$$B_1 = \left\{ \sum_{i=k}^l n_i \alpha_i, 1 \leq k \leq l \leq w, |n_i| \leq 2q \right\},$$

où $q = \deg \Sigma$. Ceci permet de définir en reprenant les notations de la section 5.1, des entiers D_1 , $q_1 = q$ ($q = \deg \Sigma$), un réel $a_1 > 0$ et pour tout $N > 0$ des $N_0 (= N), N_1, \dots, N_{q+1}$. Nous noterons $Q = Q_1$.

Nous pouvons toujours suivre continûment les éléments de $\Sigma(A(\lambda)) = (\sigma_1(\lambda), \dots, \sigma_q(\lambda))$; nous dirons alors que $\lambda \mapsto A(\lambda)$ vérifie l'hypothèse $\tilde{\mathcal{H}}_{a_1, q, D_1}(p, J_{\text{res}}, k)$ sur Λ si elle est vérifiée pour tout $(\sigma_1(\lambda), \dots, \sigma_q(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$.

Ceci étant on peut énoncer,

5.2.1. Lemme. *Supposons que $A \in C_\delta^\omega(\Lambda, g)$ admette des décompositions $\Sigma(A(\lambda)) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_\Sigma}(\lambda)$ et $V(A(\lambda)) = V_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup V_{l_V}(\lambda)$, (M, δ, c, r) -transverses et (ν, ζ) -séparées. Supposons en outre que l'hypothèse $\tilde{\mathcal{H}}_{a_1, q, D}(p, J_{\text{res}}, k)$ soit satisfaite sur Λ et que,*

$$(5.2) \quad \zeta < \frac{1}{100q} K^{-1}.$$

Alors, il existe pour tout $1 \leq i \leq l_V$, des $H_i \in C_\delta^\omega(\Lambda, g)$ et des entiers $\tilde{k}_i \in \mathbf{Z}^d$ vérifiant,

- (i) $|\tilde{k}_i| \leq QN_p$;
- (ii) si on pose $\tilde{A}(\lambda) = A(\lambda) - \sum_i \left(\frac{\tilde{k}_i}{D^{p+1}}, \omega \right) H_i(\lambda)$, on a, pour tout $j \leq q$,

$$\alpha_j(\tilde{A}) \in DS((1/2)N_{p+1}, 4K, D^{p+1}), \quad |\tilde{A}(\cdot)| \leq a_4(1 + |A(\cdot)|),$$

où $a_4 > 0$ est une constante;

(iii) il existe des entiers $y_i^\Sigma \in \mathbf{Z}^d$, $1 \leq i \leq l_\Sigma$, et $y_j^V \in \mathbf{Z}^d$, $1 \leq j \leq l_V$ tels que

$$\max(|y_i^\Sigma|, |y_j^V|) \leq a_4 N,$$

pour lesquels

$$\Sigma(\chi_{\tilde{A}(\lambda)}) = \bigcup_{i=1}^{l_\Sigma} (\Sigma_i(\lambda) - y_i^\Sigma), \quad \Sigma(\pi_{\tilde{A}(\lambda)}) = \bigcup_{j=1}^{l_V} (V_j(\lambda) - y_j^V),$$

les décompositions précédentes n'étant plus forcément séparées.

(iv) Les applications $\lambda \mapsto H_i(\lambda)$ sont (M', δ') , avec

$$M' = (bMR\nu^{-1})^\kappa, \quad \delta' = (bMR\nu^{-1})^{-\kappa}\delta, \quad |\tilde{A}(\cdot)|_{\delta'} \leq b(1 + |A(\cdot)|_\delta),$$

où a_4, b, κ sont des constantes positives.

Démonstration. – Reprenons les notations précédentes, fixons $\lambda \in \Lambda$ et notons $A = A(\lambda)$, $\Sigma = \Sigma(\lambda)$, etc. Nous noterons Δ l'ensemble des racines de $A|t$.

Rappelons qu'alors, $\Sigma(A) = \{\pm \sum_{k=l}^m \alpha_k(A), 1 \leq l \leq m \leq w\}$ où $\alpha_k = e_k - e_{k+1}$, $1 \leq k \leq w$. Il en résulte donc que si $i_k < t < i_{k+1}$, ($0 \leq k \leq w$), alors $t \notin I$ et,

$$(5.3) \quad |\alpha_t(A)| = |e_t(A) - e_{t+1}(A)| \leq \zeta,$$

puisque chaque V_i est de diamètre $\leq \zeta$. Considérons à présent la relation d'équivalence sur $I = \{i_1, \dots, i_{l_V-1}\}$, $i_k \mathcal{R} i_{k'}$ si et seulement si il existe $1 \leq j \leq l_\Sigma$ tel que $\alpha_{i_k}(A)$ et $\alpha_{i_{k'}}(A)$ appartiennent à Σ_j , et notons J_1, \dots, J_s les classes d'équivalence associées. Ainsi on a une partition $I = \{i_1, \dots, i_{l_V-1}\} = J_1 \cup \dots \cup J_s$. Notons j_r , $1 \leq r \leq s$ un représentant dans chaque classe J_r : pour tout $\alpha \in \Delta$, si $\alpha(A) \in J_r$ on a,

$$(5.4) \quad |\alpha(A) - \alpha_{j_r}(A)| \leq \zeta,$$

puisque les Σ_i sont de diamètres inférieurs à ζ .

Posons

$$t_2 = \text{Vect}_{\mathbf{R}}(H_{j_1}, \dots, H_{j_s}),$$

$$W_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_s\} := \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_s}\} \subset t_0^*,$$

$$B_2 = \{n_1 \alpha_{j_1} + \dots + n_s \alpha_{j_s}, 0 \leq |n_r| \leq 2\#J_r, 1 \leq r \leq s\}.$$

Remarquons que $W_2 \subset B_2 \subset t_2^*$ et que W_2 est une base de t_2^* . La section 5.1 nous dit comment construire des a_2, D_2, q_2 . Comme $W_2 \subset W_1$ et $B_2 \subset B_1$, $t_2 \subset t_1$, il est clair que l'hypothèse $\tilde{\mathcal{H}}_{a_1, q_1, D_1}$ implique l'hypothèse $\tilde{\mathcal{H}}_{a_2, q_2, D_2}$. On peut en particulier appliquer la proposition 5.1.4 dans ce contexte à,

$$A_1 = \sum_{r=1}^s \alpha_{j_r}(A) H_{j_r} \in t_2.$$

Il existe donc des entiers $\tilde{k}_i \in \mathbf{Z}^d$, $|\tilde{k}_i| \leq QN_p$, tels que si l'on pose,

$$\tilde{A}_1 = A_1 - \sum_{r=1}^s \left(\frac{\tilde{k}_r}{D^{p+1}}, \omega \right) H_{j_r} = A_1 - H_1,$$

on a $\forall \beta \in B_2$, $\beta(\tilde{A}_1) \in DS((1/2)N_{p+1}, 2K, D^{p+1})$. Définissons à présent,

$$H = \sum_{r=1}^s \left(\frac{\tilde{k}_r}{D^{p+1}}, \omega \right) \sum_{u \in J_r} H_u,$$

et montrons que H satisfait aux conclusions de la proposition. Soit $\alpha \in \Delta^+$; on peut l'écrire $\alpha = \alpha_k + \dots + \alpha_l$, $1 \leq k \leq l \leq w$, c'est-à-dire,

$$\alpha = \sum_{\substack{t \notin I \\ k \leq t \leq l}} \alpha_t + \sum_{r=1}^s \sum_{\substack{u \in J_r \\ k \leq u \leq l}} \alpha_u,$$

donc, vu que si $t \notin I$, $\alpha_t(H) = 0$, on a

$$\alpha(A - H) = \sum_{\substack{t \notin I \\ k \leq t \leq l}} \alpha_t(A) + \sum_{r=1}^s \sum_{\substack{u \in J_r \\ k \leq u \leq l}} \alpha_u(A - H).$$

Notons $\tilde{\alpha} = \sum_{r=1}^s \#(J_r \cap [k, l]) \cdot \alpha_{j_r}$; alors

$$\begin{aligned} \alpha(A - H) &= \sum_{\substack{t \notin I \\ t \in [k, l]}} \alpha_t(A) + \sum_{r=1}^s \sum_{u \in J_r \cap [k, l]} (\alpha_u(A - H) - \alpha_{j_r}(A - H)) \\ &\quad + \sum_{r=1}^s \#(J_r \cap [k, l]) \alpha_{j_r}(A - H). \end{aligned}$$

de (5.3) on déduit,

$$\left| \sum_{\substack{t \notin I \\ t \in [k, l]}} \alpha_t(A) \right| \leq q\zeta,$$

et de (5.4),

$$\left| \sum_{r=1}^s \sum_{u \in J_r \cap [k, l]} (\alpha_u(A - H) - \alpha_{j_r}(A - H)) \right| \leq q\zeta,$$

car pour tout $u \in J_r \cap [k, l]$, $\alpha_u(H) = \alpha_{j_r}(H)$. Par conséquent,

$$(5.5) \quad |\alpha(A - H) - \tilde{\alpha}(A - H)| \leq 2q\zeta.$$

Remarquons que si on note $n_r = \#(J_r \cap [k, l])$, on a $\tilde{\alpha} = \sum_{r=1}^s n_r \alpha_{j_r} \in B_2$, si bien que, $\tilde{\alpha}(A_1 - H_1) \in DS((1/2)N_{p+1}, 2K, D^{p+1})$, et donc

$$\tilde{\alpha}(A - H) \in DS((1/2)N_{p+1}, 2K, D^{p+1})$$

($\tilde{\alpha}(H) = \tilde{\alpha}(H_1)$). Comme $2q\zeta < K^{-1}/2$, (5.5) montre que,

$$\alpha(A - H) \in DS((1/2)N_{p+1}, 4K, D^{p+1}),$$

ce qui montre (i).

Soient à présent $\alpha, \alpha' \in \Delta$ telles que $\alpha(A)$ et $\alpha'(A)$ appartiennent à un même Σ_i . Il s'agit de voir que $\alpha(H) = \alpha'(H)$, ne dépend que de Σ_i : ce sera le réel y_i^Σ . Écrivons donc,

$$\alpha = \sum_{j=k}^l \alpha_j, \quad \alpha' = \sum_{j=k'}^{l'} \alpha_j, \quad 1 \leq k \leq l \leq w, \quad 1 \leq k' \leq l' \leq w.$$

Par définition de B_2 on a clairement $\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}' \in B_2$ puisque $\#(J_r \cap [k, l]) + \#(J_r \cap [k', l']) \leq 2\#J_r$; par conséquent, comme $(\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}')(A - H) = (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}')(A_1 - H_1)$, on a,

$$(5.6) \quad (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}')(A - H) \in DS((1/2)N_{p+1}, 2K, D^{p+1}).$$

En outre d'après (5.5), $|(\alpha - \alpha')(A - H) - (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}')(A - H)| \leq 4q\zeta$, et comme $\alpha(H), \alpha'(H) \in \Sigma_i$, $|\alpha(A) - \alpha'(A)| \leq \zeta$, ce qui entraîne,

$$(5.7) \quad |\alpha(H) - \alpha'(H) - (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}')(A - H)| \leq 5q\zeta.$$

Mais, $5q\zeta < (1/2)K^{-1}$ et par conséquent,

$$\alpha(H) - \alpha'(H) \in DS((1/2)N_{p+1}, 4K, D^{p+1}).$$

Or par définition de H ,

$$\alpha(H) - \alpha'(H) = \sum_i \left(\frac{x_i}{D^{p+1}}, \omega \right) = \left(\frac{x}{D^{p+1}}, \omega \right),$$

avec $x \in \mathbf{Z}^d$, $|x| \leq 2qQN_p \leq (1/2)N_{p+1}$, ce qui entraîne d'après le lemme 5.1.1 que $x = 0 = \alpha(H) - \alpha'(H)$.

Le (ii) est donc montré avec $y_i^\Sigma = \alpha(H)$ pour α tel que $\alpha(A) \in \Sigma_i$. Le (iii) vient du fait que $H|E_i$ est donc de la forme, $y_i^V \cdot Id$ puisque chaque $H_{j_r}|E_i$ est de cette forme.

(iv) D'après l'estimation du (i) pour $\lambda \in \Lambda$ (réel) on a,

$$|\tilde{A}(\lambda)| \leq a_4(1 + |A(\lambda)|).$$

Par ailleurs la proposition 4.1 montre qu'il existe M_1, δ_1 ,

$$M_1 = (bMR\nu^{-1})^\kappa, \quad \delta_1 = (bMR\nu^{-1})^{-\kappa}\delta,$$

pour lesquels $H_i(\cdot)$ est (M_1, δ_1) -bornée. Par conséquent, quitte à changer les constantes κ, b , il est clair que $\tilde{A}(\cdot)$ est $(bM_1(1 + |A|_\delta), \delta_1)$ -bornée. Soit alors $\delta_2 < \delta_1$ et appliquons le théorème des accroissements finis entre un point $\lambda \in \Lambda$ et $z \in W_{\delta_2}(\Lambda)$ (on fait usage des inégalités de Cauchy) tels que $|z - \lambda| \leq \delta_2$; on obtient:

$$|\tilde{A}(z) - \tilde{A}(\lambda)| \leq (bM_1(1 + |A|_\delta)) \cdot \delta_2 \cdot \frac{M_1}{\delta_1},$$

si bien que si $\delta_2 \leq \frac{\delta_1}{M_1}$ on a $|\tilde{A}(z)| \leq b(1 + |A|_\delta)$, où $b > 0$ est une autre constante. Quitte à changer les constantes κ, b ceci prouve (iv). \square

6. Lemmes de conjugaisons. Nous renvoyons le lecteur pour les démonstrations des deux propositions qui suivent à [5] chap. 6 (cas $G = \text{SO}(3)$ en classe analytique) et à [5] chap. 5 (cas général en classe C^∞). Nous supposons dans ce qui suit (et en reprenant les notations de la section 5) qu'il existe un réel $\tau_1 > 0$ tel que,

$$2^{1+\sigma} \gamma P N_{q+1}^\sigma < K \leq N^{\tau_1}.$$

6.1. Cas diophantien. La proposition que nous présentons est à la base de la méthode KAM dont nous avons parlé dans l'introduction.

6.1.1. Proposition. *Il existe des constantes a_7, b positives pour lesquelles ce qui suit est vrai. Soient $\Lambda \subset \mathbf{R}$ un intervalle, $A \in C_\delta^\omega(\Lambda, g)$, et $F \in C_{h,\delta}^\omega(\mathbf{R}^d/P\mathbf{Z}^d \times \Lambda, g)$ où $P \geq 1$ est un entier. Supposons que:*

- a) $|A|_\delta \leq \Gamma$, où $1 \leq \Gamma \leq M$;
- b) pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\Sigma_A(\lambda) \in DS_\omega(N, K, P)$;
- c) $(b\Gamma NP)^{a_7} \frac{|F|_{h,\delta}}{(h-h')^d} < 1$ (en particulier $|F|_{h,\delta} \leq 1$). Alors, il existe $\delta' > 0$, $Y \in C_{h,\delta'}^\omega(\mathbf{R}^d/P\mathbf{Z}^d \times \Lambda, g)$, $A' \in C_{\delta'}^\omega(\Lambda, g)$ et $F' \in C_{h,\delta'}^\omega(\mathbf{R}^d/P\mathbf{Z}^d \times \Lambda, g)$ tels que,
 - (i) $\delta' = b(N\Gamma)^{-a_7} \delta$,
 - (ii) $A' + F' \mathcal{R}(e^Y)A + F$,
 - (iii) $A'(\lambda) = A(\lambda) + \hat{F}(0, \lambda)$,
 - (iv) pour tout $0 < h' < h$,

$$|F'|_{h',\delta'} \leq \frac{P^{2d}(b\Gamma N)^{a_7}}{(h-h')^{2d}} |F|_{h,\delta}^2 + bP^d \frac{e^{-2\pi NP^{-1}(h-h')}}{(h-h')^d} |F|_{h,\delta}.$$

6.2. Cas général. Dans tout ce qui suit nous supposons donné $A(\cdot) \in C_h^\omega(\Lambda, g)$ qui satisfait l'hypothèse \mathcal{H} suivante:

Hypothèse \mathcal{H} .

- a) A admet des décompositions $\Sigma(A(\lambda)) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_\Sigma}(\lambda)$ et $V(A(\lambda)) = V_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup V_{l_V}(\lambda)$ qui sont (M, δ, c, r) -transverses (ν, ζ) -séparées, telles que $V(A(\Lambda_\delta)), \Sigma(A(\Lambda_\delta)) \subset D(0, R)$; en outre,
- b) $\zeta \leq \frac{1}{100q} K^{-1}$,
- c) il existe (p, J_{res}, k) pour lesquels $A(\cdot)$ satisfait l'hypothèse $\tilde{\mathcal{H}}_{a_1, q, D}(p, J_{\text{res}}, k)$.

Soit en outre $F \in C_{h,\delta}^\omega(\Lambda \times \mathbf{R}^d/P\mathbf{Z}^d, g)$; posons

$$B(\lambda, \theta) = \exp \left(- \sum_{i=1}^w \left(\frac{k_i}{PD^{p+1}}, \theta \right) H_i(\lambda) \right),$$

$$\tilde{F}(\lambda, \cdot) = \text{Ad}(B(\lambda, \cdot)).F(\cdot).$$

On a alors $\tilde{A} + \tilde{F} \mathcal{R}(B)A + F$.

Remarquons que \tilde{F} est $PD^{p+1}\mathbf{Z}^d$ -périodique (B étant $c_G PD^{p+1}\mathbf{Z}^d$ -périodique). On peut alors appliquer le lemme 5.1 à $\tilde{A} + \tilde{F}$ pour obtenir $A' + F'$ conjugué à $A + F$ avec $F' \in C^\omega(\Lambda \times \mathbf{R}^d/PD^{p+1}\mathbf{Z}^d, g)$. Si on prend en compte le paramètre λ les estimations sont données par la proposition suivante:

6.2.1. Proposition. Soient $\Lambda \subset \mathbf{R}$, $A(\cdot) \in C_h^\omega(\Lambda, g)$ satisfaisant l'hypothèse \mathcal{H} ci-dessus et $F \in C_{h,\delta}^\omega(\Lambda \times \mathbf{R}^d/P\mathbf{Z}^d, g)$. Supposons que $|A|_\delta \leq \Gamma \leq M$ et que

$$(6.2) \quad (bNMP\nu^{-1})^{a_7} |F|_{h,\delta} (h - h')^{-d} \leq 1,$$

puis posons $\delta' = (bNMP\nu^{-1})^{-a_7} \delta$.

Alors il existe, $A' \in C_{\delta'}^\omega(\Lambda, g)$, $\tilde{F}, F' \in C_{h,\delta'}^\omega(\mathbf{R}^d/D^{p+1}P\mathbf{Z}^d \times \Lambda, g)$ tels que,

- (i) pour tout $\lambda \in \Lambda$, $A' + F'$, $\tilde{A} + \tilde{F}$ et $A + F$ sont conjugués;
- (ii) pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\tilde{A}(\lambda) \in DS_\omega((1/2)N_{p+1}, 4K, D^{p+1}P) = DS_{\frac{\omega}{2}}((1/2)N_{p+1}, 4K, D^{p+1});$$

- (iii) pour tout $\lambda \in \Lambda$, $A'(\lambda) = \tilde{A}(\lambda) + \tilde{F}(0, \lambda)$;
- (iv) pour tout $h' < h$, $|\tilde{F}|_{h'} \leq be^{2\pi P^{-1}D^{-(p+1)}QN_p h'} |F|_h$, où Q est l'entier intervenant dans la proposition 5.2.2 (élimination des résonances);
- (v) on a $\Gamma' := |A'|_{\delta'} \leq b\Gamma + |\tilde{F}|_{h,\delta'}$, et pour tout $0 < h' < h$,

$$\begin{aligned} |F'|_{h',\delta'} \leq & P^{2d} D^{2d(p+1)} (b\Gamma N_{p+1})^{a_7} e^{2\pi P^{-1}QN_p \frac{h'}{D^{p+1}}} \frac{|F|_{h,\delta}^2}{(h - h')^{2d}} \\ & + bP^d D^{d(p+1)} \frac{e^{-2\pi(N_{p+1} - QN_p) \frac{(h-h')}{PD^{p+1}}} e^{2\pi QN_p \frac{h}{PD^{p+1}}}}{(h - h')^d} |F|_{h,\delta}. \end{aligned}$$

Nous ne donnerons pas la démonstration de cette proposition qui résulte des estimations de [5] chap. 6.

6.3. Contrôle de la transversalité. En utilisant les résultats de la section 3 on peut préciser dans la proposition précédente le contrôle de la transversalité. Dans toute la section 6.3 nous supposerons les hypothèses de la section 6.2.1 vérifiées ce qui nous permet de définir \tilde{F}, F' , etc. Par ailleurs pour simplifier les estimations nous supposerons, ce qui est toujours possible, que $r \geq 1$.

6.3.1. Proposition (Accrétion et perturbation des racines). Supposons l'hypothèse \mathcal{H} vérifiée sur Λ (ce qui suppose la donnée d'un N) et supposons que:

- d) $\epsilon < (bRM\nu^{-1})^{-\kappa}$, où on a noté $\epsilon = |F|_{h,\delta}$
- e) $\nu + 2\zeta < 1$

Alors, il existe une partition Π de Λ en intervalles $\tilde{\Lambda}$ et sur chaque $\tilde{\Lambda}$ des décompositions (ν', ζ') -séparée et (M', δ', c', r') -transverses,

$$\begin{aligned} \Sigma(A'(\lambda)) &= \Sigma'_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma'_{l'_\Sigma}(\lambda), \\ V(A'(\lambda)) &= V'_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup V'_{l'_V}(\lambda), \\ \Sigma(A'(\tilde{\Lambda}_\delta)), V(A'(\tilde{\Lambda}'_\delta)) &\subset D(0, R') \end{aligned}$$

pour lesquelles ce qui suit est vrai:

(i) soit $l'_\Sigma = l_\Sigma$, auquel cas $l'_V = l_V$ et on a alors,

$$\begin{aligned} R' &= b(R + N), & M' &= (bR)^\kappa M + (bMR\tilde{\nu}^{-1})^\kappa |\eta|_\delta, \\ \delta' &= (bMNR\tilde{\nu}^{-1})^{-\kappa} \delta, & c' &= c - (bMRN\tilde{\nu}^{-1}\delta^{-1})^{\kappa r} |\eta|_\delta, \\ \nu' &= \tilde{\nu} - (bMR\tilde{\nu}^{-1})^\kappa |\eta|_\delta^{\frac{1}{\kappa}}, & \zeta' &= \zeta + q(bMR\tilde{\nu}^{-1})^\kappa |\eta|_\delta^{\frac{1}{\kappa}}, \\ r' &= r, \end{aligned}$$

où $\tilde{\nu} = \inf(\nu, \frac{c}{2})$.

(ii) Soit $l'_\Sigma < l_\Sigma$, et alors,

$$\begin{aligned} R' &= b(R + N), & M' &= (RM)^\kappa + (bMR\tilde{\nu}^{-1})^\kappa |\eta|_\delta, \\ \delta' &= b(MNR\tilde{\nu}^{-1})^{-\kappa} \delta, & r' &= q^2 r, \\ \nu' &= \tilde{\nu} - (bMR\tilde{\nu}^{-1})^\kappa |\eta|_\delta^{\frac{1}{\kappa}}, & \zeta' &= q\zeta + \tilde{\nu}^{\frac{1}{\kappa}} + (bMR\tilde{\nu}^{-1})^\kappa |\eta|_\delta^{\frac{1}{\kappa}}, \\ c' &= ((bMRN)^{-1}\delta\tilde{\nu}c)^{\kappa r} - (bMR\tilde{\nu}^{-1}N\delta^{-1})^{\kappa r} |\eta|_\delta, \end{aligned}$$

et il n'y a pas d'autres cas possibles. En outre,

$$\#\Pi \leq b(1 + |\Lambda|)(bNRM\delta^{-1})^{\kappa r}.$$

Démonstration. – A) *Séparation des amas accrés:* Le lemme 5.2.1 montre qu'il existe des réels y_i^Σ , $1 \leq i \leq l_\Sigma$ et y_j^V , $1 \leq j \leq l_V$ tels que, $\max_{i,j}(|y_i^\Sigma|, |y_j^V|) \leq a_4 N$, et pour lesquels,

$$\Sigma(\chi_{\tilde{A}(\lambda)}) = \bigcup_{i=1}^{l_\Sigma} (\Sigma_i(\lambda) - y_i^\Sigma), \quad V(\pi_{\tilde{A}(\lambda)}) = \bigcup_{i=1}^{l_V} (V_i(\lambda) - y_i^V).$$

Notons, $\tilde{\Sigma}_i(\lambda) = \Sigma_i(\lambda) - y_i^\Sigma$, $\tilde{V}_j(\lambda) = V_j(\lambda) - y_j^V$. Puisque $\Sigma(\lambda) \subset (-R, R)$ on a $\tilde{\Sigma}(\lambda) = \Sigma(\chi_{\tilde{A}(\lambda)}) \subset (-\tilde{R}, \tilde{R})$ avec $\tilde{R} = R + \max_{1 \leq i \leq l_\Sigma} (|y_i^\Sigma|) \leq (1 + a_4)R$.

Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, l_\Sigma\}^2$, définissons,

$$E_{i,j} = \{\lambda \in \Lambda, \text{Res}(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_j(\lambda)) = (2\zeta + \nu)^{m_i m_j - 1} \nu\},$$

et posons $E = \cup_{i,j} E_{i,j}$; soit Π l'ensemble des composantes connexes de $\Lambda - E$.

Nous verrons plus loin (voir E) plus bas) que E est fini et estimerons son cardinal.

Remarquons :

6.3.1.1. Lemme. Soit $\lambda \in \Lambda$. (i) si $|\text{Res}(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_j(\lambda))| > (2\zeta + \tilde{\nu})^{m_i m_j - 1} \tilde{\nu}$, alors, $\text{dist}(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_j(\lambda)) > \tilde{\nu}$. (ii) sinon, il existe $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) \in \tilde{\Sigma}_i \times \tilde{\Sigma}_j$ tel que,

$$|\tilde{\sigma} - \tilde{\tau}| < (2\zeta + \nu)^{1 - \frac{1}{m_i m_j}} \tilde{\nu}^{\frac{1}{m_i m_j}}.$$

Démonstration. – (ii) est évident. Démontrons (i). Il suffit de remarquer que s'il existait $(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\tau}_0) \in \tilde{\Sigma}_i \times \tilde{\Sigma}_j$ tel que, $|\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\tau}_0| < \nu$, alors on aurait pour tout

$(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) \in \tilde{\Sigma}_i \times \tilde{\Sigma}_j - \{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\tau}_0)\}$, $|\tilde{\sigma} - \tilde{\tau}| \leq |\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_0| + |\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\tau}_0| + |\tilde{\tau}_0 - \tilde{\tau}| \leq 2\zeta + \nu$, car par définition $\text{diam}(\tilde{\Sigma}_i) \leq \zeta$. Ainsi,

$$|\text{Res}(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_j(\lambda))| = |\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\tau}_0| \prod_{(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) \neq (\tilde{\sigma}_0, \tilde{\tau}_0)} |\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\tau}_0| \leq (2\zeta + \nu)^{m_i m_j - 1} \nu.$$

□

Nous pouvons alors définir pour toute composante connexe $\tilde{\Lambda} \in \Pi$ la relation définie par: $i\mathcal{R}j$ si et seulement si $|\text{Res}(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_j(\lambda))| < (2\zeta + \tilde{\nu})^{m_i m_j - 1} \tilde{\nu}$, ainsi que le graphe (non orienté) $\Gamma_{\tilde{\Lambda}}$ associé. Appelons $l'_{\tilde{\Sigma}} \leq l_{\tilde{\Sigma}}$ le nombre de composantes connexes maximales de ce graphe et définissons pour chacune de ces composantes connexes C_k , $1 \leq k \leq l'_{\tilde{\Sigma}}$ l'ensemble, $\hat{\Sigma}_k(\lambda) = \bigcup_{i \in C_k} \tilde{\Sigma}_i(\lambda)$.

D'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned} \text{diam}(\hat{\Sigma}_k(\lambda)) &\leq (\#C_k)\zeta + ((\#C_k) - 1)(2\zeta + \tilde{\nu})^{1 - \frac{1}{m_i m_j}} \tilde{\nu}^{\frac{1}{m_i m_j}}, \\ &\leq q(\zeta + (2\zeta + \tilde{\nu})^{1 - \frac{1}{m_i m_j}} \tilde{\nu}^{\frac{1}{m_i m_j}}) = \hat{\zeta}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Sigma(\lambda) = \hat{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \hat{\Sigma}_k(\lambda)$ est une décomposition $(\tilde{\nu}, \hat{\zeta})$ -séparée.

Remarquons cependant que si $l'_{\tilde{\Sigma}} = l_{\tilde{\Sigma}}$, chacune des composantes connexes maximales du graphe $\Gamma(\tilde{\Lambda})$ est réduite à un seul élément et par conséquent, la décomposition obtenue coïncide avec la décomposition initiale en $\tilde{\Sigma}_i(\lambda)$ et est donc $(\tilde{\nu}, \zeta)$ -séparée.

B) Étudions à présent les propriétés de transversalité de la décomposition (non nécessairement séparée) $\Sigma(\lambda) = \tilde{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \tilde{\Sigma}_{l_{\tilde{\Sigma}}}(\lambda)$. Tout d'abord déterminons la transversalité des $\tilde{\Sigma}_i(\lambda)$. Pour $\lambda \in \tilde{\Lambda} \in \Pi$, $\tilde{\Sigma}_i(\lambda)$ est déjà $((1 + |y_{\Sigma_i}|)^{m_i} M, \hat{\delta})$ -borné; on note $\hat{\delta}$ le δ' donné dans les propositions 6.1.1, 6.1.2 (nécessaire pour pouvoir définir \tilde{A}), et $\hat{\delta} = (bMN\nu^{-1})^{-a\tau} \delta$; en effet puisque $\chi_{\tilde{\Sigma}_i}(u) = \chi_{\Sigma_i}(u + y_{\Sigma_i})$, on a, $|\chi_{\tilde{\Sigma}_i}(u)|_{\delta} \leq (1 + |u + y_{\Sigma_i}|)^{m_i} M \leq (1 + |y_{\Sigma_i}|)^{m_i} (1 + |u|)^{m_i} M$. En outre, $\partial_{\lambda}^j(\chi_{\tilde{\Sigma}_i(\lambda)}(u)) = \partial_{\lambda}^j \chi_{\Sigma_i(\lambda)}(u + y_{\Sigma_i})$, pour tout $0 \leq j \leq r$. Ainsi, $\tilde{\Sigma}_i(\lambda)|_{\tilde{\Lambda}}$ est $((1 + |y_{\Sigma_i}|)^{m_i} M, \hat{\delta}, c, r)$ -transverse.

Déterminons à présent la transversalité de $\text{Res}(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_j(\lambda))$ pour tout (i, j) . On a,

$$\begin{aligned} \text{Res}(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_j(\lambda)) &= \text{Res}(\Sigma_i(\lambda) - y_{\Sigma_i}, \Sigma_j(\lambda) - y_{\Sigma_j}), \\ &= \text{Res}(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_j(\lambda); y_{\Sigma_j} - y_{\Sigma_i}). \end{aligned}$$

Or par définition, ceci est $(M(1 + |y_{\Sigma_j} - y_{\Sigma_i}|)^{m_i m_j}, \hat{\delta}, c, r)$ -transverse. Il est donc clair que la décomposition $\tilde{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \tilde{\Sigma}_{l_{\tilde{\Sigma}}}(\lambda)$ (qui n'est pas forcément séparée) est $(M(bR)^{q^2}, \hat{\delta}, c, r)$ -transverse (car les $|y^{\Sigma, V}|$ sont plus petits que $(1 + a_4)R$).

C) *Transversalité*: Appliquons à présent le lemme sur l'accrétion des racines à la décomposition, qui elle est séparée, $\tilde{\Sigma}(\lambda) = \hat{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \hat{\Sigma}_{l'}(\lambda)$. Comme $\tilde{\Sigma}(\lambda) = \tilde{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \tilde{\Sigma}_{l_{\tilde{\Sigma}}}(\lambda)$ est $(M(10R)^{q^2}, \hat{\delta}, c, r)$ -transverse, la nouvelle décomposition est,

$$((bR^{q^2} M)^{q^2}, \hat{\delta}, [(brMR(\hat{\delta})^{-1})^{-\kappa r} c]^{k^r}, q^2 r)$$

transverse.

D) *Perturbation des racines*. Résumons les résultats de A), B), C):

1) – si $l_\Sigma = l'_\Sigma$, alors $(\hat{\Sigma}_\kappa) = (\tilde{\Sigma}_i)$ et la décomposition $\Sigma(\lambda) = \hat{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \hat{\Sigma}_{l_\Sigma}(\lambda)$ est $(\hat{M}, \hat{\delta}, \hat{c}, \hat{r})$ -transverse $(\tilde{\nu}, \hat{\zeta})$ -séparée avec

$$\begin{aligned} \hat{M} &= M(bR)^{q^2}, & \hat{\delta} &= (bMN\nu^{-1})^{-a\tau} \delta, & \hat{c} &= c, \\ \hat{r} &= r, & \hat{R} &= bR, & \hat{\zeta} &= \zeta; \end{aligned}$$

2) – si $l'_\Sigma < l_\Sigma$, la décomposition, $\tilde{\Sigma}(\lambda) = \hat{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \hat{\Sigma}_{l'_\Sigma}(\lambda)$ est $(\hat{M}, \hat{\delta}, \hat{c}, q^2r)$ -transverse et $(\tilde{\nu}, \hat{\zeta})$ -séparée avec

$$\begin{aligned} \hat{M} &= (bR^{q^2} M)^{q^2}, & \hat{\delta} &= (bMN\nu^{-1})^{-a\tau} \delta, & \hat{c} &= [(brMR(\hat{\delta})^{-1})^{-\kappa r} c]^{\kappa r}, \\ \hat{r} &= q^2r, & \hat{R} &= bR, & \hat{\zeta} &= 2q(2 + \tilde{\nu})^{1 - \frac{1}{q^2}} \tilde{\nu}^{\frac{1}{q^2}}, \end{aligned}$$

où κ est une constante positive ne dépendant que de q .

Notons $\Sigma'(\cdot) = \chi_{\Sigma(A'(\cdot))} = \chi_{\tilde{\Sigma}} + \chi_{\tilde{F}(0,\cdot)} = \chi_{\tilde{\Sigma}(\cdot)} + \eta(\cdot)$; nous pouvons appliquer à présent le lemme de perturbation 3.2.4.1, pourvu que $|\eta|_{\delta'} \leq (bR\hat{M}\tilde{\nu}^{-1})^{-4q}$, et alors, il existe une décomposition (ν', ζ') -séparée et (M', δ', c', r') -transverse de $\Sigma'(\lambda) = \Sigma'_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma'_{l'_\Sigma}(\lambda)$ avec:

$$\begin{aligned} M' &= (b\hat{R})^{q^2} M + (b\hat{M}\hat{R}\tilde{\nu}^{-1})^{10q^4} |\eta|_{\delta'}, & \delta' &= (b\hat{R}\hat{M}\tilde{\nu}^{-1})^{-4q} \hat{\delta}, \\ c' &= \hat{c} - (b\hat{M}\hat{R}\tilde{\nu}^{-1}\hat{\delta}^{-1})^{12q^4 r} |\eta|_{\delta}, & r' &= \hat{r}, \\ \nu' &= \tilde{\nu} - b\hat{M}\hat{R}^5 \tilde{\nu}^{-2} |\eta|_{\delta}^{\frac{1}{q}}, & \zeta' &= \zeta + qb\hat{M}\hat{R}^5 \tilde{\nu}^{-2} |\eta|_{\delta}^{\frac{1}{q}}, \\ R' &= b\hat{R}, \end{aligned}$$

les valeurs des variables avec des chapeaux étant celles que nous avons données précédemment suivant que $l'_\Sigma = l_\Sigma$ ou $l'_\Sigma < l_\Sigma$. Quitte à changer les constantes κ, b ceci donne les estimations de l'énoncé de la proposition (remarquer que si $r \geq 1$, $(r^{\kappa r})^{\kappa r} \leq 2^{\kappa' r}$ si $\kappa' > \kappa$ est suffisamment grand).

E) Déterminons à présent le cardinal de,

$$E_{i,j} = \{\lambda \in \Lambda, \text{Res}(\tilde{\Sigma}_i(\lambda), \tilde{\Sigma}_j(\lambda)) = (2\zeta + \nu)^{m_i m_j - 1} \nu\};$$

Comme, par hypothèse, $\max(2\zeta + \nu, \nu) < 1$ et $\tilde{\nu} < c$, on déduit du lemme 2.2 que

$$\#E_{i,j} \leq r \cdot \left(\frac{(1 + |\Lambda|)M(\hat{\delta}/2)^{-(r+1)}}{c} (2R)^{q^2} 2^{r+1} \right),$$

et donc que $\#E \leq (1 + |\Lambda|)(brRNM\delta^{-1}\nu^{-1})^{\kappa r}$, où $\kappa > 0$ est une constante.

F) Enfin, remarquons que si $l_\Sigma = l'_\Sigma$, alors $l_V = l'_V$: ceci résulte immédiatement du fait que les éléments $\sigma \in \Sigma$ sont obtenus comme différence d'éléments de V . □

6.3.2. (Séparation plus fine des racines). Soit $A \in C_\delta^\omega(\Lambda, g)$ telle que $\Sigma(A(\lambda))$ et $V(A(\lambda))$ admettent des décompositions (M, δ, c, r) -transverses. Fixons en outre $\nu' < c$. Il existe alors une partition Π de Λ en intervalles $\tilde{\Lambda}$ et sur chaque $\tilde{\Lambda}$ des décompositions $\Sigma(A(\lambda)) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_\Sigma}(\lambda)$, $V(A(\lambda)) = V_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup V_{l_V}(\lambda)$, ($l_\Sigma, l_V \leq q$) ne dépendant que de $\tilde{\Lambda}$, qui sont (M', δ', c', r') -transverses et (ν', ζ') -séparées avec

$$\begin{aligned} M' &= b(RM\nu'^{-1}\delta^{-1})^\kappa, & \delta' &= b(M^{-1}R^{-1}\nu')^\kappa \delta, \\ c' &= (bR^{-1}M^{-1}\nu'\delta c)^\kappa, & r' &= q^2r, \\ \zeta' &= 10q\nu'. \end{aligned}$$

En outre $\#\Pi \leq b(MR\delta^{-1}\nu'^{-1})^q(1 + |\Lambda|)$.

Démonstration. – Découpons Λ en $(1 + |\Lambda|)(\nu'((1 + R)M)(\delta/2))^{-q}$ intervalles d'égale longueur au plus $(\nu'M^{-1}(\delta/2)(1 + R))^{-q}$. Soit $\tilde{\Lambda}$ un tel intervalle et fixons $\lambda_0 \in \tilde{\Lambda}$. D'après la remarque qui suit la définition 3.1.1, il existe une décomposition $4\nu'$ -séparée maximale de $\Sigma(\lambda_0) = \Sigma_1(\lambda_0) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_\Sigma}(\lambda_0)$, $V(\lambda_0) = V_1(\lambda_0) \sqcup \dots \sqcup V_{l_V}(\lambda_0)$ et donc $(4\nu', 4q\nu')$ -séparée. En outre, pour tout $\sigma_i(\lambda_0) \in \Sigma(\lambda_0)$ et $\lambda \in \tilde{\Lambda}$,

$$\chi_{\Sigma(\cdot)}(\sigma_i(\lambda_0)) = \prod_{\sigma \in \Sigma(\cdot)} (\sigma - \sigma_i(\lambda_0)),$$

est $(M(1 + |\sigma_i(\lambda_0)|)^q, \delta, c, r)$ -transverse et par conséquent $(M(1 + R)^q, \delta)$ -bornée. Donc,

$$|\chi_{\Sigma(\lambda)}(\sigma_i(\lambda_0)) - \chi_{\Sigma(\lambda_0)}(\sigma_i(\lambda_0))| \leq M(\delta/2)^{-1} \cdot |\lambda - \lambda_0|(1 + R)^q,$$

et d'après la condition sur le diamètre de Λ ,

$$\prod_{\sigma \in \Sigma(\lambda)} |\sigma - \sigma_i(\lambda_0)| \leq \nu'^q,$$

ce qui montre qu'il existe au moins un $\sigma_i \in \Sigma(\lambda)$ tel que, $|\sigma_i - \sigma_i(\lambda_0)| \leq \nu'$.

De même, pour tout $\sigma_i(\lambda) \in \Sigma(\lambda)$ il existe au moins un $\sigma_i(\lambda_0) \in \Sigma(\lambda_0)$ tel que $|\sigma_i(\lambda) - \sigma_i(\lambda_0)| \leq \nu'$. Comme les racines de $\chi_{\Sigma(\lambda)}$ et $\chi_{\Sigma(\lambda_0)}$ sont en nombre égal (en comptant les multiplicités), et comme les $\Sigma_i(\lambda_0)$ forment une décomposition $4\nu'$ -séparée, il est clair que si l'on pose,

$$\Sigma_i(\lambda) = W_{\nu'}(\Sigma_i(\lambda_0)),$$

on a $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_\Sigma}(\lambda)$ et pour tout $(\sigma, \tau) \in \Sigma_i(\lambda) \times \Sigma_j(\lambda)$, $|\sigma - \tau| \geq 4\nu' - 2\nu' \geq \nu'$. Ceci est la décomposition cherchée. On a alors $\text{diam}(\Sigma_i(\lambda)) \leq 2\nu' + 4q\nu' \leq 2(1 + 2q)\nu'$. On peut procéder de même pour $V_i(\lambda)$.

Comme $\Sigma(\lambda)$ et $V(\lambda)$ admettent des décompositions (M, δ, c, r) -transverse, on sait d'après la proposition 3.2.2.1 que $\Sigma(\cdot)$ et $V(\cdot)$ sont $(M_1, \delta_1, c_1, r_1)$ -transverses avec

$$\begin{aligned} M_1 &= M^{q^2}, & \delta_1 &= \delta, \\ c_1 &= ((bMRr\delta^{-1})^{\kappa r} c)^{\kappa r}, & r_1 &= q^2 r, \end{aligned}$$

et par conséquent, les décompositions $\Sigma(\lambda) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_\Sigma}(\lambda)$ et $V(\lambda) = V_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup V_{l_V}(\lambda)$ sont, en vertu de la proposition 3.2.3.2, (M', δ', c', r') -transverses avec

$$\begin{aligned} M' &= (bRM_1\nu'^{-1})^{6q^3}, & \delta' &= (bRM_1\nu'^{-1})^{-4q}\delta, \\ c' &= (bRM_1\nu'^{-1}\delta^{-1})^{-7q^5 r} c_1, & r' &= r_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, quitte à changer les constantes κ et b , la conclusion. \square

Nous montrons à présent comment la transversalité permet de déduire que l'hypothèse \mathcal{H} a lieu sur des sous-intervalles de Λ .

6.3.3. Lemme. Soient $\Sigma(A(\lambda)) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_l(\lambda)$ une décomposition (M, δ, c, r) -transverse sur Λ et (ν, ζ) séparée avec

$$\zeta < \frac{1}{4}(\gamma D^{q+1}K)^{-1}.$$

Il existe alors une partition Π_{res} de Λ en intervalles $\tilde{\Lambda}$ et pour tout $\tilde{\Lambda} \in \Pi_{\text{res}}$ un entier $0 \leq p \leq q$, un sous ensemble $J_{\text{res}} \subset \{1, \dots, l\}$ et pour tout $i \in J_{\text{res}}$ un entier $k_i = k(i) \in \mathbf{Z}^d$ tels que $\mathcal{H}_{a_1, q, D}(p, J_{\text{res}}, k)$ soit vérifiée. En outre,

$$\#\Pi_r \leq MR^q \delta^{-1} \zeta^{-q} (1 + |\Lambda|).$$

Démonstration. – Découpons Λ en $M(1+R)^q(\delta/2)^{-1}\zeta^{-q}(1+|\Lambda|)$ intervalles $\tilde{\Lambda}$ de longueur au plus,

$$|\tilde{\Lambda}| \leq (M(1+R)^q)^{-1}(\delta/2)\zeta^q.$$

La démonstration du 6.3.2 montre que si λ, λ_0 sont dans $\tilde{\Lambda}$ alors $\text{dist}(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_i(\lambda_0)) \leq \zeta$. Fixons donc un λ_0 dans chaque $\tilde{\Lambda}$. On sait d'après 5.1.3 que si $K \geq 2^{1+\sigma}\gamma D^{q+1}N_{q+1}^\sigma$, il existe un entier $0 \leq p \leq q$ un ensemble $\Delta_{\text{res}} \subset \Sigma(\lambda_0)$ et pour chaque $\sigma \in \Delta_{\text{res}}$ un entier $k_\sigma \in \mathbf{Z}^d$ tels que,

- si $\sigma \in \Delta_{\text{res}}$, alors $|k_\sigma| \leq N_p$, et $\left| \sigma - \left(\frac{k_\sigma}{D^p}, \omega \right) \right| \leq K^{-1}$,
- sinon pour tout $0 < |k| \leq N_{p+1}$, $\left| \sigma - \left(\frac{k}{D^{p+1}}, \omega \right) \right| > K^{-1}$.

Remarquons qu'en fait pour tout $1 \leq i \leq l$ et tout $(\sigma, \tau) \in (\Sigma_i(\lambda_0) \cap \Delta_{\text{res}})^2$, $k_\sigma = k_\tau$. En effet si ce n'était pas le cas on aurait,

$$K^{-1} \leq -2K^{-1} + \gamma^{-1}D^{-p}(2N_p)^{-\sigma} \leq \left| \left(\frac{k_\sigma - k_\tau}{D^p}, \omega \right) \right| \leq |\sigma - \tau| \leq \zeta,$$

ce qui est impossible vu le choix qu'on a fait pour ζ . Donc si $\Sigma_i(\lambda_0) \cap \Delta_{\text{res}} \neq \emptyset$ on peut définir $k_i = k_\sigma$ si $\sigma \in \Sigma_i \cap \Delta_{\text{res}}$.

On a alors pour tout $\sigma \in \Sigma_i(\lambda_0)$,

$$\left| \sigma - \left(\frac{k_i}{D^p}, \omega \right) \right| \leq K^{-1} + \zeta \leq \frac{5}{4}\zeta.$$

Posons donc $J_{\text{res}} = \{i, \Sigma_i(\lambda_0) \cap \Delta_{\text{res}} \neq \emptyset\}$. On a évidemment pour tout $\sigma \in \Sigma_i(\lambda_0)$, $i \notin J_{\text{res}}$,

$$\forall 0 < |k| \leq N_{p+1}, \left| \sigma - \left(\frac{k}{D^{p+1}}, \omega \right) \right| > K^{-1}.$$

Comme pour $\lambda \in \tilde{\Lambda}$, $\text{dist}(\Sigma_i(\lambda), \Sigma_i(\lambda_0)) < \zeta < K^{-1}/4$, on a clairement, pour $i \in J_{\text{res}}$ et $\sigma \in \Sigma_i(\lambda)$,

$$\left| \sigma - \left(\frac{k_i}{D^p}, \omega \right) \right| \leq (5/4)K^{-1} + \zeta \leq (3/2)K^{-1},$$

et pour $i \notin J_{\text{res}}$, $\sigma \in \Sigma_i(\lambda)$ et $0 < |k| \leq N_{p+1}$,

$$\left| \sigma - \left(\frac{k_i}{D^{p+1}}, \omega \right) \right| > (3/4)K^{-1} - (1/4)K^{-1} = (1/2)K^{-1}.$$

Ceci conclut la démonstration du lemme 6.3.3. □

7. La procédure de récurrence. Dans ce qui suit $a_1 > 0$ est la constante intervenant dans la section 5.2, $a_5 = \min\left(\frac{1}{100q}, (4\gamma)^{-1}D^{-(q+1)}\right)$, et a_7 est la constante des propositions 6.1.1 et 6.2.1.

7.1. Choix des suites.

7.1.1. Les suites N_n, K_n, h_n pour estimer F_n . Posons,

$$h_n = \frac{h_1}{2^{n-1}},$$

et soit $a > 0$ suffisamment grand pour que si l'on pose

$$\rho_1 = D^{-(q+1)} \left(\frac{b(a-1)}{2} - Q \right), \quad \rho_2 = \frac{1}{2} Q a^q,$$

on ait, $\rho_2 > 2\rho_1 > 0$.

Nous supposons alors $a > a_1$ (où $a_1 > 0$ est la constante définie dans la section 5.2). Notons alors $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 2$, et choisissons,

$$0 < \beta < \frac{1}{1 + 2\rho}.$$

Définissons encore $\beta_1 = 2\beta$, $\beta_2 = \rho\beta_1$; on a alors,

$$0 < \beta < \beta_1 < \beta_2 < 1 - \beta < 1.$$

Nous introduisons à présent pour tout $n \geq 1$ et tout $\beta'' \geq 1$,

$$N_n = \frac{\beta_1(1 + \beta)^n + \beta''}{2\pi h_n \rho_1} D^{(q+1)(n-1)},$$

et pour tout $0 \leq k \leq q$,

$$N_{n,k} = a^k N_n.$$

Remarquons qu'avec les choix qui ont été faits pour $\beta_1, \beta_2, \rho_1, \rho_2, \beta$, on a toujours,

$$\begin{aligned} & 2\pi \frac{-b(N_{n,p+1} - QN_{n,p})(h_n - h_{n+1}) + QN_{n,p}h_n}{D^{(q+1)(n-1)}D^{p+1}} \\ & \leq -\rho_1 \frac{2\pi N_n h_n}{D^{-(q+1)(n-1)}} = -\beta_1(1 + \beta)^n - \beta'', \end{aligned}$$

et,

$$2\pi \frac{QN_{n,p}h_{n+1}}{D^{(q+1)(n-1)}D^{p_{n+1}}} = \frac{1}{2} Q a^p \frac{2\pi N_n h_n}{D^{(q+1)(n-1)}} \leq \rho_2 \frac{\beta_1(1 + \beta)^n + \beta''}{\rho_1} = \beta_2(1 + \beta)^n + \rho\beta''.$$

Posons enfin,

$$K_n = \gamma \cdot 2^{1+\sigma} a^{q+1} \cdot \frac{2\beta''(1+\beta)^n}{2\pi h_n \rho_1} \cdot D^{(q+1)n},$$

de façon que l'on ait

$$\gamma 2^{1+\sigma} N_{n,q+1} \leq K_n (\leq N_n^{\tau_1}).$$

Ainsi, les suites N_n, K_n dépendent de β'' : plus la perturbation initiale F_1 sera petite plus β'' pourra être choisi grand.

Mentionnons, avant de clore ce paragraphe, le lemme suivant dont on pourra trouver une démonstration dans [5], chap. 6 (on peut aussi le prouver directement par récurrence).

7.1.2.1. Lemme. Soient Γ_n, ϵ_n ($n \geq 1$) deux suites positives telles que,

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &\leq \frac{b^n}{h_1^{2d}} (\beta'' \Gamma_n)^{a_7} e^{\beta_2(1+\beta)^n + \rho\beta''} \epsilon_n^2 + \frac{b^n}{h^d} (\beta'')^{a_7} e^{-\beta_1(1+\beta)^n - \beta''} \epsilon_n, \\ \Gamma_{n+1} &\leq b\Gamma_n + be^{\beta_2(1+\beta)^n + \rho\beta''} \epsilon_n, \end{aligned}$$

(avec $b, a_7 > 0$).

Alors, si $\epsilon_1 \leq e^{-(1+\rho)\beta''} e^{-(1+\beta)}$, on a, pour tout $n \geq 1$, $\epsilon_n \leq e^{-(1+\rho)\beta''} e^{-(1+\beta)^n}$, et $\Gamma_n \leq (2b)^n \Gamma_1$, pourvu que $\beta'' \geq \beta''_0 := \text{cste.} \left(\frac{\Gamma_1}{h}\right)$, la constante (positive) ne dépendant que de b et a_7 .

7.1.2. Les suites $\hat{\zeta}_n, s_n$ pour estimer la transversalité. Nous notons $f = q^{-2}$. Posons,

$$C_K = (4q^q) a_5^{-1} \cdot \frac{2^{1+\sigma} \gamma a^{q+1}}{2\pi h_1 \rho_1},$$

et,

$$B_K = \text{Log}(2(1+\beta)D^{q+1});$$

on a donc,

$$(\beta'')^{-1} C_K^{-1} e^{-nB_K} < (4q^q)^{-1} a_5 K_n^{-1}.$$

Introduisons également la suite,

$$u_n^* = C_K^{-1} \exp(-(1 + (\beta/2))^{2\sqrt{nB_K}}),$$

et pour $\beta'' > 1$,

$$u_n = u_n(\beta'') = (\beta'')^{-1} u_n^*.$$

Définissons alors pour $\beta'' > 1$ les suites $\hat{\zeta}_n, s_n$ pour $n \geq 0$ de la façon suivante:

(i) $\hat{\zeta}_0 = 1$, $\hat{\zeta}_1 = ((\beta'')^{-1} C_K^{-1} e^{-B})^{\frac{1}{f}}$, $s_1 = 1$; ainsi,

$$\hat{\zeta}_1^f < (4q^q)^{-1} a_5 K_1^{-1}.$$

(ii) Supposant construit s_i pour $1 \leq i \leq n$ et $\hat{\zeta}_i$ pour $1 \leq i \leq s_n$, posons,

$$s_{n+1} = 1 + \max\{s_n + j, \hat{\zeta}_n^f < (4q^q)^{-1} a_5 K_{s_n+j}^{-1}\},$$

et,

- a) pour tout $0 \leq j \leq s_{n+1} - s_n$, $\hat{\zeta}_{j+s_n} = \hat{\zeta}_{s_n}$.
 b) $\hat{\zeta}_{s_{n+1}} = (u_{s_{n+1}})^{\frac{1}{f}}$. Notons également

$$\xi_n = \#\{1 \leq j \leq n, s_j \leq n\}.$$

On a alors, si on note \ln_k l'itéré k -ième du \ln (défini sur (x, ∞) , pour x assez grand),

7.1.2.1. Lemme. *Pour tout entier $k > 0$ il existe une constante dépendant de k mais pas de β'' telle que $\xi_n = (\text{cste})_k \ln_k(n)$.*

Démonstration. – Il suffit de constater que d'après les définitions de $K_n, \hat{\zeta}_n$,

$$(\beta'')^{-1} C_K^{-1} e^{-(1+\frac{\beta}{2})^2 \sqrt{s_n B}} \geq (\beta'')^{-1} C_K^{-1} e^{-s_{n+1} B},$$

c'est-à-dire $s_{n+1} B \geq (1 + \frac{\beta}{2})^{2\sqrt{B s_n}}$, et donc en prenant les racines carrées,

$$\sqrt{B s_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)^{\sqrt{B s_n}}.$$

Le lemme est alors clair pour la suite $\sqrt{s_n B}$, et donc également pour s_n . □

7.1.3. Estimations sur la décroissance de certaines suites. Nous étudions à présent les propriétés de certaines suites définies par récurrence qui interviendront dans la section suivante. Supposons données $(s_k)_{k \geq 0}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ comme en 7.1.2 et donnons nous pour tout $k \in \mathbf{N}$ des ensembles $I_k \subset [s_k, s_{k+1}) \cap \mathbf{N}$ tels que $\#I_k \leq q$. Nous noterons I la réunion des I_k et également I l'application de \mathbf{N} dans les parties de \mathbf{N} à au plus q éléments qui à k associe I_k . Posons pour $\beta'' > 0$,

$$\epsilon_n = e^{-(1+\rho)\beta''} e^{-(1+\beta)^n},$$

et soit r_n une suite croissante d'entiers positifs que l'on supposera plus grands que 1 (ce qui est toujours possible) telle que,

$$\forall n \geq 1, r_n \leq q^{3\xi_n}.$$

Fixons également $V^* > 1, \kappa > 1$ des constantes positives et posons,

$$V(\beta'') = V = (\beta'')^2 \cdot V^*.$$

Pour $(t, w) \in (0, 1)^2$ et $\beta'' > 1$ définissons deux suites t_n, w_n au moyen de deux autres suites intermédiaires \tilde{t}_n, \tilde{w}_n de façon que la propriété suivante soit vérifiée:

Propriété $\mathcal{B}_I(t, w, \beta'')$.

- 1) $t_1 = t, w_1 = w$.
- 2-a) Pour $n = s_k, \tilde{t}_n = (V^{-n} t_n u_n w_n)^{\kappa^{r_n}}$ et $\tilde{w}_n = (V^{-n} t_n u_n)^{\kappa} w_n$;
- 2-b) Pour $s_k < n < s_{k+1}, \tilde{t}_n = t_n, \tilde{w}_n = w_n$.
- 3-a) Si $n \in I$ alors,

$$t_{n+1} = (V^{-n} \tilde{t}_n \tilde{w}_n)^{\kappa^{r_n}} - (V^{-n} \tilde{t}_n \tilde{w}_n)^{-\kappa^{r_n}} \epsilon_n^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = (V^{-n} \tilde{t}_n)^{\kappa} \tilde{w}_n,$$

3-b) Si $n \notin I$, alors,

$$t_{n+1} = (V^{-n})^\kappa \tilde{t}_n - (V^{-n} \tilde{t}_n \tilde{w}_n)^{-\kappa r_n} \epsilon_n^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = (V^{-n} \tilde{t}_n)^\kappa \tilde{w}_n,$$

Afin d'étudier les propriétés de ces dernières suites nous introduisons une nouvelle définition:

Propriété $\mathcal{B}_I^*(t, w, \beta'')$.

$$1 \quad t_1 = t, \quad w_1 = w.$$

$$2\text{-a) Pour } n = s_k, \quad \tilde{t}_n = (V^{-n} t_n u_n w_n)^{\kappa r_n} \quad \text{et} \quad \tilde{w}_n = (V^{-n} u_n t_n)^\kappa w_n;$$

$$2\text{-b) Pour } s_k < n < s_{k+1} \quad \text{et} \quad \tilde{t}_n = t_n, \quad \tilde{w}_n = w_n.$$

$$3\text{-a) Si } n \in I \text{ alors, } t_{n+1} = \frac{1}{2} (V^{-n} \tilde{t}_n \tilde{w}_n)^{\kappa r_n} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = (V^{-n} \tilde{t}_n)^\kappa \tilde{w}_n,$$

$$3\text{-b) Si } n \notin I, \text{ alors, } t_{n+1} = \frac{1}{2} (V^{-n})^\kappa \tilde{t}_n, \quad \text{et} \quad w_{n+1} = (V^{-n} \tilde{t}_n)^\kappa \tilde{w}_n.$$

On peut alors énoncer:

7.1.3.1. Proposition. Pour toute valeur de $t, w > 0$, il existe une constante β_1'' et une constante $C_5 > 0$ telles que, pour tout $\beta'' > \beta_1''$, si les suites t_n, w_n vérifient $\mathcal{B}_I(t, w, \beta'')$, on a,

$$z_n = \min(w_n, t_n) \geq (\beta'')^{-3C^* n^{\ln n}} \left(\frac{z_1}{V^*} u_n^* \right)^{C^* n^{\ln n}} \gg e^{-(1+\beta)'' n}.$$

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant:

7.1.3.2. Lemme. Pour toute valeur de $t, w > 0$ et tout $\beta'' > 1$ il existe une constante C^* indépendante de β'' telle que si les suites t_n, w_n vérifient $\mathcal{B}_I^*(t, w, \beta'')$ on a,

$$z_n = \min(w_n, t_n) \geq (\beta'')^{-3C^* n^{\ln n}} [((V^*)^{-1} z_1) u_n^*]^{C^* n^{\ln n}} \gg e^{-(1+\beta)'' n}.$$

Démonstration. – Il est déjà clair que si $0 < t, w < 1$, alors $0 < t_n, w_n, \tilde{t}_n, \tilde{w}_n < 1$. Posons alors

$$\begin{aligned} x_n &= -\ln t_n, & \tilde{x}_n &= -\ln \tilde{t}_n, & y_n &= -\ln w_n, \\ \tilde{y}_n &= -\ln w_n, & z_n &= \max(x_n, y_n) \end{aligned}$$

puis $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}$.

La propriété $\mathcal{B}_I^*(t, w, \beta'')$ se reformule de la façon suivante: pour tout $n \geq 1$, $\tilde{X}_n = U_n X_n + S_n$, où

$$(i) \quad U_n = \begin{pmatrix} \kappa^{r_n} & \kappa^{r_n} \\ \kappa & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_n = \begin{pmatrix} \kappa^{r_n} (n \ln V + \ln(u_n^{-1})) \\ \kappa (n \ln V + \ln(u_n^{-1})) \end{pmatrix} \quad \text{si } n = s_k,$$

$$(ii) \quad U_n = Id \quad \text{et} \quad S_n = 0 \quad \text{sinon.}$$

Par ailleurs, $X_{n+1} = A_n \tilde{X}_n + B_n$ avec

$$a) \quad A_n = \begin{pmatrix} \kappa^{r_n} & \kappa^{r_n} \\ \kappa & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} \ln 2 + \kappa^{r_n} \ln V \\ n \kappa \ln V \end{pmatrix}, \quad \text{si } n \in I,$$

$$b) \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} \ln 2 + n \ln V \\ \kappa n \ln V \end{pmatrix} \quad \text{si } n \notin I.$$

Notons $\tilde{I}_n = (I \cup \{s_k, s_k \leq n\}) \cap [0, n]$; on a $\#\tilde{I}_n \leq q\xi_n + \xi_n$. Pour fixer les notations nous appellerons $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ les éléments de \tilde{I}_n avec $m \leq (q+1)\xi_n$.

D'après ce qui précède on a toujours, $X_{j+1} \leq \bar{A}_j X_j + \bar{B}_j$, avec $\bar{A}_j = A_j U_j$ et $\bar{B}_j = A_j S_j + B_j$, et,

- si $j \in \tilde{I}_n$, $\|\bar{A}_j\| \leq 4\kappa^{2r_j}$ et $\|\bar{B}_j\| \leq 5\kappa^{2r_n} \kappa(n \ln(2V) + \ln(u_n^{-1}))$, où on a noté $\|\cdot\|$ deux fois la norme sup des matrices qui est une norme multiplicative ($\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$).
- si $j \notin \tilde{I}_n$, $\bar{A}_j = A_j$ et $\bar{B}_j = B_j$.

Ainsi, puisque les matrices sont à coefficients positifs plus grands que 1,

$$X_n \leq (\bar{A}_{n-1} \cdots \bar{A}_1) \left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} \bar{B}_j \right) + X_1 \right],$$

où l'inégalité signifie que le coefficient (i, j) de la matrice de gauche est inférieur ou égal au coefficient (i, j) de la matrice de droite.

Estimons cette expression en notant,

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= A_{i_1-1} \cdots A_1 \\ \Theta_2 &= A_{i_2-1} \cdots A_{i_1+1} \\ &\dots \\ \Theta_{m+1} &= A_{n-1} \cdots A_{i_m+1}; \end{aligned}$$

on a d'une part,

$$\bar{A}_{n-1} \cdots \bar{A}_1 = \Theta_{m+1} \bar{A}_{i_m} \Theta_m \cdots \bar{A}_{i_1} \Theta_1,$$

et d'autre part,

$$\Theta_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (i_k - i_{k-1} - 1)\kappa & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\|\bar{A}_{n-1} \cdots \bar{A}_1\| \leq \prod_{l=1}^m (4\kappa^{2r_{i_l}}) \prod_{l=1}^{m+1} \|\Theta_l\| \leq (4\kappa^{2r_n})^{(q+1)\xi_n} (2\kappa n)^{\xi_n(q+1)+1}.$$

En outre,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \bar{B}_j \right\| &\leq \left[\sum_{l=1}^m 5\kappa^{2r_{i_l}} \kappa(i_l \ln(2V) + \ln(u_{i_l}^{-1})) \right] + \sum_{j \notin \tilde{I}_{n-1}} 2\kappa n \ln(2V) \\ &\leq 5\xi_n(q+1)\kappa^{2r_n} \kappa(n \ln(2V) + \ln(u_n^{-1})) + 2n^2 \kappa \ln(2V). \end{aligned}$$

Mais nous avons vu que ξ_n décroît plus vite que n'importe quel itéré du logarithme et que $r_n \leq (q)^{3\xi_n}$; par conséquent, il existe une constante C^* indépendante de β'' pour laquelle

$$\|X_n\| \leq C n^{\ln n} (\ln(V u_n^{-1}) + X_1).$$

Comme $V = (\beta'')^2 \cdot V^*$ et $u_n^{-1} = \beta''(u_n^*)^{-1}$, on peut écrire, quitte à changer la constante $C > 0$,

$$z_n \geq (\beta'')^{-3C^* n^{\ln n}} ((V^*)^{-1} u_n^* z_1)^{C^* n^{\ln n}},$$

où C^* ne dépend pas de β'' .

Ceci complète la démonstration du lemme. \square

La démonstration de la proposition se fait à présent par récurrence: Notons C^* la constante intervenant dans le lemme précédent et montrons déjà que l'on peut trouver $\beta''_1 > 0$ tel que pour tout $\beta'' \geq \beta''_1$ on ait pour tout $n \geq 1$,

$$(7.5) \quad e^{-\frac{1+p}{q}\beta''} e^{-\frac{1}{q}(1+\beta)^n} \cdot (\beta'' z_1)^{3C^* n^{\ln n}} ((V^*)^{-1} u_n^*)^{C^* n^{\ln n}} < 1/2.$$

Il suffit pour cela de constater que (c'est un calcul facile),

$$\max_{n \geq 1} [e^{-\frac{1}{2q}(1+\beta)^n} \cdot (\beta'' z_1)^{3C^* n^{\ln n}}] \leq (\text{cste}) \cdot e^{\frac{1}{2}(\ln(\beta'' z_1))^2},$$

et comme $\max_{n \geq 1} [e^{-\frac{1}{2q}(1+\beta)^n} ((V^*)^{-1} u_n^*)^{C^* n^{\ln n}}] < \infty$, on voit qu'il suffit de choisir β'' tel que,

$$(\text{cste}) e^{-\frac{1+p}{q}\beta''} e^{\frac{1}{2}(\ln(\beta'' z_1))^2} < \frac{1}{2}.$$

Il n'est pas difficile de voir que (cf. [5], chap. 6),

$$\beta'' \geq \left(\frac{\text{cste}}{z_1} \right),$$

convient.

Montrons maintenant par récurrence que les énoncés \mathcal{A}_n et \mathcal{A}'_n sont vraies pour tout $n \geq 1$.

Énoncé \mathcal{A}_n : $(V^{-n} \tilde{t}_n \tilde{w}_n)^{-(\kappa r_n + \kappa^n)} \epsilon_n^{\frac{1}{q}} < 1/2$.

Énoncé \mathcal{A}'_n : Si $(t_n^*, w_n^*, \tilde{t}_n^*, \tilde{w}_n^*)$ sont les suites définies par la propriété $\mathcal{B}^*(t, w)$ alors, $t_n \geq t_n^*$, $w_n \geq w_n^*$, $\tilde{t}_n \geq \tilde{t}_n^*$, $\tilde{w}_n \geq \tilde{w}_n^*$.

Supposons donc $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}'_n$ vraies pour tout $1 \leq j \leq n$, alors de \mathcal{A}_n on déduit aisément que $t_{n+1} \geq t_{n+1}^*$ ainsi que les inégalités analogues pour $w_{n+1}, \tilde{t}_{n+1}, \tilde{w}_{n+1}$. Par conséquent, les estimations du lemme précédent montrent en utilisant (7.5) que \mathcal{A}_{n+1} a encore lieu.

Ceci complète la démonstration de la proposition 7.1.3.1. \square

7.1.3.3. Remarque. Si les sous-ensembles I_k ne sont définis que pour k tel que $s_k \leq n$, et si les suites t_i, w_i vérifient $\mathcal{B}_I(t, w, \beta'')$ (resp. $\mathcal{B}_I^*(t, w, \beta'')$) pour $i \leq n$, les estimations données en 7.1.3.1 (resp. 7.1.3.2) restent valables pour $i \leq n+1$.

7.2. La récurrence. Reprenons les notations de la section 7.1 et fixons quelques quantités:

- si $\kappa_1 = \kappa > 0$ est la constante intervenant dans les énoncés des propositions de la section 6, nous notons

$$(7.1) \quad \bar{\kappa} = 10\kappa_1.$$

- soit \bar{b}_0 une quantité plus grande que la plus grande des constantes b intervenant dans les propositions et lemmes des sections 3 à 6 précédentes et soit \bar{b} telle que,

$$(7.2) \quad \bar{b} \geq a^{q+1} D^{2d(q+1)} \cdot [2\bar{b}_0(1+\beta)D^{q+1}]^{a_7};$$

nous remarquons que

$$(7.3) \quad N_{n,q+1} \leq \bar{b}^n (\beta'')^{a\tau}.$$

- Le lemme du 7.1.1 appliqué avec $b = \bar{b}^3$ nous fournit alors une constante $\beta''_0 > 0$.
- Notons $\bar{V} \geq 1$ une constante telle que,

$$(7.4) \quad \bar{V}^n \geq (\bar{b})^2 \cdot [(2\bar{b})^n (1 + R_1)];$$

- Si dans la section 7.1.3 nous posons $V^* = \bar{V}$ et $\kappa = \bar{\kappa}$, nous obtenons des suites $t_n, \dots, \tilde{w}_n, z_n$ (qui dépendent de β'') et la proposition 7.1.3.1 nous fournit une constante $\beta''_1 > 0$.
- En raisonnant comme nous l'avons fait pour déterminer les conditions de validité de la formule (7.4) on voit qu'il existe une constante β''_2 telle que pour tout $\beta'' > \beta''_2$ on a,

$$(7.5) \quad e^{-(1+\rho)\beta''} e^{-(1+\beta)^n} \leq ((2\bar{b})^2 \beta'' (1 + R_1) z_n^{-2})^{\bar{\kappa}},$$

$$(7.6) \quad (\bar{b} N_{n,q+1} z_n^{-2} D^{n(q+1)}) (h_n - h_{n+1})^{-d} e^{-(1+\rho)\beta''} e^{-(1+\beta)^n} < 1,$$

$$(7.7) \quad \sum_{j=n}^{\infty} (z_j^{-2} (2\bar{b})^{2n} (1 + R_1) \beta'')^{\bar{\kappa}} \epsilon_j^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{q} u_n.$$

Nous choisirons alors $\beta'' \geq \beta''_3 = \max(\beta''_0, \beta''_1, \beta''_2)$, et poserons,

$$(7.8) \quad \epsilon_0 = e^{-(1+\rho)\beta''_3} e^{-(1+\beta)}.$$

Soient $A_1 \in C_{\delta_1}^\omega(\Lambda, g)$ et $F_1(\cdot, \cdot) \in C_{\delta_1, h_1}^\omega(\Lambda \times \mathbf{R}^d / \mathbf{Z}^d, g)$ telles que $A_1(\cdot)$ admette des Σ, V -décompositions $(M_1, \delta_1, c_1, r_1)$ -transverses et (ν_1, ζ_1) -séparées telles que $\Sigma(A(W_\delta(\Lambda))), V(A(W_\delta(\Lambda)))$ soient inclus dans $D(0, R_1)$ et posons, $\epsilon_1 = |F|_{\delta_1, h_1}$. Les suites $N_{n,p}, K_n, h_n$ seront définies comme en 7.1. On a alors la proposition fondamentale suivante:

7.2.1. Proposition $\mathcal{P}(m)$. *Si, $|F|_{\delta_1, h_1} \leq \epsilon_0$, alors pour tout $m \geq 1$ et tout $n \leq m$, il existe, a) des suites $\epsilon_n, \Gamma_n, R_n, M_n, \delta_n, c_n, r_n, \nu_n, \zeta_n$, ainsi que des suites $\tilde{M}_n, \dots, \tilde{\zeta}_n$, de réels positifs, b) une partition Π_n de Λ en intervalles $\Lambda_n \in \Pi_n$ et pour chacun de ces intervalles, des suites $A_n \in C_{\delta_n}^\omega(\Lambda_n, g)$, $F_n \in C_{\delta_n, h_n}^\omega(\Lambda_n \times \mathbf{R}^d / D^{qn} \mathbf{Z}^d, g)$, $G_n \in C_{\delta_n, h_n}^\omega(\Lambda_n \times \mathbf{R}^d / c_G D^{qn} \mathbf{Z}^d, G)$ pour lesquelles ce qui suit est vérifié:*

- 1) *Si on note $\epsilon_n = |F_n|_{\delta_n, h_n}$ et $\Gamma_n = |A_n|_{\delta_n}$ on a pour tout $n \leq m$, (i) $\Gamma_n \leq (2\bar{b})^n \Gamma_1$ et $\epsilon_n \leq e^{-(1+\rho)\beta''} e^{-(1+\beta)^n}$, (ii) $R_n \leq (2\bar{b}\beta'')^n (R_1 + 1)$, (iii) $\min(M_n^{-1}, \delta_n, \nu_n, \zeta_n, c_n) \geq z_n$ et de même, $\min(\tilde{M}_n^{-1}, \tilde{\delta}_n, \tilde{\nu}_n, \tilde{\zeta}_n, \tilde{c}_n) \geq z_n$. (iv) $r_n \leq (q^3)^{\xi_n} = O(\ln_k n)$. (v) On a,*

$$\#\Pi_n \leq [C(1 + |\Lambda|)z_n]^{-4qn},$$

où C est une constante positive (dépendant de β'').

2) Pour tout $n \leq m$, $\Sigma(A_n(\lambda))$ et $V(A_n(\lambda))$ admettent des décompositions,

$$\Sigma(A_n(\lambda)) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_{l_n}(\lambda) \quad \text{et} \quad V(A_n(\lambda)) = V_1(\lambda) \sqcup \cdots \sqcup V_{l_n}^V(\lambda),$$

$(M_n, \delta_n, c_n, r_n)$ -transverses et (ν_n, ζ_n) -séparées et

$$\Sigma(A_n(\lambda)) = \tilde{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \cdots \sqcup \tilde{\Sigma}_{\tilde{l}_n}(\lambda), \quad \text{et} \quad V(A_n(\lambda)) = \tilde{V}_1(\lambda) \sqcup \cdots \sqcup \tilde{V}_{\tilde{l}_n}^V(\lambda),$$

$(\tilde{M}_n, \tilde{\delta}_n, \tilde{c}_n, \tilde{r}_n)$ -transverses et $(\tilde{\nu}_n, \tilde{\zeta}_n)$ -séparées respectivement.

En outre, $\Sigma(A_n(W_{\delta_n}(\Lambda))) \subset D(0, R_n)$, et $V(A_n(W_{\delta_n}(\Lambda))) \subset D(0, R_n)$.

3) Pour tout $n \leq m$, on a, si $f = q^{-2}$,

$$\zeta_n \leq 4q^q \hat{\zeta}_n^f, \quad \epsilon_n \leq (\bar{b}R_n \nu_n^{-1} M_n)^{-\bar{\kappa}}$$

$$\nu_n + 2\zeta_n < 1, \quad (\bar{b}M_n N_n D^{n(q+1)})^{\bar{\kappa}} \epsilon_n (h_n - h_{n+1})^{-d} < 1.$$

4) Pour tout $n \leq m - 1$, $\Lambda_n \in \Pi_n$ et tout $\lambda \in \Lambda_n$,

$$A_{n+1}(\lambda) + F_{n+1}(\lambda, \cdot) \mathcal{R}(G_n) A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \cdot),$$

$$\Gamma_{n+1} \leq \bar{b}\Gamma_n + \bar{b}\epsilon_n \cdot e^{2\pi \frac{QN_n p_n h_{n+1}}{D(q+1)(n-1)D^{p_n+1}}},$$

$$\epsilon_{n+1} \leq D^{2d(q+1)(n-1)} (b\Gamma_n N_{n,p_n+1})^{a_7} e^{2\pi QN_n p_n \frac{h_{n+1}}{D(q+1)(n-1)D^{p_n+1}}} \frac{\epsilon_n^2}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}$$

$$+ bD^{dn(q+1)} \frac{e^{-2\pi(N_{n,p_n+1} - QN_n p_n) \frac{(h_n - h_{n+1})}{D(q+1)(n-1)D^{p_n+1}}} e^{2\pi QN_n p_n \frac{h}{D(q+1)(n-1)D^{p_n+1}}}}{(h_n - h_{n+1})^d} \epsilon_n.$$

$$\#\Pi_{n+1} \leq \bar{b}M_n R_n^q \delta_n^{-1} \zeta_n^{-q} (1 + |\Lambda|) \Pi_n.$$

5) Pour tout $n \leq m - 1$, on a $R_{n+1} \leq \bar{b}(R_n + N_n)$, et

- (i) pour $s_k < n < s_{k+1}$, $\tilde{M}_n = \tilde{M}_n$, $\tilde{\delta}_n = \delta_n$, $\tilde{c}_n = c_n$, $\tilde{r}_n = r_n$, $\tilde{\nu}_n = \min(\nu_n, c_n)$,
 $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n$, $\tilde{l}_n = l_n$.
- (ii) pour $n = s_k - 1$,

$$\tilde{\nu}_n = \frac{1}{10q} \hat{\zeta}_{s_k}, \quad \tilde{\zeta}_n = \hat{\zeta}_{s_k} = 10q\tilde{\nu}_n,$$

$$\tilde{M}_n = (\bar{b}R_n M_n \tilde{\nu}_n^{-1} \delta_n^{-1})^{\bar{\kappa}}, \quad \tilde{\delta}_n = (\bar{b}^{-1} R_n^{-1} \tilde{\nu}_n)^{\bar{\kappa}} \delta_n,$$

$$\tilde{c}_n = ((\bar{b}R_n M_n)^{-1} \tilde{\nu}_n \delta_n c_n)^{\bar{\kappa} r_n}, \quad \tilde{r}_n = q^2 r_n,$$

les mêmes estimations ayant lieu avec $\kappa_1 = \frac{1}{10} \bar{\kappa} \leq \bar{\kappa} - 2$ à la place de $\bar{\kappa}$;

6) On a toujours $l_{n+1} \leq \tilde{l}_n$ et,

(i) Soit $l_{n+1} = \tilde{l}_n$, auquel cas $l_{n+1}^V = \tilde{l}_n^V$ et alors,

$$M_{n+1} = R_n^{\bar{\kappa}} \tilde{M}_n + (\bar{b}\tilde{M}_n R_n \tilde{\nu}_n^{-1})^{\bar{\kappa}} \epsilon_n, \quad \delta_{n+1} = (\bar{b}\tilde{M}_n N_n R_n \tilde{\nu}_n^{-1})^{-\bar{\kappa}} \tilde{\delta}_n,$$

$$c_{n+1} = \tilde{c}_n - (\bar{b}\tilde{M}_n N_n R_n \tilde{\nu}_n^{-1} \tilde{\delta}_n^{-1})^{\bar{\kappa} \tilde{r}_n} \epsilon_n, \quad \nu_{n+1} = \tilde{\nu}_n - (\bar{b}\tilde{M}_n R_n \tilde{\nu}_n^{-1})^{\bar{\kappa}} \epsilon_n^{\frac{1}{q}},$$

$$\zeta_{n+1} = \tilde{\zeta}_n + q(\bar{b}\tilde{M}_n R_n \tilde{\nu}_n^{-1})^{\bar{\kappa}} \epsilon_n^{\frac{1}{q}}, \quad r_{n+1} = \tilde{r}_n;$$

(ii) soit $l_{n+1} < \tilde{l}_n$ et alors,

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= (\bar{b}R_n\tilde{M}_n)^{\bar{\kappa}} + (\bar{b}\tilde{M}_nR_n\tilde{\nu}_n^{-1})^{\bar{\kappa}}\epsilon_n, \\ \delta_{n+1} &= (\bar{b}\tilde{M}_nN_nR_n\tilde{\nu}_n^{-1})^{-\bar{\kappa}}\delta_n, \\ c_{n+1} &= ((\bar{b}\tilde{M}_nR_nN_n)^{-1}\tilde{\delta}_n\tilde{c}_n)^{\bar{\kappa}\tilde{r}_n} - (\bar{b}\tilde{M}_nR_n\tilde{\nu}_n^{-1}N_n\tilde{\delta}_n^{-1})^{\bar{\kappa}\tilde{r}_n}\epsilon_n, \\ \nu_{n+1} &= \tilde{\nu}_n - (\bar{b}\tilde{M}_nR_n\tilde{\nu}_n^{-1})^{\bar{\kappa}}\epsilon_n^{\frac{1}{q}}, \\ \zeta_{n+1} &= q(\tilde{\zeta}_n + \tilde{\nu}_n^{\frac{1}{q^2}}) + q(\bar{b}\tilde{M}_nR_n\tilde{\nu}_n^{-1})^{\bar{\kappa}}\epsilon_n^{\frac{1}{q}}, \\ r_{n+1} &= q^2\tilde{r}_n, \end{aligned}$$

les mêmes estimations ayant lieu dans (i) et (ii) avec $\kappa_1 = \frac{1}{10}\bar{\kappa} \leq \bar{\kappa} - 2$ à la place de $\bar{\kappa}$.

7) Posons pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $s_k \leq m$, $I_k = \{i \in [s_k, s_{k+1}) \cap [1, m-1], l_{i+1} < \tilde{l}_i\}$. Si $(t_n, w_n)_{n \leq m}$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{B}_I(t, w, \beta'')$ pour tout $n \leq m-1$, où $t = \min(c_1, \nu_1, M_1^{-1})$, $w = \delta_1$, alors on a pour tout $n \leq m$,

$$\max(M_n) \leq \min(t_n, w_n)^{-1} \quad \text{et} \quad \min(c_n, \delta_n, \nu_n) \geq \min(t_n, w_n) > 0,$$

et les mêmes inégalités sont vraies pour les variables « tildées ».

Démonstration. – Supposons la proposition $\mathcal{P}(m)$ vraie pour tout $n \leq m$ et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $m+1$. Partons donc de $A_m(\lambda) + F_m(\lambda, \cdot)$ défini sur $\Lambda_m \in \Pi_m$ et vérifiant les conclusions de la proposition. Ainsi A_m admet des décompositions $\Sigma(A_m(\lambda)) = \Sigma_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \Sigma_{l_m}(\lambda)$, $V(A_m(\lambda)) = V_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup V_{l'_m}(\lambda)$ qui sont $(M_m, \delta_m, c_m, r_m)$ -transverses et (ν_m, ζ_m) séparées.

- Si $s_k < m < s_{k+1}$ on a alors d'après l'hypothèse de récurrence 3),

$$\zeta_m \leq 4q^q \hat{\zeta}_m^f,$$

et par conséquent d'après la définition de $\hat{\zeta}_m$ (cf. 7.1.2, (ii)),

$$\zeta_m \leq 4q^q \hat{\zeta}_m^f < a_5 K_m^{-1}.$$

Nous pouvons alors appliquer le lemme 6.3.3 qui donne une partition $\Pi_{\text{res}}(\Lambda_m)$ de Λ_m en intervalles sur lesquels l'hypothèse $\mathcal{H}_{a_1, q, D}(p, J_{\text{res}}, k)$ est vérifiée. Notons $\tilde{\Lambda}_m$ un élément de $\Pi_{\text{res}}(\Lambda_m)$. L'hypothèse \mathcal{H} est alors satisfaite sur $\tilde{\Lambda}_m$; par ailleurs l'hypothèse de récurrence 3) montre que l'inégalité (6.2) a lieu sur $\tilde{\Lambda}_m$ et par conséquent la proposition 6.2.1 s'applique et nous permet de construire A_{m+1}, F_{m+1} de façon que l'hypothèse 4) soit vérifiée pour $n = m$. Par ailleurs, les points d) et e) des hypothèses de la proposition 6.3.1 sont également vérifiés (d'après 3). Les points (i) et (ii) de la proposition 6.3.1 démontrent alors les estimations du 6) où les valeurs de $\tilde{M}_n, \tilde{\delta}_n, \text{etc.}$ sont celles données par 5-(i)

- Si $s_k = m$, on applique la proposition 6.3.2 avec $\nu' = \frac{1}{10q}\hat{\zeta}_{s_k}$. Nous obtenons alors une partition $\Pi_{\text{sep}}(\Lambda_m)$ de Λ_m en intervalles et sur chacun de ceux-ci, disons $\hat{\Lambda}_m$, nous obtenons une nouvelle décomposition $\Sigma(A(\lambda)) = \tilde{\Sigma}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \tilde{\Sigma}_{\tilde{l}_n}(\lambda)$, $V(A_n(\lambda)) = \tilde{V}_1(\lambda) \sqcup \dots \sqcup \tilde{V}_{\tilde{l}'_n}(\lambda)$ qui sont $(\tilde{M}_m, \tilde{\delta}_m, \tilde{c}_m, \tilde{r}_m)$ -transverses et $(\frac{1}{10q}\hat{\zeta}_{s_k}, \hat{\zeta}_{s_k})$ -séparées et

\tilde{M}_m , etc. vérifient 5-(ii). Nous pouvons maintenant sur $\hat{\Lambda}_m$ reproduire la construction décrite ci-dessus sur chaque intervalle de $\Pi_{\text{res}}(\hat{\Lambda}_m)$.

Dans tous les cas les points 2), 4) 5) et 6) sont vérifiés pour $n = m$.

Vérifions à présent 1-(iv) : c'est une simple conséquence du fait que si on note $I_k = \{n \in [s_k, s_{k+1}) \cap [1, m], l_{n+1} < \tilde{l}_n\}$ on a $\#I_k \leq q$: en effet si les i_j , $s_k \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq \min(m, s_{k+1} - 1)$ sont dans $I_k - \{s_k\}$, alors on a $1 \leq l_{i_j} < l_{i_{j-1}} < \dots < l_2 < \tilde{l}_1 \leq q$, ce qui entraîne que $j \leq q$ (entre s_k et s_{k+1} il ne peut y avoir qu'au plus q accréctions de racines). Par conséquent, vu que pour $s_k \leq i \leq \min(m, s_{k+1} - 1)$, on a $r_{i+1} \leq q^2 r_i$, on obtient pour $n \leq \min(m + 1, s_{k+1})$, $r_n \leq q^3 r_{s_k}$ et par conséquent $r_n \leq (q^3)^{\xi_n}$.

Pour 1-(i): Ceci se déduit de 4) et du lemme du 7.1.1. 1-(ii) se démontre aisément en utilisant les points 5,6) et le fait que $N_{n,q+1} \leq (\bar{b}\beta'')^n$.

Pour 7): Posons, $t_n = \min(\nu_n, c_n, M_n^{-1})$, $w_n = \delta_n$, et définissons de même \tilde{t}_n, \tilde{w}_n . Un examen des estimations des points 5.(i), (ii) et 6.(i), (ii) montre que $(t_n, w_n, \tilde{t}_n, \tilde{w}_n)$ vérifient la propriété $\mathcal{B}_I(t, w, \beta'')$ pour $n \leq m$ où dans les définitions de $\mathcal{B}, \mathcal{B}^*$ on a choisi $\kappa = \bar{\kappa}$, $V^* = \bar{V}$ comme en (7.1), (7.4). Vérifions par exemple que,

$$\begin{aligned} t_{n+1} &\geq M_{n+1}^{-1} \geq [V^{-n}t_n + \epsilon_n(t_n V^{-n})^{-\kappa_1}], \\ &\geq \frac{V^n t_n^{-1}}{1 + \epsilon_n(t_n V^{-n})^{-(\kappa_1+1)}} \geq V^{-n}t_n - \epsilon_n(t_n V^{-n})^{-(\kappa_1+2)}, \end{aligned}$$

(où on a utilisé que pour $x > 0$, $(1+x)^{-1} \geq 1-x$) et on a choisi $\bar{\kappa} \geq \kappa_1 + 2$. Les autres estimations s'établissent de la même façon. Ceci montre 7) pour $n = m + 1$.

1-(iii) est une conséquence immédiate de la proposition 7.1.3.1 vu le choix fait pour β'' : $\min(t_n, w_n, \tilde{t}_n, \tilde{w}_n) \geq z_n$. 1-(v) découle des estimations 1-(iii), 1-(ii) et du 4).

La deuxième et la dernière inégalités de 3) résultent du choix fait pour β'' .

La première inégalité de 3) se démontre de la façon suivante: Comme précédemment soit $I_k = \{j \in [s_k, s_{k+1}) \cap \mathbf{N}, l_{j+1} < \tilde{l}_j\}$. Supposons $s_k < j \leq n \leq m + 1$; si $j \notin I$, on a alors

$$\zeta_{j+1} = \zeta_j + q(z_j^{-2}(2\bar{b})^{2n}(1 + R_1)\beta'')^{\bar{\kappa}} \epsilon_j^{\frac{1}{q}},$$

et si $j \in I$,

$$\zeta_{j+1} = q(\zeta_j + \nu_j^{\frac{1}{q^2}}) + q(z_j^{-2}(2\bar{b})^{2n}(1 + R_1)\beta'')^{\bar{\kappa}} \epsilon_j^{\frac{1}{q}}.$$

Par conséquent, vu que pour $s_k \leq j < s_{k+1}$, $\nu_j < \hat{\zeta}_{s_k} \cdot \frac{1}{q}$, on a,

$$\begin{aligned} \zeta_n &\leq q^q \tilde{\zeta}_{s_k} + q^q \left((q \hat{\zeta}_{s_k}^{\frac{1}{q^2}} \cdot \frac{1}{q}) + \sum_{j=s_k}^{n-1} q(z_j^{-2}(2\bar{b})^{2n}(1 + R_1)\beta'')^{\bar{\kappa}} \epsilon_j^{\frac{1}{q}} \right), \\ &\leq 2q^q \hat{\zeta}_{s_k}^{\frac{1}{q^2}} + q^{q+1} \sum_{j=s_k}^{n-1} (z_j^{-2}(2\bar{b})^{2n}(1 + R_1)\beta'')^{\bar{\kappa}} \epsilon_j^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

À présent, vu le choix fait pour β'' la formule (7.7) est bien vérifiée:

$$\sum_{j=n}^{\infty} (z_j^{-2}(2\bar{b})^{2n}(1 + R_1)\beta'')^{\bar{\kappa}} \epsilon_j^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{q} u_n,$$

c'est-à-dire pour $s_k \leq n < s_{k+1}$,

$$\zeta_n \leq 2q^q \hat{\zeta}_{s_k}^{\frac{1}{q^2}} + q^q \hat{\zeta}_{s_k} \leq 4q^q \hat{\zeta}_{s_k}^{\frac{1}{q^2}},$$

ce qui est la conclusion recherchée.

Finalement la troisième inégalité de 3) est immédiate d'après ce qui précède. Ceci termine la démonstration de la proposition 7.2.1. \square

8. Théorème en mesure positive. Rappelons le théorème « classique » suivant dans le cas $g = su(w + 1)$ (cf. [5] chap.4, chap. 3 ou [4] [3])

8.1. Théorème. Soient $\omega \in CD(\gamma, \sigma), h > 0, A(\cdot) \in C^\infty(\Lambda, g), F \in C_h^{\infty, \omega}(\Lambda \times \mathbf{R}^d / P\mathbf{Z}^d, g)$ ($P \in \mathbf{N} - \{0\}$) et $\chi > 0$. Supposons que les valeurs propres $\sqrt{-1}\alpha(\lambda)$ de $\text{ad}(A(\lambda))$ vérifient,

$$(8.1) \quad |\partial_\lambda \alpha(\lambda)| \geq \chi > 0,$$

et que A vérifie,

$$(8.2) \quad \left| \sup_{\substack{j=0,1,2 \\ \lambda \in \Lambda}} \partial_\lambda^j(A(\lambda)) \right| \leq M.$$

Alors il existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(M, h, P, \chi) > 0$ avec

$$\epsilon_0(M, h, P, \chi) = \left(\frac{CMP}{\chi \cdot h} \right)^{-\mu},$$

où $C, \mu > 0$ sont des constantes, tel que si,

$$\epsilon = \sup_{\substack{j=0,1,2 \\ \lambda \in \Lambda}} |\partial_\lambda^j F(\lambda, \cdot)|_h \leq \epsilon_0,$$

l'ensemble des λ pour lesquels $(\frac{\omega}{2\pi}, A(\lambda) + F(\lambda, \cdot))$ est non réductible sur $(\mathbf{R}^d / P\mathbf{Z}^d) \times G$ est de mesure de Lebesgue inférieure à $C \cdot \frac{(\epsilon M h^{-1} P)^\mu}{\chi}$.

La version usuelle de ce théorème est donnée d'habitude pour $P = 1$.

8.2. Utilisation de la transversalité. Montrons maintenant comment on peut récupérer une condition du type (8.1) à partir d'hypothèses de transversalité

8.2.1. Proposition. Supposons que $A(\cdot)$ ait des Σ et V -décompositions (M, δ, c, r) -transverses sur $\Lambda \subset \mathbf{R}$. Alors il existe des constantes $b > 0, \kappa_3 > 0$ telles que pour toute chaîne d'inégalités $0 < \chi < (bMR\delta^{-1}c^{-1})^{-\kappa_3^r}$, il existe un ensemble Π_2 d'intervalles de Λ avec

$$\begin{aligned} \#\Pi_2 &\leq (b(1 + |\Lambda|)MR\delta^{-1}c^{-1})^{\kappa_3^r}, \\ \text{mes}(\Lambda - \bigcup_{\Lambda_2 \in \Pi_2} \Lambda_2) &\leq (b(1 + |\Lambda|)MR\delta^{-1}c^{-1})^{\kappa_3^r} \chi^{\frac{1}{\kappa_3 r^2}}. \end{aligned}$$

sur lesquels la condition (8.1) est vérifiée.

Démonstration. – La proposition 3.2.2.1 montre que $\Sigma(A(\cdot))$ est $(M^{q^2}, \delta, \hat{c}, q^2r)$ -transverse avec $\hat{c} = (bMR\delta^{-1}c^{-1})^{-\hat{\kappa}^r}$; en particulier, $\Delta_0(\Sigma(A(\cdot)))$ est $(M^{q^2}, \delta, \hat{c}, q^2r)$ -transverse, et donc $(M^{q^2}(\delta/2)^{-(q^2r+1)}, c, q^2r)$ -Pyartli: pour $0 < \nu' < \hat{c}$ le lemme 2.2 montre que

$$E_1 = \{\lambda \in \Lambda, \Delta_0(\Sigma(A(\lambda))) = \nu'\}$$

est fini de cardinal inférieur à

$$\#E_1 \leq [2q^2r(1 + |\Lambda|)M^{q^2}(\delta/2)^{-(q^2+1)\hat{c}^{-1}} + 1],$$

et la mesure de Lebesgue m_1 de $\{\lambda \in \Lambda, \Delta_0(\Sigma(A(\lambda))) < \nu'\}$ est inférieure à,

$$m_1 \leq (2q^2r(1 + |\Lambda|)M^{q^2}(\delta/2)^{-(2q^2+1)\hat{c}^{-1}} + 1)2^{q^2r+2}\left(\frac{\nu'}{\hat{c}}\right)^{\frac{1}{q^2r}}.$$

Notons Π_1 l'ensemble des composantes connexes de $\Lambda - E_1$ sur lesquelles

$$|\Delta_0(\Sigma(A(\lambda)))| \geq \nu'.$$

Ainsi, si, $\lambda \in \Lambda_1 \in \Pi_1$, on a,

$$\left| \prod_{\substack{\sigma \neq \tau \\ \sigma, \tau \in \Sigma(\lambda)}} (\sigma - \tau) \right| \geq \nu',$$

c'est-à-dire, vu que $\Sigma(\lambda) \subset D(0, R)$, pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma(\lambda)$,

$$|\sigma - \tau| \geq \nu'(2R)^{-q^2} = \nu'_1.$$

Par conséquent la décomposition en singletons,

$$\Sigma(A(\lambda)) = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma(A(\lambda))} \{\sigma\},$$

est ν'_1 -séparée sur $\Lambda_1 \in \Pi_1$ et d'après la proposition 3.2.3.2, comme $\Sigma(A(\cdot))$ est $(M^{q^2}, \delta, \hat{c}, q^2r)$ -transverse, elle est (M', δ', c', r') -transverse avec

$$\begin{aligned} M' &= (bM^{q^2}R\nu_1^{-1})^{6q^3}, & \delta' &= (bRM^{q^2}\nu_1)^{-4q}\delta, \\ c' &= (bR^{-1}M^{-q^2}\nu_1\delta)^{7q^7r}\hat{c}, & r' &= q^2r. \end{aligned}$$

En particulier, cela signifie que pour tout $u \in \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto \sigma_i(\lambda) - u$ est $(M'(1 + |u|), \delta', c', r')$ -transverse.

Découpons à présent chaque $\Lambda_1 \in \Pi_1$ en $c'^{-1}M'(1 + R)2\delta'^{-1}(1 + |\Lambda_1|)$ intervalles de longueur au plus $2M'^{-1}(1 + R)^{-1}\delta'c'$, ce qui fournit une nouvelle partition Π_2 . Pour $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda_2 \in \Pi_2$, $\lambda \mapsto \sigma_i(\lambda) - \sigma_i(\lambda_0)$ est donc $(M'(1 + |\sigma_i(\lambda_0)|), \delta', c', r')$ -transverse c'est-à-dire $(M'(1 + R), \delta', c', r')$ -transverse et par conséquent $(M'(1 + R)\delta'^{-(r'+1)}, c', r')$ -Pyartli; en outre,

$$\begin{aligned} |\sigma_i(\lambda) - \sigma_i(\lambda_0)| &\leq M'(1 + R)(\delta'/2)^{-1}|\lambda - \lambda_0|, \\ &< c'. \end{aligned}$$

Le lemme 2.2 s'applique alors à $\partial_\lambda(\sigma_i(\lambda) - \sigma_i(\lambda_0)) = \partial_\lambda \sigma_i(\lambda)$ et on obtient que,

$$E_2 = \{\lambda \in \Lambda_2, |\partial_\lambda \sigma_i(\lambda)| \geq \chi\},$$

pour $\chi \leq c'/2$, a au plus

$$[2r'(1 + |\Lambda_2|) \left(\frac{M'(1+R)\delta^{-(r'+1)}}{c'} \right) + 1]$$

composantes connexes et que la mesure de $\Lambda_2 - E_2$ vérifie

$$\text{mes}(\Lambda_2 - E_2) \leq [2r'(1 + |\Lambda_2|) \frac{M'(1+R)\delta^{-(r'+1)}}{c'} + 1] 2^{r'+2} \left(\frac{\chi}{c'} \right)^{\frac{1}{r'}}.$$

En majorant grossièrement il est possible de voir que pour des constantes $\kappa_2, b > 0$,

$$\begin{aligned} \#\Pi_2 &\leq (b(1 + |\Lambda|)MR\delta^{-1}c^{-1})^{\kappa_2^r}, \\ \text{mes}(\Lambda - E_2) &\leq (bMR\delta^{-1}c^{-1})^{\kappa_2^r} (\nu'^{\frac{1}{q^2r}} + \nu'^{-\kappa_2r} \chi^{\frac{1}{q^2r}}). \end{aligned}$$

Cette dernière expression admet un minimum pour,

$$\nu' = (q^2r\kappa_2)^{\frac{q^2r}{\kappa_2q^2r+1}} \xi^{\frac{1}{1+\kappa_2q^2r}},$$

où elle vaut,

$$(bMR\delta^{-1}c^{-1})^{\kappa_2^r} \left(1 + \frac{1}{\kappa_2q^2r} \right) (q^2\kappa_2r)^{\frac{1}{\kappa_2q^2r+1}} \xi^{\frac{1}{q^2r(1+\kappa_2q^2r)}}.$$

Rappelons que ν' doit vérifier $\nu' < \hat{c}$; or, comme

$$\hat{c} > (bMR\delta^{-1}c^{-1})^{-\bar{\kappa}^r},$$

cela est assuré si,

$$\chi < (bMR\delta^{-1}c^{-1})^{-\kappa_3^r},$$

où $b, \kappa_3 > 0$ sont des constantes. On obtient alors (quitte à changer les constantes b, κ_3),

$$\text{mes}(\Lambda - \bigcup_{\Lambda_2 \in \Pi_2} \Lambda_2) \leq (bMR\delta^{-1}c^{-1})^{\kappa_3^r} \chi^{\frac{1}{\kappa_3r^2}}. \quad \square$$

9. Démonstration du théorème dans le cas $G = \text{SU}(w+1)$. Il suffit d'appliquer les propositions 7.2.1, 8.1, 8.2.1. Nous savons que pour $n \geq 1$, il existe une partition Π_n de Λ en intervalles $\tilde{\Lambda}$ sur lesquels $\lambda A + F(\lambda, \cdot)$ est conjugué sur $(\mathbf{R}^d / D^{(q+1)(n-1)} \mathbf{Z}^d) \times G$ à $A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \cdot)$, A_n admettant des (Σ, V) -décompositions (M, δ, c, r) -transverses. Ainsi, d'après les propositions 8.2.1 et 7.2, à chaque $\tilde{\Lambda} \in \Pi_n$ on peut associer un ensemble $\Pi_{n,2}$ d'intervalles $\Lambda_2 \subset \tilde{\Lambda}$ sur lesquels, pour χ vérifiant

$$(9.1) \quad 0 < \chi_n < (bM_n R_n \delta_n^{-1} c_n^{-1})^{-\kappa_3^{rn}},$$

on a

$$|A_n|_{\delta_n} \leq M_n^{q^2}, \quad \forall \alpha \in \Delta, |\partial_\lambda \alpha \circ A(\lambda)| \geq \chi_n > 0.$$

Le théorème 7.1, appliqué à $(\frac{\omega}{2\pi}, A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \cdot))$, qui définit un flot sur

$$(\mathbf{R}^d / D^{(q+1)(n-1)} \mathbf{Z}^d) \times G,$$

nous indique que l'ensemble $\mathcal{NR}_n(\Lambda_2)$ des $\lambda \in \Lambda_2 \subset \tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ pour lesquels $(\frac{\omega}{2\pi}, A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \cdot))$ n'est pas réductible sur $(\mathbf{R}^d / D^{(q+1)(n-1)} \mathbf{Z}^d) \times G$ est de mesure de Lebesgue inférieure à

$$\text{mes}(\mathcal{NR}_n(\Lambda_2)) \leq (\text{cste}) \cdot \frac{(\epsilon_n \delta_n^{-2} M_n^{q^2} \delta_n^{-2} h_n^{-1} D^{(q+1)n})^\mu}{\chi_n},$$

pourvu que

$$(9.2) \quad \epsilon_n \delta_n^{-2} \leq \left(\frac{CM_n^{q^2} \delta_n^{-2} D^{(q+1)n}}{h_n \chi_n} \right)^{-\mu}.$$

Par conséquent si (9.1) et (9.2) sont vérifiées, l'ensemble $\mathcal{NR}_n(\Lambda)$ des $\lambda \in \Lambda$ pour lesquels $(\frac{\omega}{2\pi}, \lambda A + F(\lambda, \cdot))$ n'est pas réductible sur $(\mathbf{R}^d / D^{(q+1)(n-1)} \mathbf{Z}^d) \times G$ est de mesure inférieure à

$$\begin{aligned} m_n = \text{mes}(\mathcal{NR}_n(\Lambda)) &\leq (\text{cste}) \cdot \#\Pi_n \cdot \max_{\tilde{\Lambda}} \#\Pi_{n,2}(\tilde{\Lambda}) \cdot \frac{(\epsilon_n M_n^{q^2} \delta_n^{-4} h_n^{-1} D^{(q+1)n})^\mu}{\chi_n} \\ &\quad + \#\Pi_n \cdot \max_{\tilde{\Lambda}} \text{mes}(\tilde{\Lambda} - \bigcup_{\Lambda_2 \in \Pi_{2,n}(\tilde{\Lambda})} \Lambda_2) \\ &\leq (\text{cste}) \cdot z_n^{-6q} \cdot z_n^{-n\kappa_3^{r_n}} \cdot \epsilon_n^\mu \frac{z_n^{-(q^2+6)\mu}}{\chi_n} + (\text{cste}) \cdot z_n^{-6q} \cdot z_n^{-n\kappa_3^{r_n}} \cdot \chi_n^{\frac{1}{\kappa_3 r_n^2}}, \end{aligned}$$

et donc pour une constante $\kappa_4 > \kappa_3$,

$$(9.3) \quad m_n \leq (\text{cste}) \cdot z_n^{-n\kappa_4^{r_n}} \left(\frac{\epsilon_n^\mu}{\chi_n} + \chi_n^{\frac{1}{\kappa_4 r_n^2}} \right).$$

Quitte à choisir κ_4 plus grande, il est clair que (9.1), (9.2) sont impliquées par,

$$(9.4) \quad \chi_n \leq z_n^{\kappa_4^{r_n}},$$

$$(9.5) \quad \epsilon_n \leq \chi_n^\mu z_n^{\kappa_4}.$$

Les estimations du 7 montrent alors que si on choisit $\chi_n = z_n^{2n\kappa_4^{r_n} \kappa_4 r_n^2}$, (9.4) est bien vérifiée et (9.5) l'est pour n assez grand et qu'on a alors bien dans (9.3) $m_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Nous avons ainsi montré que pour presque tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un entier P dépendant de λ pour lequel $\lambda A + F$ est réductible sur $(\mathbf{R}^d / P\mathbf{Z}^d) \times G$. Les propositions 1.2.5.1, 1.2.5.2 permettent alors de conclure la démonstration du théorème 1.1 dans le cas $G = \text{SU}(w + 1)$.

10. Démonstration du théorème dans le cas général. On peut, en toute généralité, supposer que le centre de G est réduit à l'identité, si bien que la représentation adjointe $G \rightarrow \text{Ad}(G) \subset GL(g)$, $u \mapsto \text{Ad}(u)$ est fidèle (injective).

Notons $K(X, Y) = -\text{Tr}(\text{ad}(X) \cdot \text{ad}(Y))$, $X, Y \in g$ la forme de Cartan-Killing sur g . Le groupe G étant compact c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive (i.e. un produit scalaire) sur g . Nous noterons K_c la forme hermitienne associée sur $g_c = g \otimes \mathbb{C}$, définie par

$$K_c(X, Y) = K(X, \bar{Y}), \quad X, Y \in g_c;$$

on a alors $K_c|_g = K$. Si on note $O(g), U(g)$ les groupes orthogonal et unitaire définis respectivement par K et K_c , c'est-à-dire les groupes constitués des éléments de $GL(g_c)$ qui préservent respectivement K et K_c , on a les inclusions,

$$G \simeq \text{Ad}(G) \subset O(g) \subset U(g) \subset GL(g_c),$$

et en notant $o(g), u(g)$ les algèbres respectives de $O(g), U(g)$,

$$g \simeq \text{ad}(g) \subset o(g) \subset u(g) \subset gl(g_c).$$

La représentation adjointe étant fidèle g et $\text{ad}(g)$ d'une part et G et $\text{Ad}(G)$ d'autre part sont isomorphes (en tant qu'algèbres d'une part et que groupes d'autre part). En outre les valeurs propres de $\text{ad}(X) \in u(g)$, $X \in g$ (resp. $\text{Ad}(e^{2\pi X}) \in U(g)$), sont alors 0 (resp. 1) avec multiplicité $\dim t$ et les $\sqrt{-1}\alpha(X)$, $\alpha \in \Delta$ (resp. $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha(X)}$). Notons alors $u^g = \text{Ad}(u) \in U(g)$ si $u \in G$ et $X^g = \text{ad}(X) \in u(g)$, pour $X \in g$. Les valeurs propres des endomorphismes $\text{ad}_{u(g)}(X^g) \in gl(u(g))$ sont donc les $\pm\sqrt{-1}\alpha(X)$, $\alpha \in \Delta$ avec multiplicité $\dim t$ et les $\sqrt{-1}(\alpha_1(X) - \alpha_2(X))$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$. Il est alors clair que, si (i) pour tout $\alpha \in \Delta$, $\alpha(A) \neq 0$, et (ii) pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$, $\alpha_1(A) \neq \alpha_2(A)$, la famille $\lambda A^g \in u(g)$ vérifie les hypothèses du théorème 1.1 dans le cas $u(g)$.

Remarquons que ces conditions sont vérifiées pour presque tout $A \in g$. Par conséquent en utilisant le théorème 8.1, on peut dire qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon < \epsilon_0$, et presque tout $\lambda \in \Lambda$, $\lambda A^g + F^g(\lambda, \cdot)$ est réductible dans $u(g)$, i.e. pour Lebesgue-presque tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $M(\theta) \in C^\omega(\Lambda \times \mathbf{T}^d, \text{Ad}(G))$ et $U_\lambda \in u(g)$ pour lesquels,

$$L_{\frac{\omega}{2\pi}} M(\theta) \cdot M(\theta)^{-1} + M(\theta) \cdot (\lambda A^g + F^g(\lambda, \theta)) \cdot M(\theta)^{-1} = U_\lambda = cste$$

Ainsi pour un tel λ , le flot de $(\frac{\omega}{2\pi}, \lambda A^g + F^g)$ sur $\mathbf{T}^d \times \text{Ad}(G)$ est relativement compact en topologie C^∞ ; le théorème 1.2.5.1 montre qu'il est réductible modulo un χ_G -revêtement ($\chi_G \in \mathbf{N} - \{0\}$) i.e. sur $\mathbf{R}^d / \chi_G \mathbf{Z}^d \times \text{Ad}(G)$ par un $(0, M_2)$, $M_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^d / \chi_G \mathbf{Z}^d, \text{Ad}(g))$. A présent si nous appliquons la proposition 1.2.5.2 à M, M_2 sur $\mathbf{R}^d / \chi_G \mathbf{Z}^d \times U(g)$, nous en déduisons que $M_2 M^{-1}$ est analytique, c'est-à-dire que M_2 l'est. En résumé nous avons démontré que pour presque tout $\lambda \in \Lambda$, $\lambda A^g + F^g$ est analytiquement réductible sur $\mathbf{R}^d / \chi_G \mathbf{Z}^d \times \text{Ad}(G)$. Les représentations Ad, ad étant fidèles on a la conclusion du théorème 1.1. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.H. ELIASSON, Floquet solutions for the 1-Dimensional quasi-periodic Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.* **146**, 1992, p. 447-482.
- [2] L.H. ELIASSON, Ergodic Skew Systems on $\mathbf{T}^d \times SO(3, \mathbf{R})$ Prépublication de l'ETH, Sept 1991.
- [3] L.H. ELIASSON, Discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators with pure point spectrum, *Acta Math.* **179**, 1997, p. 153-196.
- [4] L.H. ELIASSON, Perturbations of stable invariant tori for hamiltonian systems, *Ann. Sc. Nor. Sup. di Pisa* **4**, 1988, p.115-147.
- [5] R. KRIKORIAN, Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts, à paraître dans *Astérisque*.
- [6] A.S. PYARTLI, Diophantine approximations on submanifolds of euclidian spaces, *Funkt. Anal. i. Priloz.* **3**, 1969, p. 303-306.

(Manuscrit reçu le 30 janvier 1997;
accepté après révision le 6 novembre 1998.)

R. KRIKORIAN
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique,
UMR 7640 du CNRS,
91128 Palaiseau, France