

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL RAYNAUD

Spécialisation des revêtements en caractéristique $p > 0$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 32, n° 1 (1999), p. 87-126

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1999_4_32_1_87_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SPÉCIALISATION DES REVÊTEMENTS EN CARACTÉRISTIQUE $p > 0$

PAR MICHEL RAYNAUD

ABSTRACT. – Let p be a prime number and G be a finite group having a p -Sylow subgroup Q of order p . Thus the quotient of $N = \text{Norm}_G(Q)$ by $C = \text{Cent}_G(Q)$ is cyclic of some order n , a divisor of $p - 1$.

Let R be a complete discrete valuation ring with fraction field K of characteristic zero and algebraically residue field of characteristic p . We denote by e the ramification index of R . Let X be the projective line over R equipped with its 3 sections $0, 1, \infty$. Let $Y_K \rightarrow X_K$ be a finite normal Galois cover, with Galois group G , which is geometrically irreducible and ramified exactly above $0, 1, \infty$. We show that if $e < (p - 1)/n$, then Y_K has good reduction over R . More precisely, the integral closure Y of X is smooth over R and tamely ramified on X above $0, 1$ and ∞ . © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – Soient p un nombre premier et G un groupe fini, à centre trivial, ayant un p -sous-groupe de Sylow Q d'ordre p . Considérons $N = \text{Norm}_G(Q)$ et $C = \text{Cent}_G(Q)$, de sorte que N/C est un groupe cyclique d'ordre n divisant $p - 1$.

Soit R un anneau de valuation discrète complet, non ramifié, de corps des fractions K de caractéristique 0, de corps résiduel algébriquement clos de caractéristique p et soit e son indice de ramification. Désignons par X la droite projective sur R , munie de ses trois sections $0, 1, \infty$ et soit $Y_K \rightarrow X_K$ un revêtement fini galoisien normal, de groupe G , de la fibre générique X_K de X , qui est géométriquement connexe et ramifié exactement au-dessus de $0, 1, \infty$. Alors on montre que si l'on a $e < (p - 1)/n$, Y_K a bonne réduction sur R . Plus précisément, la clôture intégrale Y de X dans Y_K est lisse sur R et Y est modérément ramifiée sur X au-dessus de $0, 1, \infty$. © Elsevier, Paris

Dédié à Jean-Pierre Serre

Introduction

Soit R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique 0, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et soit e l'indice de ramification de R (0.1).

Considérons la droite projective X sur R munie de trois sections disjointes $0, 1, \infty$. Notons \underline{X} la fibre spéciale de X et X_K sa fibre générique. Que sait-on sur le groupe fondamental modéré $\pi_1^t(\underline{X} - \{0, 1, \infty\})$, qui classe les revêtements finis de \underline{X} , étales en dehors de $0, 1, \infty$ et modérément ramifiés en ces points ? Essentiellement les énoncés conjecturés par Abyhankar [Ab] et démontrés par Grothendieck ([Gr 1] Exp. XIII, cor. 2.12), au début des années 60 : on a une flèche de spécialisation surjective de groupes profinis

$$\text{sp} : \pi_1(X_{\overline{K}} - \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \pi_1^t(\underline{X} - \{0, 1, \infty\}) ,$$

où \overline{K} désigne une clôture algébrique de K , qui induit un isomorphisme sur les plus grands quotients profinis d'ordre premier à p .

Dans cet article, on étudie le cas des revêtements galoisiens modérés de $\underline{X} - \{0, 1, \infty\}$, de groupe fini G , d'ordre pa avec $(a, p) = 1$, c'est-à-dire dans le cas le plus simple qui se présente, une fois écartés les groupes finis d'ordre premier à p . Comme un tel revêtement se relève canoniquement en un revêtement de X modérément ramifié le long de $0, 1, \infty$, on est amené à partir d'un revêtement galoisien de $X_K - \{0, 1, \infty\}$, ramifié en $0, 1, \infty$, et à donner des conditions qui assurent que ce revêtement a bonne réduction sur R .

De façon précise, considérons un groupe fini G , à centre trivial, ayant un p -sous-groupe de Sylow Q d'ordre p . Notons N et C les normalisateurs et centralisateurs de Q dans G . Alors N/C est un groupe d'automorphismes de Q , et est donc cyclique d'ordre n divisant $p - 1$. Donnons nous par ailleurs un revêtement fini normal $Y_K \rightarrow X_K$, galoisien de groupe G , géométriquement connexe, ramifié exactement au-dessus de $0, 1, \infty$.

THÉORÈME 0. – *Supposons $e < (p - 1)/n$. Alors Y_K a bonne réduction sur R . Plus précisément, la normalisation Y de X dans Y_K est lisse sur R et modérément ramifiée au-dessus de X le long des sections $0, 1, \infty$.*

En particulier, l'ordre des groupes d'inertie du revêtement $Y_K \rightarrow X_K$ est premier à p , et par réduction sur le corps résiduel k , on obtient $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ qui est un revêtement géométriquement connexe de la droite projective sur k , galoisien de groupe G , modérément ramifié en $0, 1, \infty$.

La démonstration consiste à étudier la réduction stable Y' de Y_K qui existe sur une extension finie R' de R , galoisienne de groupe Γ : la monodromie finie. L'hypothèse que Q est d'ordre p permet un bon contrôle de la fibre spéciale \underline{Y}' de Y' et du revêtement $Y' \rightarrow Y'/G$. On montre ensuite, un peu miraculeusement nous semble-t-il, que Γ est trivial.

Signalons que l'on peut contrôler la monodromie finie sauvage Γ_w sans conditions sur la ramification de R (4.2.10.1) et que l'on obtient un énoncé analogue au théorème 0 si l'on remplace la droite projective privée de 3 points par l'autre type de courbe hyperbolique le plus simple, à savoir une courbe elliptique privée d'un point (5.1.5).

L'étude qui suit est indépendante de la notion de rigidité introduite dans le problème de Galois inverse, mais bien sûr, cette théorie peut être utilisée pour construire des revêtements de $X_K - \{0, 1, \infty\}$, définis sur des corps K suffisamment peu ramifiés sur \mathbf{Q} ou \mathbf{Q}_p pour que le théorème ci-dessus s'applique. Pour terminer, nous en donnons un exemple et mettons en évidence quelques unes des limites des énoncés de spécialisation des revêtements.

Je remercie le referee et Rachel pour leur lecture attentive du texte et leurs suggestions.

Plan de la démonstration. – Changeons les notations de l'introduction et affectons d'un indice o les données initiales : R_o, X_o, Y_{K_o} .

Soient K une extension finie de K_o et R la clôture intégrale de R dans K . Pour un choix convenable de K , la clôture intégrale de $X_o \otimes_{R_o} R$ dans Y_K admet un éclatement minimal Y qui est une courbe semi-stable sur R . L'action de G sur Y_K s'étend à Y , et la courbe quotient $X = Y/G$ est aussi semi-stable : sa fibre spéciale \underline{X} est un arbre A de droites projectives dans lequel figure la droite projective initiale \underline{X}_o . On oriente cet arbre en choisissant \underline{X}_o comme origine. Il apparaît alors des sommets terminaux : l'ensemble \mathbb{B} des bouts de A .

Si $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ est génériquement étale au-dessus de \underline{X}_o , on montre que Y_K a bonne réduction sur R , puis, par un argument de descente (utilisant le fait que G a un centre trivial), que Y_{K_o} a bonne réduction sur R_o .

On suppose maintenant que $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ n'est pas génériquement étale au-dessus de \underline{X}_o . L'hypothèse que les p -Sylow de G sont d'ordre p permet de montrer que le morphisme $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ est génériquement étale au-dessus des composantes bouts, et introduit une d'inertie radicielle de degré p au-dessus des autres composantes de \underline{X} . Compte tenu de cette analyse, on peut alors écrire une formule de cycles évanescents qui résume la ramification utile du morphisme $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$.

On aborde ensuite l'étude de la monodromie. On choisit K galoisien sur K_o . Le groupe de Galois Γ de K/K_o est essentiellement la monodromie finie qui conduit à la réduction stable pour Y_{K_o} . Le groupe Γ agit sur \underline{Y} et cette action commute à celle de G . On étudie d'abord l'action de la monodromie sauvage Γ_w et on montre que cette action est triviale. On considère ensuite l'action de la monodromie modérée et, sous la condition supplémentaire $e < (p-1)/n$, on prouve que $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ est génériquement étale au-dessus de \underline{X}_o , en contradiction avec l'hypothèse faite plus haut.

Les calculs de ramification nécessaires à l'étude de la monodromie sont regroupés au § 1. Le § 2 contient des énoncés généraux sur les actions de groupes finis sur les modèles semi-stables. On peut négliger dans un premier temps les § 1 et 2 et arriver au plus vite à l'étude combinatoire du morphisme $Y \rightarrow X$ et à la formule des cycles évanescents qui occupe le § 3. Les calculs sont présentés pour une courbe hyperbolique générale. Le contrôle de la monodromie, (qui n'est satisfaisant que dans le cas de la droite projective privée de 3 points et dans le cas d'une courbe elliptique privée d'un point), est effectué dans les § 4 et 5.

Une fois les acteurs présentés, le lecteur trouvera un plan plus détaillé de l'étude de la monodromie dans 3.5.

0. Conventions

0.1. Si S est un anneau de valuation discrète, on normalise la valuation de façon que le groupe de la valuation soit \mathbf{Z} . Lorsque le corps des fractions de S est de caractéristique 0 et le corps résiduel de caractéristique $p > 0$, l'indice de ramification e de S est la valuation de p .

0.2. Soient p un nombre premier et n un entier divisant $p-1$. Si Q est un groupe cyclique d'ordre p et C est un groupe cyclique d'ordre n , $Q \cdot C$ désigne un groupe produit semi-direct de Q par C , donné par un morphisme injectif $C \rightarrow \text{Aut}(Q) = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \simeq \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$. Ce groupe est unique à isomorphisme près.

1. Ramification

1.1. L'invariant $\sigma = h/m$

Dans ce numéro, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et S est une k -algèbre qui est un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k . Donc S est (non canoniquement) isomorphe à l'anneau des séries formelles $k[[s]]$.

1.1.1. Soit $S \rightarrow T$ une extension finie d'anneaux de valuation discrète complets qui est galoisienne de groupe de Galois H . Alors H est extension d'un groupe cyclique C d'ordre

m premier à p , par un p -groupe Q . Cette extension est scindée, de sorte que H est produit semi-direct de Q par C .

Dans la suite de 1.1, on suppose que Q est d'ordre p .

L'extension $S \rightarrow T$ se factorise canoniquement en $S \rightarrow S' \rightarrow T$ où $S \rightarrow S'$ est cyclique de degré m , $S' \rightarrow T$ est cyclique de degré p . On peut choisir des coordonnées s et s' sur S et S' telles que $s'^m = s$ et que T soit engendrée sur S' par une équation d'Artin-Schreier de la forme $x^p - x = s'^{-h}$, avec $h > 0$ et $(h, p) = 1$. L'entier h détermine la T -valuation de la différentielle :

$$\delta_{T/S'} = (p-1)(h+1).$$

Donc $\delta_{T/S} = p(m-1) + (p-1)(h+1)$.

Nous appellerons l'entier h le *conducteur* de l'extension $S' \rightarrow T$ et nous dirons que $S \rightarrow T$ est une *extension de type (m, h)* . Un rôle important sera joué par le nombre rationnel $\sigma = h/m$. Nous allons en présenter quelques propriétés.

Le groupe de Galois H , produit semi-direct de Q par C , est décrit par un morphisme de groupes $\phi : C \rightarrow \text{Aut}(Q) = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Le noyau de ϕ est le sous-groupe central de H , d'ordre premier à p , maximal. Si ϕ est injectif, m divise $p-1$ et H est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (0.2).

Notons le lemme immédiat suivant :

1.1.2.

LEMME. – Soit $S \rightarrow T$ une extension de groupe H de type (m, h) et soit C^\wedge un sous-groupe central de H d'ordre d premier à p . Soit $H^\wedge = H/C^\wedge$, et soit T^\wedge le sous-anneau de T formé des invariants sous C^\wedge . Alors $S \rightarrow T^\wedge$ est de type (m^\wedge, h^\wedge) avec $m = m^\wedge d$, $h = h^\wedge d$. En particulier $\sigma = h/m = h^\wedge/m^\wedge = \sigma^\wedge$.

1.1.3.

Remarque. – Il y a sur h d'autres contraintes que la condition $(h, p) = 1$. Ainsi, si le centre de H d'ordre premier à p est trivial (cas auquel on se ramène par 1.1.2), on a alors $(h, m) = 1$, comme il résulte du fait que T est une extension galoisienne de S .

1.1.4.

LEMME. – Soit $S^\wedge = k[[s^\wedge]]$ et soient $S^\wedge \rightarrow T^\wedge$ et $S^\wedge \rightarrow S$ des extensions d'anneaux de valuation discrète engendrées par des équations d'Artin-Schreier de conducteurs respectifs h^\wedge et h' . Soit T le normalisé de $T^\wedge \otimes_{S^\wedge} S$. Alors

- i) Si $h^\wedge > h'$, $S \rightarrow T$ est une extension d'Artin-Schreier de conducteur h avec $h = h' + p(h^\wedge - h')$
- ii) Si $h^\wedge = h' = 1$, et si $S^\wedge \rightarrow T^\wedge$ et $S^\wedge \rightarrow S$ sont des extensions linéairement disjointes on a $h = 1$.

Le cas ii) est immédiat par calcul direct. Prouvons i), qui ne prétend pas être nouveau.

Notons a le conducteur de $T^\wedge \rightarrow T$ et h celui de $S \rightarrow T$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif d'extensions d'Artin-Schreier :

$$\begin{array}{ccc} T^\wedge & \xrightarrow{a} & T \\ h^\wedge \uparrow & & \uparrow h \\ S^\wedge & \xrightarrow{h'} & S \end{array}$$

Calculons les différentielles.

On a $\delta_{T/S^\wedge} = p\delta_{S/S^\wedge} + \delta_{T/S} = p\delta_{T^\wedge/S^\wedge} + \delta_{T/T^\wedge}$, soit :

$$(p-1)[p(h'+1) + h + 1] = (p-1)[p(h^\wedge + 1) + a + 1].$$

D'où :

$$h = a + p(h^\wedge - h').$$

En particulier $h > a$.

L'extension $S^\wedge \rightarrow T$ est galoisienne de groupe $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Soit H^\wedge le sous-groupe de G d'ordre p qui fixe T^\wedge et H le sous-groupe d'ordre p qui fixe S . Comme $h > a$, H est un sous-groupe de ramification supérieure de G . Les sous-groupes de ramification supérieure G_i de G sont alors, avec les notations de ([Se 1] chap. IV), tels que :

$$G_i = G \text{ pour } 0 \leq i \leq i_1, \quad G_i = H \text{ pour } i_1 < i \leq i_2, \quad G_i = 0 \text{ pour } i > i_2.$$

Nécessairement $h = i_2$ et $a = i_1$.

Par ailleurs il résulte de *a loc. cit.* Prop. 4, que l'on a :

$$\delta_{T/S^\wedge} = (p^2 - 1)(i_1 + 1) + (p - 1)(i_2 - i_1).$$

Donc

$$(p+1)(i_1 + 1) + (i_2 - i_1) = p(h' + 1) + h + 1 = p(h^\wedge + 1) + a + 1.$$

Les formules ci-dessus donnent alors $a = i_1 = h'$, $h = i_2 = p(h^\wedge - h') + h'$.

1.1.5.

PROPOSITION. — Soit $S^\wedge = k[[s^\wedge]] \rightarrow T^\wedge$ une extension locale d'anneaux de valuation discrète qui est galoisienne de groupe H , de type (m^\wedge, h^\wedge) au sens de 1.1, avec $\sigma^\wedge = h^\wedge/m^\wedge > 1$. Soit $S^\wedge \rightarrow S$ une extension d'Artin-Schreier de conducteur 1 et soit T le normalisé de $T^\wedge \otimes_{S^\wedge} S$. Alors $S \rightarrow T$ est une extension locale de groupe H , de type (m, h) avec $m = m^\wedge$, $\sigma - 1 = h/m - 1 = p(h^\wedge/m^\wedge - 1) = p(\sigma^\wedge - 1)$.

En effet, factorisons $S^\wedge \rightarrow T^\wedge$ en $S^\wedge \rightarrow S'^\wedge \rightarrow T^\wedge$ où $S^\wedge \rightarrow S'^\wedge$ est de degré m^\wedge et $S'^\wedge \rightarrow T^\wedge$ est de conducteur h^\wedge .

Considérons S' qui est le normalisé de $S'^\wedge \otimes_{S^\wedge} S$. Alors $S \rightarrow T$ se factorise en $S \rightarrow S' \rightarrow T$, avec $S \rightarrow S'$ modérée de degré $m = m^\wedge$ et $S' \rightarrow T$, cyclique de degré p , de conducteur h . Par ailleurs, il est clair que $S'^\wedge \rightarrow S'$ est une extension d'Artin-Schreier de conducteur m^\wedge .

$$\begin{array}{ccc} T^\wedge & \longrightarrow & T \\ h^\wedge \uparrow & & \uparrow h \\ S'^\wedge & \xrightarrow{m^\wedge} & S' \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^\wedge & \xrightarrow{1} & S \end{array}$$

Alors T est le normalisé de $T^\wedge \otimes_{S'^\wedge} S'$. Comme par hypothèse $h^\wedge > m^\wedge$, il résulte de 1.1.4 que T est une extension d'Artin-Schreier de S' de conducteur h avec $h = m^\wedge + p(h^\wedge - m^\wedge)$. Donc $h/m - 1 = p(h^\wedge/m^\wedge - 1)$.

1.1.6.

PROPOSITION. – Soit $V \rightarrow P$ un revêtement fini galoisien de la droite projective sur k . On suppose que :

- V est lisse sur k , connexe, ramifié au-dessus d'un seul point ∞ de P .
- Le groupe d'inertie I en un point au-dessus de ∞ est d'ordre pm , avec $(m, p) = 1$.

Soit I' le quotient de I par son sous-groupe central maximal d'ordre premier à p , et soit pm' l'ordre de I' . Alors :

- i) si le genre de V est > 0 , la ramification au-dessus de ∞ est de type (m, h) au sens de (1, 1) avec $\sigma - 1 = h/m - 1 \geq 1/m'$;
- ii) si V est de genre 0, $V \rightarrow P$ est un revêtement d'Artin-Schreier, de conducteur 1.

Prouvons i). Il résulte de la formule d'Hurwitz appliquée au revêtement galoisien connexe $V \rightarrow P$, que l'on a $-2 + [p(m-1) + (p-1)(h+1)]/mp \geq 0$, soit encore :

$$\begin{aligned} -2 + 1 - 1/m + (1 - 1/p)(h+1)/m &\geq 0 \\ (1 - 1/p)(h+1)/m &\geq 1 + 1/m, \\ (h+1)/m &\geq 1 + 1/m + (h+1)/pm. \end{aligned}$$

D'où $h/m - 1 \geq (h+1)/pm > 0$.

Par ailleurs, il résulte de 1.1.2, que $\sigma = h/m$ n'est pas affecté quand on divise I par son centre maximal d'ordre premier à p . Donc $\sigma = h'/m'$, avec h' entier et $(h', m') = 1$. Finalement, la condition $\sigma - 1 > 0$ entraîne $\sigma - 1 \geq 1/m'$.

Prouvons ii) qui est classique. Il suffit évidemment de montrer que I est invariant dans le groupe de Galois G du revêtement $V \rightarrow P$. Or la formule de Hurwitz montre que l'indice de I dans G divise 2.

1.2. Revêtements de degré p et schémas en groupes**1.2.1.**

PROPOSITION. – Soit U un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k_U de caractéristique $p > 0$. Soit V la clôture intégrale de U dans une extension cyclique de degré p du corps des fractions de U et soit k_V le corps résiduel de V . On suppose que $[k_V : k_U] = p$.

Alors il existe sur $\text{Spec}(U)$ un schéma en groupes fini et plat \mathcal{G} , de fibre générique $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, unique à isomorphisme près, tel que $\text{Spec}(V)$ soit un torseur fppf (c'est-à-dire pour la topologie fidèlement plate de présentation finie) sous \mathcal{G} , de base $\text{Spec}(U)$.

Considérons le schéma en groupes affine \mathcal{A} sur $\text{Spec}(U)$ des automorphismes de la U -algèbre V . Autrement dit, pour tout U -algèbre U' , les points de \mathcal{A} , à valeurs dans U' , sont les U' -automorphismes de la U' -algèbre $V' = V \otimes_U U'$. L'action naturelle de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur V , définit un morphisme de schémas en groupes sur $\text{Spec}(U)$ $\iota : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{A}$, qui est injectif sur la fibre générique. Soit \mathcal{G} l'image schématique de ι . Comme U est un anneau de valuation discrète, \mathcal{G} est un schéma en groupes fini et plat; sa fibre générique est $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Par construction, \mathcal{G} opère fidèlement universellement sur $\text{Spec}(V)$. Il est clair que si $\text{Spec}(V)$ est un torseur sur $\text{Spec}(U)$ sous un schéma en groupes fini et plat, celui-ci sera nécessairement isomorphe à \mathcal{G} .

Il reste à voir que \mathcal{G} opère librement sur $\text{Spec}(V)$. C'est clair si k_V est étale sur k_U , auquel cas V est étale sur U et $\mathcal{G} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Examinons le cas où k_V est une extension radicielle de k_U de degré p . Faisons le changement de base $\text{Spec}(V) \rightarrow \text{Spec}(U)$. Pour voir que \mathcal{G} opère fidèlement sur $\text{Spec}(V)$, il suffit de voir que le stabilisateur dans $\mathcal{G} \times_U V$ de la section diagonale de $\text{Spec}(V) \times_{\text{Spec}(U)} \text{Spec}(V)$ est le schéma en groupes unité. Par le lemme de Nakayama, il suffit de le montrer mod π , où π est une uniformisante de U . Or par hypothèse, V se réduit, mod π , suivant une extension radicielle k_V de k_U . Notons $\underline{\mathcal{G}}$ le k_V -schéma en groupes $\mathcal{G} \times_{k_U} k_V$. Le stabilisateur de la section diagonale mod π est un sous-schéma en groupes $\underline{\mathcal{Z}}$ de $\underline{\mathcal{G}}$, distinct de $\underline{\mathcal{G}}$, car l'action est fidèle. Comme k_V est un corps et $\underline{\mathcal{G}}$ de degré p , nécessairement $\underline{\mathcal{Z}} = 0$.

1.2.2.

COROLLAIRE. – Supposons de plus U d'inégale caractéristique et soit e l'indice de ramification de U (0.1). Alors :

- i) Si $e < p - 1$, V est étale sur U et $\mathcal{G} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
- ii) Si $e = p - 1$, ou bien $\mathcal{G} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et V est étale sur U ou bien \mathcal{G} est le groupe de type multiplicatif μ_p et V est décrit par une équation de Kummer $v^p - u = 0$, où u est une unité de U dont l'image dans k_U n'est pas une puissance p -ème.

En effet si $e < p - 1$ (resp. si $e = p - 1$) il résulte de [Ra 1] Prop. 3.3.2 et th. 3.3.3 que \mathcal{G} est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (resp. à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou μ_p).

1.2.3.

Remarque. – Les schémas en groupes finis et plats de degré p sur un anneau de valuation discrète sont classifiés dans [Oo-Ta] et [Ra 1]. Ils sont essentiellement déterminés par leur différentielle.

2. Réduction semi-stable et revêtements

2.1. Dans ce paragraphe R désigne un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K , de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On note π une uniformisante de R .

2.1.1.

DÉFINITION. – Une R courbe X sera dite semi-stable, si elle est plate sur R , à fibre générique X_K lisse sur K , à fibre spéciale \underline{X} géométriquement réduite, ayant pour seules singularités des points doubles ordinaires.

Soit \underline{x} un point rationnel de la fibre fermée \underline{X} d'une R -courbe semi-stable X .

Si \underline{x} est un point lisse de \underline{X} , le complété de $O_{X,\underline{x}}$ pour la topologie définie par son idéal maximal est R -isomorphe à $R[[T]]$. Le choix de la coordonnée T est déterminé, à multiplication près par une unité, par le choix d'un point x de $X(R)$ qui se spécialise en \underline{x} . Du point de vue de la géométrie analytique rigide, les points de X_K qui se spécialisent en \underline{x} , sont les points du disque unité ouvert $v(T) > 0$, où v désigne la valuation de K étendue à une clôture algébrique \bar{K} de K .

Si \underline{x} est un point double de \underline{X} , le complété de $O_{X,\underline{x}}$ pour la topologie définie par son idéal maximal est isomorphe à $R[[U, V]]/(UV - \pi^\varepsilon)$, où ε est un entier > 0 , bien déterminé, que nous appellerons l'épaisseur de la singularité. Du point de vue de la géométrie analytique rigide sur K , les points de X_K qui se spécialisent en \underline{x} sont les points d'une couronne ouverte d'épaisseur ε . On peut par exemple prendre pour coordonnée de Laurent sur cette couronne $T = U = \pi^\varepsilon/V$, avec $0 < v(T) < \varepsilon$.

2.1.2. On associe classiquement à la fibre fermée \underline{X} d'une R -courbe semi-stable X , un *graphe métrique* A : un sommet de A correspond à une composante irréductible de \underline{X} ; une arête de longueur ε correspond à un point double d'épaisseur ε et relie les deux sommets, distincts ou confondus, associés aux 2 branches de la courbe \underline{X} passant par \underline{x} .

Soit X une courbe semi-stable sur R et \underline{x} un point double de \underline{X} , d'épaisseur ε . L'anneau local complété en X est donc isomorphe à $R[[U, V]]/(UV - \pi^\varepsilon)$, de coordonnée de Laurent $T = U$, $0 < v(T) < \varepsilon$. Soit ε' un nombre rationnel de l'intervalle $]0, \varepsilon[$. Nous allons modifier, par éclatement en \underline{x} , le modèle semi-stable X (après extension éventuelle de R) de façon à obtenir un nouveau modèle semi-stable X' dominant X , dans lequel les points de la couronne d'épaisseur nulle $v(T) = \varepsilon'$, se spécialisent en les points lisses d'une composante de \underline{X}' .

Supposons d'abord que ε' soit entier et posons $\varepsilon'' = \varepsilon - \varepsilon'$. On peut alors réaliser la modification X' rationnellement sur R en introduisant un nouveau sommet sur l'arête correspondant au point double \underline{x} , comme dans la figure 1.

La nouvelle composante qui s'introduit dans le graphe de \underline{X}' est une droite projective \underline{P} reliée au reste du graphe par deux points doubles $\underline{0}$ et $\underline{\infty}$. Les points de la couronne d'épaisseur nulle $v(T) = \varepsilon'$ se spécialisent alors en les points de $\underline{P} - \{\underline{0}, \underline{\infty}\}$.

Lorsque ε' n'est pas entier, si m est un entier > 0 , tel que $m\varepsilon'$ soit entier, on effectue d'abord n'importe quelle extension R' de R qui multiplie la valuation de π par m et on est ramené au cas précédent. On prendra garde que lorsque m n'est pas premier à p , il n'y a pas *a priori* d'extension R' de R meilleure que les autres qui convient.

2.2.

2.2.1.

DÉFINITION. – Une R -courbe X sera dite *stable* si elle est semi-stable sur R , propre sur R , à fibres géométriquement connexes de genre ≥ 2 , et si toute droite projective \underline{P} de \underline{X} rencontre les autres composantes en au moins 3 points.

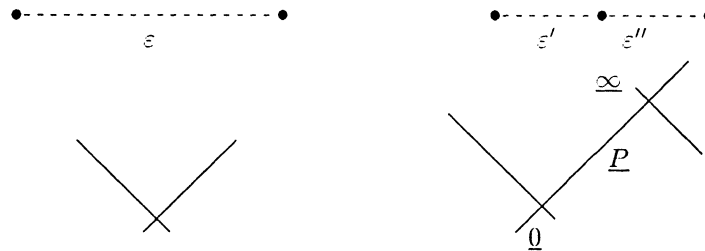


Figure 1.

Rappelons le résultat essentiel suivant :

2.2.2.

PROPOSITION (rappel). – Soit Y_K une K -courbe propre et lisse, géométriquement connexe, de genre $g_Y \geq 2$. Alors Y_K a potentiellement réduction stable. De façon précise, il existe une extension finie K' de K , telle que si R' désigne la clôture intégrale de R dans K' , alors $Y_{K'} = Y_K \times_K K'$ se prolonge en une R' -courbe stable Y' . La R' -courbe Y' est unique à isomorphisme unique près.

De plus, il existe une plus petite extension K' de K qui conduit à la réduction stable. Cette extension K' est galoisienne sur K . Le groupe $\text{Gal}(K'/K) = \Gamma$ est appelé la monodromie finie. L'action naturelle K' -semi-linéaire de Γ sur $Y_{K'}$ s'étend uniquement en une action R' -semi-linéaire sur Y' . Celle-ci induit une action k -linéaire sur \underline{Y}' . L'action de Γ sur \underline{Y}' est fidèle. (cf. [De-Mu] cor. 2.7 et [De] exp. n° 1).

2.2.3.

Remarques. – (1) Si Y_K est de genre 0, comme k est algébriquement clos, Y_K est une droite projective, et Y_K admet des réductions semi-stables minimales sur R qui sont des droites projectives. Mais il n'y a plus unicité.

(2) Si Y_K est une courbe de genre 1, c'est un torseur sous sa jacobienne E_K qui est une courbe elliptique (c'est-à-dire une courbe de genre 1 munie d'un point rationnel origine). Il y a encore une bonne théorie de la monodromie finie pour les courbes elliptiques (comme pour les variétés abéliennes), par contre il n'y a pas en général de meilleure extension R' de R qui conduit à un modèle semi-stable pour les courbes de genre 1.

Pour ces raisons nous démontrerons d'abord le théorème 0 lorsque la courbe Y_K est de genre au moins 2, puis nous considérerons à part, au § 5, le cas où Y_K est de genre 0 et 1.

2.3. Quotient d'une courbe semi-stable par un groupe fini d'automorphismes

Dans ([Ra 2] Appendice), il est établi que le quotient d'une courbe semi-stable par un groupoïde fini est semi-stable. Nous allons préciser, dans le cas galoisien, la structure des groupes d'inertie.

2.3.1.

PROPOSITION (quotient d'un disque formel). – Soit H un groupe fini de R -automorphismes de l'anneau de séries formelles $R[[T]] = S$. Alors l'anneau d'invariants $S^H = S'$ est un anneau de séries formelles $R[[T']]$. On peut prendre pour T' la norme de T . Le groupe H est extension d'un groupe H_t cyclique, d'ordre m premier à p , par un p -groupe H_w . Soit S'' l'anneau des invariants de S sous H_w . Alors, pour un choix convenable de la coordonnée T' , S'' se déduit de S' en extrayant une racine m -ième de T' . En particulier il existe au plus un seul point de $\text{Spec}(S'_K)$ ramifié dans $\text{Spec}(S_K)$ avec un groupe d'inertie qui n'est pas un p -groupe, et ce point est rationnel sur K .

Démonstration. – Les localisés de S et S' en (π) sont des anneaux de valuation discrète d'uniformisante π . Le groupe H est le groupe de décomposition en l'idéal premier (π) . Le groupe d'inertie I en (π) est un p -groupe. Le groupe H/I est le groupe de Galois de l'extension locale $k[[T]]/k[[T']]$, et est donc extension d'un groupe cyclique d'ordre m premier à p par un p -groupe. Finalement H lui-même est bien extension d'un groupe cyclique H_t d'ordre m par un p -groupe H_w . Pour étudier $S' \rightarrow S''$, on peut prendre d'abord les invariants sous H_w et donc se ramener au cas où $H = H_t$ est cyclique d'ordre m . Il est alors bien connu que l'on peut choisir la coordonnée T' , de façon que S s'obtienne en extrayant une racine m -ième de T' . En particulier, le lieu de ramification de $S' \rightarrow S''$ est vide si $m = 1$, et se réduit à $T' = 0$ sinon.

2.3.2.

PROPOSITION (quotient d'une couronne formelle). – Soit ε un entier ≥ 1 et soit H un groupe fini de R -automorphismes de l'anneau $R[[U, V]]/(UV - \pi^\varepsilon) = S$.

a) Supposons d'abord que H fixe chacune des deux branches modulo π . Alors l'anneau d'invariant $S' = S^H$ est isomorphe à $R[[U', V']]/(U'V' - \pi^{\varepsilon h})$ où h est l'ordre de H .

On peut prendre pour U' et V' les normes de U et V . Le groupe H est extension d'un groupe cyclique H_t d'ordre m premier à p , par un p -groupe H_w . Notons S'' les invariants de S sous H_w . Alors, S'' se déduit de S' en extrayant des racines m -èmes de U' et V' . En particulier, S''_K est étale sur S'_K et les groupes d'inertie du morphisme d'anneaux $S'_K \rightarrow S_K$ sont des p -groupes.

b) Supposons que H échange les deux branches modulo π (cas d'une inversion). Alors $S' = S^H$ est isomorphe à $R[[T']]$. On peut prendre pour T' la norme de U . Soit H^\sim le sous-groupe d'indice 2 de H qui fixe chacune des 2 branches modulo π . Alors H^\sim est du type décrit dans a), extension d'un groupe H_t cyclique d'ordre m premier à p , par un p -groupe H_w . De plus H_w est invariant dans H et le quotient H/H_w est le groupe diédral d'ordre $2m$. Notons S^\sim l'anneau des invariants dans S sous H^\sim . Alors S^\sim est de degré 2 sur S' . La ramification de $S'_K \rightarrow S^\sim_K$ est la suivante : si K n'est pas de caractéristique 2, il y a exactement deux points géométriques de $\text{Spec}(S'_K)$ qui sont ramifiés (ils sont rationnels sur K ou conjugués sur une extension quadratique) ; ils ont même spécialisation mod. π . Si K est de caractéristique 2, il y a un seul point ramifié et il est rationnel sur K .

Démonstration. – Plaçons-nous d'abord dans le cas a). Là encore le groupe H est le groupe de décomposition en chacune des deux branches u et v mod. π . Les groupes d'inerties I_u et I_v sont des p -groupes invariants dans H et ils engendrent un p -groupe I invariant dans H . Posons $H_1 = H/I$. Pour étudier H , et quitte à passer d'abord au quotient par I , on est ramené au cas où $I_u = I_v = \{1\}$, $H = H_1$. Alors H s'interprète, sur l'une et l'autre des branches, comme groupe de Galois d'un corps local, et est donc extension d'un groupe cyclique d'ordre m premier à p , par un p -groupe. Finalement H lui-même est bien extension d'un groupe cyclique H_t , d'ordre m , par un p -groupe H_w . Pour étudier la ramification modérée, correspondant à H_t , on peut alors passer au quotient par H_w , donc supposer $H = H_t$. Pour achever de prouver les assertions de a), il reste à voir que $S'_K \rightarrow S_K$ est étale. Notons ω (resp. ω') le module dualisant sur S (resp. S'). Il suffit de montrer que l'application canonique $\omega' \otimes_{S'} S \rightarrow \omega$ est un isomorphisme. Comme ω et ω' sont libres de rang 1, il suffit de le voir en réduction mod. π , ce qui résulte du fait que $S' \otimes_R k \rightarrow S \otimes_R k$ est modéré.

b) Passons maintenant au cas où il y a inversion. Pour étudier H/H_w , on peut passer au quotient dans S par le p -groupe invariant H_w et donc se ramener au cas où $H_w = \{1\}$. Pour montrer que H est alors le groupe diédral d'ordre $2m$, on peut, quitte à extraire une racine carrée de π , supposer que ε est pair. Alors H laisse stable la couronne médiane de la singularité d'épaisseur nulle. Effectuons la modification semi-stable qui partage la couronne d'épaisseur ε en deux couronnes d'épaisseur $\frac{\varepsilon}{2}$ (2.1.2) comme dans la figure 2.



Figure 2.

Cette modification introduit une droite projective \underline{P} liée au reste du graphe par deux points $\underline{0}$ et $\underline{\infty}$. Le groupe H opère fidèlement sur \underline{P} en échangeant $\underline{0}$ et $\underline{\infty}$. Il en résulte que H est le groupe diédral D_{2m} . Le quotient de \underline{P} par H , s'obtient d'abord en passant au quotient par le sous-groupe cyclique d'ordre m qui fixe exactement $\underline{0}$ et $\underline{\infty}$, puis par une involution qui en caractéristique résiduelle $\neq 2$ a exactement deux points fixes qui ne sont pas au-dessous de $\underline{0}$ et $\underline{\infty}$, et en caractéristique résiduelle 2 a exactement un point fixe et celui-ci n'est pas au-dessous de $\underline{0}$ et $\underline{\infty}$. On en déduit immédiatement que, sur la fibre générique, cette involution a des points fixes du type décrit dans b).

2.3.3.

COROLLAIRE. – Soit Y une courbe semi-stable quasi-projective sur R , à fibre générique géométriquement connexe, sur laquelle opère fidèlement un groupe fini G . Alors :

- i) $X = Y/G$ est semi-stable sur R ;
- ii) Soit H le groupe d'inertie en un point \underline{y} de \underline{Y} et soit \underline{x} l'image de \underline{y} dans \underline{X} . Si \underline{y} est lisse, H est du type décrit en 2.3.1 et \underline{x} est lisse. Si \underline{y} est un point double, H est du type décrit dans 2.3.2 et \underline{x} est un point double, ou est lisse suivant que H respecte ou échange (cas d'une inversion) chacune des 2 branches en \underline{y} .
- iii) Quitte à faire une extension quadratique R' de R , et à partager en deux arêtes égales les arêtes du graphe de \underline{Y} qui correspondent aux points doubles où G opère avec inversion, on domine Y par un nouveau modèle semi-stable Y' , sur lequel G opère maintenant sans inversion.

2.3.4.

COROLLAIRE. – Gardons les hypothèses de 2.3.3, mais supposons de plus que G opère sur la fibre générique Y_K avec des groupes d'inertie d'ordre premier à p , la caractéristique résiduelle de k . Soit Σ_K le sous-schéma fermé réduit de X_K formé des points de X_K ramifiés dans Y_K et soit Σ son adhérence dans X . Alors : i) Σ est fini sur R et contenu dans l'ouvert de lissité de X . ii) Soit \underline{x} un point de $\Sigma \cap \underline{X}$. Alors le composant local de Σ passant par \underline{x} est de degré 1 ou 2. Il est de degré 2 si et seulement si G opère avec inversion au-dessus de \underline{x} , et K est alors de caractéristique $\neq 2$. En particulier les points de Σ_K sont modérément ramifiés sur K .

2.4. Composante origine

2.4.1. Considérons les données suivantes a), b), c), d) qui seront fréquemment utilisées dans la suite :

- a) R_o un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K_o de caractéristique 0, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On note e son indice de ramification (0.1).
- b) X_o une R_o -courbe propre et lisse, à fibres géométriques irréductibles de genre $g_X = g \geq 0$. On note X_{K_o} la fibre générique de X_o , \underline{X}_o la fibre spéciale.
- c) $a_i, i \in \mathbb{I}$, une famille finie de r points entiers de X_o sur R_o , à supports disjoints.
- d) G un groupe fini et $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ un revêtement fini, galoisien de groupe G . On suppose que Y_{K_o} est lisse sur K_o , géométriquement connexe de genre $g_Y \geq 2$ et que $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ est ramifié uniquement au-dessus des points génériques des points entiers $a_i, i \in \mathbb{I}$. On note m_i l'ordre de l'inertie au-dessus du point générique de a_i .

Nous dirons que $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ est un revêtement galoisien de groupe G , de signature $(m_i), i \in \mathbb{I}$.

2.4.2. D'après (2.2.2), il existe une extension finie minimale K de K_o , telle que si R désigne la clôture intégrale de R_o dans K , Y_{K_o} acquiert une réduction stable Y_{\min} sur R . De plus K est une extension galoisienne de groupe de Galois Γ , la monodromie finie. Vu la canonicité de Y_{\min} l'action K -linéaire de G sur Y_K s'étend en une action R -linéaire de G sur Y_{\min} . Notons X_{\min} le quotient de Y_{\min} par G . Alors X_{\min} est une R -courbe semi-stable (2.3.3), de fibre générique $X_K = X_{K_o} \times_{K_o} K$. Notons \underline{Y}_{\min} (resp. \underline{X}_{\min}) la fibre fermée de Y_{\min} (resp. X_{\min}).

Nous allons procéder à quelques modifications élémentaires sur X_{\min} et Y_{\min} .

Supposons d'abord $g_X \geq 1$. Alors X_{\min} qui est semi-stable domine le modèle semi-stable minimal $X_o \times_{R_o} R$. En particulier, \underline{X}_{\min} contient une composante irréductible qui est la transformée stricte de \underline{X}_o et que nous noterons encore \underline{X}_o . Les autres composantes de \underline{X}_{\min} sont des droites projectives et le graphe de \underline{X}_{\min} est un arbre.

Supposons maintenant $g_X = 0$. Alors \underline{X}_{\min} est un arbre de droites projectives. Plus précisément, c'est un sous-arbre métrique fini de l'arbre de $\text{PGL}_2(K)$. On rappelle que les sommets de cet arbre correspondent aux divers modèles de la droite projective sur R . La droite projective sur R égale à $X_o \times_{R_o} R$ ne figure pas nécessairement parmi les sommets de l'arbre de \underline{X}_{\min} . Par exemple, si Y_{\min} est lisse et si certains des m_i , $i \in \mathbb{I}$ sont multiples de p , X_{\min} est distinct de $X_o \times_{R_o} R$.

Quoiqu'il en soit, $X_o \times_{R_o} R$ correspond à un sommet o de l'arbre de $\text{PGL}_2(K)$ et on peut considérer le plus petit sous-arbre de l'arbre de $\text{PGL}_2(K)$ qui contient o et l'arbre de \underline{X}_{\min} . Ce nouvel arbre correspond à un nouveau modèle semi-stable X'_{\min} qui domine X_{\min} . Sa fibre spéciale \underline{X}'_{\min} contient par construction une composante irréductible associée au sommet o et que nous noterons simplement \underline{X}_o . La construction de X'_{\min} est canonique et se fait rationnellement sur R .

Considérons alors $Y_{\min} \times_{X_{\min}} X'_{\min}$. On voit facilement que quitte à remplacer R par sa clôture intégrale R' dans une extension finie K' (non canonique) de K et à normaliser $Y_{\min} \times_{X_{\min}} X'_{\min}$, on obtient une R' courbe semi-stable Y'_{\min} . Le groupe G opère sur Y'_{\min} avec pour quotient X'_{\min} .

2.4.3.

Remarque. – On peut donner une autre construction de Y'_{\min} sans restriction sur les gendres g_X et g_Y . On considère la normalisée Y_o de X_o dans Y_K . Il existe une extension finie K' de K_o , telle que si R' désigne la clôture intégrale de R_o dans K' , alors on peut trouver un éclatement Y' de $Y_o \times_{R_o} R'$ qui soit semi-stable, et on peut le choisir minimal. Lorsque $g_Y \geq 2$, on a alors $Y' = Y'_{\min}$.

2.4.4. Notons encore a_i , $i \in \mathbb{I}$, les points entiers de X'_{\min} qui étendent les points de $X'_{K'}$ ramifiés dans $Y'_{K'}$. Comme, par construction, X'_{\min} domine X_o . Il résulte de la condition c) de 2.4.1) que les a_i , $i \in \mathbb{I}$ sont disjoints.

Nous allons introduire des modifications minimales élémentaires de X'_{\min} et Y'_{\min} , qui sont des éclatements au voisinage des a_i , $i \in \mathbb{I}$, de façon à ce que, d'une part, les a_i se situent désormais dans le lieu lisse et que, d'autre part, G agisse sur les points doubles sans inversion.

α) *Réduction au cas où les a_i , $i \in \mathbb{I}$, sont situés dans le lieu lisse.* – Soit $i \in \mathbb{I}$, tel que a_i passe par un point double \underline{x} de \underline{X} . Soit \underline{y} un point double de Y'_{\min} au-dessus de \underline{x} et soit h l'ordre du sous-groupe d'inertie H dans G en \underline{y} . Procédant comme dans 2.1.2 par éclatement en \underline{x} de X'_{\min} , on obtient un nouveau modèle semi-stable X''_{\min} , dans lequel

on a partagé la couronne C de la singularité en \underline{x} , en deux sous-couronnes C_1 et C_2 de façon que dans le nouveau modèle X''_{\min} , a_i se situe maintenant dans le lieu lisse. Quitte à faire une extension finie de R' , on peut supposer que C_1 et C_2 ont une épaisseur multiple de h . Alors le partage de C en C_1 et C_2 provient, par passage au quotient par H , d'un partage analogue de la couronne de la singularité en \underline{y} . Il en résulte qu'il existe un modèle semi-stable Y''_{\min} , éclaté de Y'_{\min} , équivariant sous \bar{G} , qui, par passage au quotient par G , donne X''_{\min} .

β) *Elimination des inversions.* – Soit \underline{y} un point double de Y'_{\min} en lequel le groupe d'inertie dans G agit en permutant les deux branches. Alors, quitte à faire une extension de degré 2 de R' et à partager par éclatement la couronne de la singularité en \underline{y} en deux sous-couronnes d'épaisseur égale, on a vu dans 2.3.3 iii), que l'on pouvait éliminer l'inversion.

γ) Notons qu'en un point double \underline{y} de Y'_{\min} , on peut envisager soit une modification du type α , soit une modification du type β , mais pas les deux à la fois. Par ailleurs, les modifications considérées ne sont pas canoniques, mais le deviennent une fois choisie l'extension de R' qui permet de les effectuer. En particulier, deux telles modifications deviennent isomorphes sur une extension de R' convenable.

Résumons les constructions décrites ci-dessus dans la proposition suivante :

2.4.5.

PROPOSITION. – *Considérons les données a), b), c) d) de 2.4.1.*

Soit K l'extension finie galoisienne minimale de groupe Γ , telle que, si R désigne la clôture intégrale de R_o dans K , alors $Y_K = Y_{K_o} \times_{K_o} K$ acquière une réduction stable Y_{\min} sur R . Soit $X_{\min} = Y_{\min}/G$.

Alors il existe une extension finie K' de K , que l'on peut choisir galoisienne sur K_o de groupe de Galois Γ' , telle que si R' désigne la clôture intégrale de R dans K' , il existe un modèle propre et semi-stable modifié Y_{mod} de $Y_{K'} = Y_K \times_K K' = Y_{K_o} \times_{K_o} K$, minimal, ayant les propriétés suivantes :

- i) Y_{mod} domine $Y_{\min} \times_R R'$, est G équivariant et G opère sans inversion sur les points doubles de la fibre spéciale. On pose $X_{\text{mod}} = Y_{\text{mod}}/G$ qui est un modèle semi-stable dominant $X_{\min} \times_R R'$.
- ii) X_{mod} domine $X_o \times_{R_o} R'$ et en particulier la fibre spéciale de X_{mod} contient la fibre spéciale \underline{X}_o du modèle originel X_o .
- iii) Les points de X_K ramifiés dans Y_K se spécialisent en des points entiers a_i , $i \in \mathbb{I}$, de X_{mod} , qui sont disjoints et contenus dans le lieu lisse de X_{mod} .

Si de plus, on suppose que les ordres des groupes d'inertie du revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ sont premiers à p , on peut choisir R' de degré 2 sur R (galoisienne sur R_o si $p \neq 2$).

Seule la dernière assertion reste à établir. Partons du modèle stable Y_{\min} sur R et de son quotient $X_{\min} = Y_{\min}/G$. Procédons d'abord à l'élimination des inversions sur Y_{\min} . On obtient, après extension quadratique éventuelle R' de R , un modèle semi-stable Y'' , équivariant sous G , qui domine $Y_{\min} \times_R R'$, sur lequel G opère sans inversion (2.3.3 ii)). Soit $X'' = Y''/G$. Comme les groupes d'inertie du revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ sont supposés d'ordre premier à p . Il résulte de 2.3.4, que les points entiers de X'' : a_i , $i \in \mathbb{I}$, adhérence des points de $X_{K'}$ ramifiés dans $Y_{K'}$, sont contenus dans le lieu lisse de X'' et sont disjoints. Les conditions i) et iii) sont donc satisfaites. Il reste à voir que la composante origine \underline{X}_o figure automatiquement parmi les composantes de la fibre spéciale

\underline{X}'' de X'' . La question ne se pose que dans le cas où X_K est de genre 0. Comme les spécialisations des a_i , $i \in \mathbb{I}$, sont disjointes et que le cardinal de \mathbb{I} est au moins 3 (car Y_K est de genre au moins 2), il existe une composante irréductible de \underline{X}'' sur laquelle les a_i , $i \in \mathbb{I}$, se spécialisent en au moins 3 points distincts. Cette composante est automatiquement la composante origine \underline{X}_o . Enfin si $p \neq 2$, l'extension quadratique éventuelle R' de R , nécessaire pour éliminer les inversions est modérée et galoisienne sur R_o .

2.4.6. Dans la suite, nous choisissons une extension galoisienne R' de R_o de groupe de Galois Γ' , sur laquelle existe un modèle modifié Y_{mod} satisfaisant aux propriétés i), ii), iii) de 2.4.5, d'où un quotient $X_{\text{mod}} = Y_{\text{mod}}/G$. Pour alléger l'écriture, nous poserons simplement $Y = Y_{\text{mod}}$, $X = X_{\text{mod}}$. Les fibres spéciales correspondantes seront notées \underline{X} et \underline{Y} . La monodromie finie Γ , qui elle est canonique, est donc un quotient de Γ' . Le groupe Γ' opère semi-linéairement sur Y' de façon compatible avec son action sur R' et cette action commute à celle de G . En particulier Γ' opère k -linéairement sur \underline{Y} . Comme Γ opère fidèlement sur la fibre fermée de Y_{min} (2.2.2) et que Y domine Y_{min} , le noyau de $\Gamma' \rightarrow \text{Aut}_k(\underline{Y})$ est contenu dans $\text{Ker}\{\Gamma' \rightarrow \Gamma\}$.

2.4.7. On note A l'arbre métrique de \underline{X} (2.1.2) que l'on oriente en prenant la composante \underline{X}_o pour origine et en fléchissant les arêtes qui s'éloignent de l'origine. L'arbre orienté A possède un certain nombre de sommets terminaux, que nous appellerons simplement les bouts \mathbb{B} de l'arbre A , ou encore les bouts de \underline{X} . En particulier \underline{X}_o est un bout si et seulement si $\underline{X} = \underline{X}_o$.

À la courbe semi-stable Y correspond un graphe métrique B , qui est connexe car \underline{Y} est connexe (puisque Y_K est supposé géométriquement connexe). Le graphe B n'est pas en général un arbre.

2.4.8.

PROPOSITION. – Soit \underline{W} une composante irréductible de \underline{X} au-dessus de laquelle \underline{Y} est génériquement étale. Alors

a) \underline{W} est un bout $b \in \mathbb{B}$ de l'arbre A de \underline{X} .

Soit \underline{x}_b l'éventuel point de raccord de \underline{W} avec le reste de \underline{X} .

b) Si un point de ramification a_i , $i \in \mathbb{I}$ se spécialise en un point \underline{a}_i de \underline{W} , alors \underline{a}_i est distinct de \underline{x}_b et $Y \rightarrow X$ est modérément ramifié au-dessus du point entier a_i , en particulier $(m_i, p) = 1$. De plus, si $\underline{W} \neq \underline{X}_o$, il existe au plus un seul point de ramification a_i qui se spécialise dans \underline{W} .

La démonstration est donnée dans ([Ra 3] Lemme 6.3.8). Rappelons-la brièvement. Considérons l'ensemble F des sommets de l'arbre orienté A qui s'obtiennent en suivant un chemin qui s'éloigne de \underline{W} . Soit $X \rightarrow X^\wedge$ le morphisme qui contracte en des points les composantes de \underline{X} associées aux sommets de F ([B-L-R] 6.7 Cor. 3). Par construction \underline{W} est maintenant une composante terminale de l'arbre de X^\wedge . De même, contractons dans Y les composantes de \underline{Y} qui sont situées au-dessus des composantes contractées F de \underline{X} . On obtient Y^\wedge qui est fini sur X^\wedge . Par hypothèse $Y^\wedge \rightarrow X^\wedge$ est génériquement étale au-dessus de \underline{W} . Il résulte alors du théorème de pureté de Zariski et du lemme d'Abhyankar, ([Ra 3] 6.3.2) que $Y^\wedge \rightarrow X^\wedge$ est étale au-dessus de $\underline{W} - \{\underline{x}_b\}$, sauf au-dessus d'un éventuel \underline{a}_i , où il est modérément ramifié. En particulier Y^\wedge est lisse sur R au-dessus des points de $\underline{W} - \underline{x}_b$. Il résulte alors du caractère minimal du modèle Y que $Y = Y^\wedge$, donc \underline{W} est un bout de l'arbre A .

2.4.9.

COROLLAIRE. – Si $Y \rightarrow X$ est génériquement étale au-dessus de la composante origine \underline{X}_o , alors Y a bonne réduction sur R' . Plus précisément, $X = X_o \times_{R_o} R'$ et Y est lisse sur R' , modérément ramifié sur X au-dessus des a_i , $i \in \mathbb{I}$.

En effet, d'après 2.4.8, la composante origine \underline{X}_o est un bout de l'arbre A , donc \underline{X} se réduit à \underline{X}_o . Par ailleurs toujours d'après la démonstration de 2.4.8 Y est lisse sur R' et modérément ramifié sur X . En particulier les m_i sont premiers à p .

2.4.10.

COROLLAIRE. – Supposons que \underline{X} se réduise à la composante origine \underline{X}_o . Alors Y est lisse, modérément ramifié sur X au-dessus des a_i , $i \in \mathbb{I}$.

En effet, si $\underline{X} = \underline{X}_o$, alors \underline{X} est lisse. Comme $Y \rightarrow X$ est sans inversions (2.4.5), \underline{Y} est aussi lisse. Etant connexe, \underline{Y} est irréductible. Montrons que le groupe d'inertie I le long de \underline{Y} est trivial, de sorte que l'on pourra conclure par 2.4.9.

Notons que I est invariant dans G . Soit Y^\wedge le quotient de Y par I . Alors $\underline{Y} \rightarrow Y^\wedge$ est un morphisme radiciel entre k -courbes lisses. Ces deux courbes ont donc même genre. On en déduit que les fibres génériques Y_K et Y_K^\wedge ont aussi même genre, à savoir g_Y . Comme $g_Y \geq 2$ d'après la condition d), la formule d'Hurwitz appliquée au revêtement génériquement étale $Y_K \rightarrow Y_K^\wedge$, galoisien de groupe I , entraîne que $I = \{1\}$.

Terminons ce numéro en rappelant la structure des sous-groupes d'inertie aux points de \underline{Y} , d'après ([Ra 3] Lemme 6.3.3 et 6.3.6).

2.4.11.

PROPOSITION. – Avec les hypothèses et notations précédentes, supposons que G opère sans inversion et soit \underline{V} une composante irréductible de \underline{Y} . Alors :

a) L'inertie au point générique de \underline{V} est un p -groupe P . L'inertie reste constante et égale à P en tous les points de \underline{V} autres que les points doubles de \underline{Y} et les points de \underline{V} , au-dessus du point fermé \bar{a}_i d'un point de ramification a_i , $i \in \mathbb{I}$.

b) Soit \underline{y} un point de \underline{V} au-dessus de \underline{a}_i . Alors \underline{y} est un point lisse de \underline{V} et l'inertie en \underline{y} est extension d'un groupe cyclique d'ordre m'_i premier à p , par le p -groupe d'inertie générique de \underline{V} . Donc m'_i est le plus grand facteur premier à p qui divise m_i ; (en particulier si m_i est une puissance de p , la ramification horizontale au-dessus de a_i ne se détecte pas sur le morphisme $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$).

c) Si \underline{y} est un point double de Y , l'inertie en \underline{y} est extension d'un groupe cyclique d'ordre $m_{\underline{y}}$ premier à p , par un p -groupe $P_{\underline{y}}$ engendré par les groupes d'inertie $P_{j,\underline{y}}$, $j = 1, 2$, le long des deux branches passant par \underline{y} .

3. Cas d'un p -sous-groupe de Sylow d'ordre p

3.1. Dans ce paragraphe, on reprend les hypothèses a), b), c), d) de 2.4.1 et les modèles minimaux modifiés Y et X de 2.4.6 et on fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

- e) L'ordre de G est de la forme pa avec $(a, p) = 1$.
- f) \underline{X} ne se réduit pas à la composante origine \underline{X}_o (ce qui équivaut d'après 2.4.9 et 2.4.10 à $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ n'est pas génériquement étale au-dessus de \underline{X}_o , ou encore à Y n'est pas lisse, modérément ramifié sur X).

3.1.1. Soit Q un p -sous-groupe de Sylow de G , qui est donc d'ordre p . Considérons $N = \text{Norm}_G(Q)$ et $C = \text{Cent}_G(Q)$. Alors N/C opère fidèlement sur Q et par suite est cyclique d'ordre $n = n(G)$ avec $n|(p-1)$.

Plus généralement, si N' est un sous-groupe de N contenant Q et si $C' = \text{Cent}_{N'}(Q) = C \cap N'$, on a une application injective $N'/C' \rightarrow N/C$ et, en particulier, N'/C' est cyclique, d'ordre n' divisant n .

Comme C'/Q est d'ordre premier à p , l'extension C' de C'/Q par Q est scindée et C' est produit direct de Q et d'un p' -complément $C'^{(p')}$, d'ordre premier à p . Le sous-groupe $C'^{(p')}$ est caractéristique dans C' et donc invariant dans N' . Le quotient $N'/C'^{(p')} = \bar{N}'$ est isomorphe au produit semi-direct $Q \cdot \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$ (0.2).

3.1.2.

LEMME. – Soit \underline{W} une composante irréductible de \underline{X} . Alors $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ est étale au-dessus du point générique de \underline{W} si et seulement si \underline{W} est un bout de \underline{X} .

On sait déjà par 2.4.8 que la condition est suffisante; montrons qu'elle est nécessaire.

Soit donc \underline{W} un bout de \underline{X} et soit \underline{V} une composante irréductible de \underline{Y} au-dessus de \underline{W} . Notons H son groupe de décomposition et supposons que le groupe d'inertie I soit non trivial. Comme I est un p -groupe d'après 2.4.11 a), il résulte de e) que I est d'ordre p . Vu la condition f), \underline{X}_o n'est pas un bout de \underline{X} , donc \underline{W} est distinct de \underline{X}_o et donc est une droite projective. Soit \underline{x} le point de liaison de \underline{W} avec le reste de \underline{X} . Passons au quotient par I dans Y , on obtient Y^\wedge . Soit \underline{V}^\wedge l'image de \underline{V} dans Y^\wedge . Alors $H/I = H^\wedge$ est d'ordre premier à p et opère sur \underline{V}^\wedge avec pour quotient \underline{W} . De plus $\underline{V}^\wedge \rightarrow \underline{W}$ est génériquement étale. Il résulte de 2.4.11, qu'il y a au plus deux points de \underline{W} qui sont ramifiés dans \underline{V}^\wedge , à savoir \underline{x} et \underline{a}_i , pour un certain i dans $\mathbb{1}$, si a_i se spécialise dans \underline{W} . Comme H^\wedge est d'ordre premier à p , la ramification au-dessus de \underline{x} et de \underline{a}_i est modérée. Par suite \underline{V}^\wedge est une droite projective et il existe un seul point de \underline{V}^\wedge au-dessus de \underline{x} . Comme $\underline{V} \rightarrow \underline{V}^\wedge$ est radiciel, \underline{V} est aussi une droite projective et elle se raccorde au reste de \underline{Y} par un seul point. Mais ceci contredit le caractère minimal du modèle Y .

Le lemme suivant est le point essentiel où l'on utilise l'hypothèse que les p -sous-groupes de Sylow de G sont d'ordre p .

3.1.3.

LEMME. – Soit \underline{y} un point double de \underline{Y} . Notons \underline{V}_j , $j = 1, 2$ les composantes irréductibles de \underline{Y} passant par \underline{y} , et soit I_j le groupe d'inertie de \underline{V}_j . Alors, si aucun des \underline{V}_j n'est situé au-dessus d'un bout de \underline{X} , on a $I_1 = I_2$ et c'est un groupe d'ordre p .

En effet comme \underline{V}_j n'est pas au-dessus d'un bout de \underline{X} , l'inertie I_j est non triviale d'après 3.1.2; d'autre part c'est un p -groupe (2.4.11). Il résulte de e) que $I_j = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Par ailleurs, soit I le groupe d'inertie en \underline{y} . D'après 2.4.11 c), I est extension d'un groupe cyclique d'ordre premier à p par un p -groupe engendré par I_1 et I_2 . Comme les p -Sylow de G sont d'ordre p , on a nécessairement $I_1 = I_2$.

3.1.4. Notons \underline{U} le fermé de \underline{X} réunion des composantes irréductibles de \underline{X} autres que les bouts. Alors \underline{U} est non vide puisque d'après f), il contient la composante origine \underline{X}_o , est connexe et son graphe et le sous-arbre de A obtenu en retirant les bouts de A et les arêtes adjacentes à ces bouts.

Considérons le morphisme $f : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ et soit \underline{V} une composante connexe de $f^{-1}(\underline{U})$. Il est clair que \underline{V} s'envoie surjectivement sur \underline{U} : si \underline{Y}_o est une composante irréductible de \underline{Y} au-dessus de \underline{X}_o , la composante connexe \underline{V} qui contient \underline{Y}_o est la réunion des

composantes irréductibles de \underline{Y} que l'on peut joindre à \underline{Y}_o par un chemin continu dans \underline{Y} , qui est situé au-dessus de \underline{U} . En particulier G opère transitivement sur les composantes de $f^{-1}(\underline{U})$. Il résulte de 3.1.3 que l'inertie le long de toute composante irréductible de \underline{V} est un groupe d'ordre p , indépendant de la composante irréductible et par suite est le groupe d'inertie de \underline{V} (2.4.11 a). Quitte à changer la composante \underline{V} , on peut supposer que cette inertie est égale au sous-groupe de Sylow Q .

Soit N' le groupe de décomposition de \underline{V} , c'est-à-dire le stabilisateur de \underline{V}' dans G . Alors Q est invariant dans N' , et donc N' est contenu dans $N = \text{Norm}_G(Q)$. Soit $C' = \text{Cent}_{N'}(Q) = C \cap N'$, de sorte que N'/C' est un sous-groupe N/C cyclique, d'ordre n' divisant $n = n(G)$ (3.1.1) et bien sûr, divisant $p - 1$. Alors C' est produit direct de Q par un p' -complément $C'^{(p')}$ qui est invariant dans N' et $N'/C'^{(p')} = \tilde{N}'$ est le produit semi-direct $Q \cdot \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$.

3.1.5.

Remarque. – Dans la suite le groupe $C'^{(p')}$ jouera un rôle négligeable, le rôle essentiel étant tenu par \tilde{N}' .

3.1.6. Pour tout bout $b \in \mathbb{B}$, notons \underline{P}_b la composante terminale associée de l'arbre de \underline{X} . C'est une droite projective, distincte de \underline{X}_o d'après f). Soit \underline{x}_b le point de liaison de \underline{P}_b avec le reste de \underline{X} . Choisissons une composante irréductible \underline{V}_b de \underline{Y} au-dessus de \underline{P}_b , qui rencontre \underline{V} (3.1.4). Soit \underline{y}_b un point de l'ensemble fini $\underline{V} \cap \underline{V}_b$; il est au-dessus de \underline{x}_b et le groupe d'inertie en \underline{y}_b contient Q . Désignons par H_b le groupe de décomposition de \underline{V}_b .

3.1.7.

PROPOSITION. – *Le groupe G est engendré par N' et les H_b , $b \in \mathbb{B}$.*

La démonstration est classique. Notons G' le sous-groupe de G engendré par N' et les H_b , $b \in \mathbb{B}$ et soit \underline{Y}' la réunion des transformés de \underline{V} et des \underline{V}_b , $b \in \mathbb{B}$ par les éléments de G' . Alors \underline{Y}' est une partie non vide, à la fois ouverte et fermée, de \underline{Y} , donc $\underline{Y}' = \underline{Y}$, puisque \underline{Y} est connexe. Comme G' contient les fixateurs des points de \underline{Y}' , on a bien $G = G'$.

3.1.8.

Remarque. – Signalons sans démonstration (ce ne sera pas utilisé dans la suite) comment adapter les résultats de 3.1 au cas où l'on remplace la condition (e) ci-dessus par la condition (e_r) : G possède un p -groupe de Sylow Q , cyclique d'ordre p^r avec $r \geq 1$. Notons Q_i le sous-groupe de Q d'ordre p^i , pour $i = 0, \dots, r$.

- 3.1.2 devient : le groupe d'inertie d'une composante de \underline{Y} située au-dessus d'un bout b de \underline{X} est un p -groupe d'ordre p^i avec $i < r$.
- 3.1.3 s'énonce : $I_1 \cap I_2$ est un p -groupe non trivial.
- 3.1.4 : le groupe d'inertie I de \underline{V} est d'ordre au moins p . Quitte à bien choisir la composante \underline{V} on peut donc supposer que I contient Q_1 . Soit N' le stabilisateur de \underline{V} . Alors Q_1 est invariant dans N' . Soient $C' = \text{Cent}_{N'}(Q_1)$ et Q' un p -Sylow de C' . Il résulte d'un théorème de Burnside ([Za] Th. 4 p. 169) que C' est produit de Q' et d'un p' -complément $C'^{(p')}$. En particulier $N'/C'^{(p')}$ est un groupe \tilde{N}' de la forme $Q' \cdot \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$ où n' divise l'ordre $n = n(G)$ de $\text{Norm}_G(Q)/\text{Cent}_G(Q)$, qui lui même divise $p - 1$.

3.2. L'étape suivante, qui nous conduira à la formule clé (5) de 3.4.2, consiste à introduire un revêtement auxiliaire $\tilde{Z} \rightarrow X$, galoisien de groupe \tilde{N}' , qui contient déjà toutes les informations sur la ramification qui nous seront utiles. Cette construction peut-être vue comme une sorte de réduction du groupe de G à \tilde{N}' ; elle explique que la complexité

du groupe fini G n'intervient pas vraiment dans la démonstration du théorème 0. Nous allons d'abord construire la fibre spéciale \underline{Z} de Z grâce au résultat de Katz-Gabber rappelé ci-dessous. Ensuite nous relèverons \underline{Z} en Z sur R' par une technique de "patching, à la Harbater".

3.2.1.

THÉORÈME [Ka]. – Soit P la droite projective sur un corps k -algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, munie de 2 points distincts 0 et ∞ .

Notons K^\sim (resp. K^\wedge le corps des fractions de l'hensélisé (resp. du complété) de l'anneau local de P au point ∞ . Soit L^\sim (resp. L^\wedge) une K^\sim (resp. K^\wedge)-algèbre étale galoisienne de groupe de Galois H et soit m l'ordre de l'inertie modérée au-dessus du point ∞ . Alors il existe à isomorphisme près, un unique revêtement galoisien de groupe $H : W \rightarrow P$ ayant les propriétés suivantes :

- Si l'on fait le changement de base $\text{Spec}(K^\sim) \rightarrow P$ (resp. $\text{Spec}(K^\wedge) \rightarrow P$), $W \rightarrow P$ donne un revêtement de groupe H , isomorphe à $\text{Spec}(L^\sim) \rightarrow \text{Spec}(K^\sim)$ (resp. $\text{Spec}(L^\wedge) \rightarrow \text{Spec}(K^\wedge)$)
- $W \rightarrow P$ est étale en dehors de 0 et ∞ .
- $W \rightarrow P$ est modérément ramifié en 0 (et en fait l'ordre de l'inertie en 0 est m).

Nous n'avons rappelé qu'une version faible de l'énoncé de Katz-Gabber, la variante hensélienne avec K^\sim se déduit de celle avec K^\wedge , car la catégorie des K^\sim -algèbres étales est équivalente à celle des K^\wedge -algèbres étales. En fait nous n'aurons besoin de cet énoncé que dans le cas où l'inertie sauvage au point ∞ est cyclique d'ordre p , cas qui est tout à fait explicite. En effet, prenons pour s une coordonnée sur P inversible en dehors de 0 et ∞ et ayant un zéro simple en 0 . Alors les équations $s^m = s$, $x^p - x = s^h$ considérées dans 1.1 pour décrire la ramification à l'infini, fournissent également des équations pour le revêtement global W .

3.2.2. Revenons à notre courbe semi-stable Y sur R' et à son quotient $X = Y/G$. Pour tout bout $b \in \mathbb{B}$ de \underline{X} , reprenons les notations de 3.1.6, et choisissons un point $\underline{\alpha}_b$ de $\underline{P}_b - \{\underline{x}_b\}$, que l'on relève en un point α_b de X à valeurs dans R' .

Au-dessus du fermé \underline{U} de \underline{X} (3.1.4), \underline{Y} s'obtient à partir de \underline{V} par induction de N' à $G : \underline{Y}|\underline{U} = \text{Ind}_{N'}^G(\underline{V})$. Cette propriété s'étend à un voisinage étale de \underline{U} dans X :

3.2.3.

LEMME. – Il existe un morphisme étale $\phi : X_1 \rightarrow X$, couvrant \underline{U} , tel que si Y_1 est le G -revêtement $Y \times_X X_1$, les conditions suivantes sont réalisées :

- a) – Il existe un sous-schéma Z_1 de Y_1 , à la fois ouvert et fermé, stable par N' , tel que $(Y_1 \rightarrow X_1) = \text{Ind}_{N'}^G(Z_1 \rightarrow X_1)$.
- b) – La restriction de Z_1 au-dessus de \underline{U} , coïncide avec $\phi^{-1}(\underline{V})$.

En effet soit \underline{v} un point de \underline{V} au-dessus d'un point \underline{u} de \underline{U} (qui peut être un point de liaison \underline{x}_b). Alors le groupe d'inertie I en \underline{v} de G est contenu dans N' . Par suite, on peut trouver un voisinage étale $X_{\underline{u}}$ de \underline{u} dans X , telle qu'après le changement de base $X_{\underline{u}} \rightarrow X$, le revêtement $Y \rightarrow X$ soit induit à partir d'un sous revêtement $Z_{\underline{u}}$ de groupe N' . Au-dessus de \underline{U} , on peut choisir $\underline{Z}_{\underline{u}}$ égal à l'image réciproque de \underline{V} . Il suffit alors de prendre pour X_1 la somme disjointe d'un nombre fini de $X_{\underline{u}}$ qui couvrent \underline{U} .

3.2.4. Plaçons-nous maintenant en un bout $b \in \mathbb{B}$. Le revêtement $\underline{V}_b \rightarrow \underline{P}_b$ est génériquement étale (3.1.2). Soit I_b , l'inertie de ce revêtement en un point \underline{y}_b de $\underline{V}_b \cap \underline{V}$. Donc I_b est contenu dans N' . D'après 3.2.1, il existe un unique revêtement $\underline{Z}'_b \rightarrow \underline{P}_b$,

galoisien de groupe I_b étale au-dessus de $\underline{P}_b - \{\underline{x}_b, \underline{\alpha}_b\}$, modéré au-dessus de $\underline{\alpha}_b$ et qui, au-dessus de l'hensélisé de \underline{x}_b , a même ramification que $\underline{V}_b \rightarrow \underline{P}_b$ en \underline{y}_b . Soit $\underline{Z}_b = \text{Ind}_{I_b}^{N'}(\underline{Z}'_b)$. Alors \underline{Z}_b et \underline{V} sont deux revêtements de groupe N' qui se recollent naturellement au-dessus du point \underline{x}_b , car ils se recollent après hensélisation de \underline{X} en \underline{x}_b . On note $\underline{Z} \rightarrow \underline{X}$ le revêtement de groupe N' ainsi obtenu. Quitte à raffiner la flèche étale ϕ considérée dans 3.2.3, on peut supposer que $\phi^{-1}(\underline{Z} \rightarrow \underline{X})$ est isomorphe au N' -revêtement $\underline{Z}_1 \rightarrow \underline{X}_1$, fibre spéciale de $Z_1 \rightarrow X_1$.

3.2.5. Nous allons maintenant relever naturellement $\underline{Z} \rightarrow \underline{X} \bmod \cdot \pi^m$ pour tout m (où π est une uniformisante de R') et obtenir $Z \rightarrow X$ par passage à la limite.

Si S est un R' -schéma et m un entier ≥ 1 , on note S_m la réduction de S modulo π^m . Soit W le sous-schéma ouvert de X , complémentaire de \underline{U} .

Par construction $\underline{Z} \rightarrow \underline{X}$ est modérément ramifié au-dessus de \underline{W} , ramifié au plus au-dessus des points $\underline{\alpha}_b$. Par suite, il se relève uniquement au-dessus de W_m en un revêtement modéré, ramifié au-dessus des sections $\alpha_b \bmod \cdot \pi^m$.

Par ailleurs, soit $\phi : X_1 \rightarrow X$, un morphisme étale comme dans 3.2.3. Quitte à raffiner ϕ , on peut supposer que l'image de ϕ ne contient pas les $\underline{\alpha}_b$ et que $\phi^{-1}(\underline{Z} \rightarrow \underline{X})$ coïncide avec la fibre spéciale $(\underline{Z}_1 \rightarrow \underline{X}_1)$ de $(Z_1 \rightarrow X_1)$, sorte que $\phi^{-1}(\underline{Z} \rightarrow \underline{X})$ est relevé sur $(X_1)_m$ en $(Z_1)_m \rightarrow (X_1)_m$. Par unicité des revêtements infinitésimaux étales, ces deux relèvements sur W_m et $(X_1)_m$ se recollent automatiquement, pour donner un relèvement $Z_m \rightarrow X_m$ de $\underline{Z} \rightarrow \underline{X}$.

Pour m variable, le système des revêtements $Z_m \rightarrow X_m$ est évidemment cohérent. Par GAGA formel ([Gr 2] Th. 5.1.4), il conduit par passage à la limite et algébrisation, à un revêtement $Z \rightarrow X$, galoisien de groupe N' .

Rappelons (3.1.4) que N' contient un plus grand sous-groupe invariant $C'^{(p')}$ d'ordre premier à p et que le quotient $N'/C'^{(p')} = \tilde{N}'$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$. Passant au quotient dans Z par $C'^{(p')}$, on obtient le revêtement $\tilde{Z} \rightarrow X$, de groupe \tilde{N}' . Par construction Z et \tilde{Z} sont des courbes semi-stables sur R' . Résumons les constructions que l'on vient de faire.

3.2.6.

PROPOSITION. – *Il existe un revêtement $Z \rightarrow X$ galoisien de groupe N' (resp. $\tilde{Z} \rightarrow X$, galoisien de groupe \tilde{N}') caractérisé, à isomorphisme unique près, par les propriétés suivantes :*

- a) *Au-dessus d'un ouvert convenable Ω de X , contenant les $\underline{P}_b - \{\underline{x}_b\}$, $b \in \mathbb{B}$, le revêtement $Z \rightarrow X$ (resp. $\tilde{Z} \rightarrow X$) est un revêtement modéré, ramifié au-dessus des sections α_b .*
- b) *Il existe un morphisme étale $X_1 \rightarrow X$, d'image contenant \underline{U} , tel que si $Z_1 = Z \times_X X_1$, $Y_1 = Y \times_X X_1$, alors $(Y_1 \rightarrow X_1) \approx \text{Ind}_{N'}^G(Z_1 \rightarrow X_1)$.*
- c) *$\tilde{Z} = Z/C'^{(p')}$.*

3.3. Nous allons préciser les divers types de ramification rencontrés jusqu'à présent et les traduire au niveau des revêtements $Z \rightarrow X$ et $\tilde{Z} \rightarrow X$ que l'on vient de construire.

Reprenant les notations de 2.4.1, pour tout i dans \mathbb{l} , on note τ_i un générateur de l'un des groupes d'inertie du G -revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$, au-dessus du point a_i . Donc τ_i est d'ordre m_i .

Dans le modèle semi-stable X sur R' , les points entiers a_i , $i \in \mathbb{l}$, sont disjoints, situés dans le lieu lisse (2.4.5). Le points a_i se spécialise en un point \underline{a}_i de \underline{X} qui, soit appartient

à un bout \underline{P}_b de \underline{X} , soit se situe sur \underline{U} (3.1.4). De plus, étant donné un bout $b \in \mathbb{B}$, il existe au plus un a_i qui se spécialise dans la composante \underline{P}_b associée à b et \underline{a}_i est alors distinct de \underline{x}_b (2.4.8).

3.3.1.

DÉFINITION. – Un bout b de \underline{X} est dit primitif s'il existe un $i \in I$ (unique d'après 2.4.8) tel que a_i se spécialise dans \underline{P}_b . Sinon le bout b est dit neuf.

On note \mathbb{B}_{prim} (resp. \mathbb{B}_{neuf}) l'ensemble des bouts primitifs (resp. neufs). On identifie \mathbb{B}_{prim} à une partie de \mathbb{I} .

3.3.2. Pour i dans \mathbb{B}_{prim} , m_i est premier à p et $Y \rightarrow X$ est modérément ramifié au-dessus de a_i (2.4.8).

Examinons maintenant les $i \in I' = I - \mathbb{B}_{\text{prim}}$. Ce sont donc les i dans \mathbb{I} tels que a_i se spécialise en un point lisse de \underline{X} , situé dans \underline{U} (3.1.4). Quitte à conjuguer τ_i dans G , on peut alors choisir τ_i dans N' . Notons \mathbb{J} la partie de I' formé des i pour lesquels $(m_i, p) = 1$, et \mathbb{P} les i dans I' tels que $p|m_i$.

Soit $\tilde{\tau}_i$ l'image de τ_i dans $\tilde{N} = Q \cdot \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$. Comme $(n', p) = 1$, on voit que :

- si $i \in \mathbb{J}$, $\tilde{\tau}_i$ est d'ordre \tilde{m}_i divisant n' . On a $\tilde{m}_i = 1$ si et seulement si τ_i peut être choisi dans $C'^{(p')}$
- si $i \in \mathbb{P}$, $\tilde{\tau}_i$ est d'ordre p dans le produit semi-direct $\tilde{N}' = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$.

3.3.3. Nous allons maintenant étudier la ramification de $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ près des bouts.

Soit $b \in \mathbb{B}$ un bout de \underline{X} et reprenons les notations de 3.1.6. D'après 3.1.2, $\underline{V}_b \rightarrow \underline{P}_b$ est génériquement étale. Soit I_b le groupe d'inertie de ce revêtement en \underline{y}_b . Comme G vérifie e), la ramification en \underline{y}_b est d'un certain type (n_b, h_b) au sens de 1.1.1 et introduit un invariant $\sigma_b = h_b/n_b$.

Soit \underline{Z}_b (resp. $\tilde{\underline{Z}}_b$) la restriction de Z (resp. \tilde{Z}) au-dessus de \underline{P}_b . Comme on passe de la ramification de $Y \rightarrow X$ en \underline{y}_b à celle de $Z \rightarrow X$ par simple localisation étale (3.2.6 b), la ramification de $\underline{Z}_b \rightarrow \underline{P}_b$ est aussi de type (n_b, h_b) .

3.3.4. On accède de Z à \tilde{Z} en passant au quotient par le groupe $C'^{(p')}$. Ceci a pour effet de remplacer le groupe d'inertie I_b par son quotient par le plus grand sous-groupe central d'ordre premier à p . Si alors l'inertie de $\tilde{\underline{Z}}_b \rightarrow \underline{P}_b$ au-dessus de \underline{x}_b est de type $(\tilde{n}_b, \tilde{h}_b)$, il résulte de 1.1.2 que l'invariant $\tilde{\sigma}_b = \tilde{h}_b/\tilde{n}_b$ est égal à σ_b . Bien sûr, \tilde{n}_b est un diviseur de n' et donc de $n = n(G)$.

3.3.5.

PROPOSITION. – Si b est un bout neuf, on a $\tilde{\sigma}_b \geq 1 + 1/\tilde{n}_b \geq 1 + 1/n'$.

En effet, lorsque \underline{V}_b est de genre > 0 , la propriété résulte de 1.1.6 i) et du fait que b est un bout neuf. Or \underline{V}_b est nécessairement de genre > 0 , sinon \underline{V}_b serait un revêtement d'Artin-Schreier de \underline{P}_b , totalement ramifié au-dessus de \underline{x}_b (1.1.6 ii), donc liée au reste du graphe de \underline{Y} par un seul point, en contradiction avec le caractère minimal du modèle Y .

3.3.6. Venons-en à la description de la ramification de $\tilde{Z} \rightarrow X$.

Par construction (3.2.4), on a $\underline{Z}_b = \text{Ind}_{I_b}^{N'} \underline{Z}'_b$, où \underline{Z}'_b est un revêtement irréductible de \underline{P}_b , galoisien de groupe I_b . Ce revêtement est totalement ramifié au-dessus de \underline{x}_b avec une ramification de type (n_b, h_b) et modérément ramifié au-dessus de $\underline{\alpha}_b$, avec une inertie d'ordre n_b et il est étale au-dessus des autres points de \underline{P}_b .

Quand on passe au quotient par $C'^{(p')}$, on voit que chaque composante de $\tilde{\underline{Z}}_b$ est de degré $p\tilde{n}_b$, avec une ramification de type $(\tilde{n}_b, \tilde{h}_b)$ au-dessus de \underline{x}_b , et une ramification

modérée au-dessus de $\underline{\alpha}_b$, avec une inertie d'ordre \tilde{n}_b . En particulier $\tilde{\underline{Z}}_b$ est formé de n'/\tilde{n}_b composantes disjointes, chacune de genre $(\tilde{h}_b - 1)(p - 1)/2$ (confer [Ra 2] p. 191).

La proposition suivante résulte immédiatement des considérations précédentes et de 3.2.6.

3.3.7.

PROPOSITION. – *Les points de ramification du revêtement $\tilde{Z} \rightarrow X$, sur la fibre générique sont les suivants :*

- a_i pour tout $i \in \mathbb{J}$, avec un groupe d'inertie d'ordre \tilde{m}_i ,
- a_i pour tout $i \in \mathbb{P}$, avec un groupe d'inertie d'ordre p ,
- α_b pour tout $b \in \mathbb{B}$, avec un groupe d'inertie d'ordre \tilde{n}_b .

3.4. La formule des cycles évanescents

3.4.1. Nous allons écrire que la fibre générique et la fibre spéciale de \tilde{Z} ont même genre, pour obtenir une formule de cycles évanescents.

Notons $\tilde{\tilde{Z}}$ le quotient de \tilde{Z} par Q , de sorte que $\tilde{\tilde{Z}} \rightarrow X$ est un revêtement galoisien de groupe $\mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$, avec n' premier à p .

Notons que les courbes X , \tilde{Z} , $\tilde{\tilde{Z}}$ sont des courbes semi-stables sur R' , à fibres géométriques connexes. En effet, comme elles sont semi-stables il suffit de voir que les fibres spéciales sont connexes. Or \underline{Z} est connexe parce que \underline{V} est connexe (3.1.4), il en est donc de même des courbes quotient $\tilde{\underline{Z}}$ et $\tilde{\tilde{Z}}$. Soient $g = g_X$, \tilde{g} , $\tilde{\tilde{g}}$, les genres respectifs des fibres de X , \tilde{Z} , $\tilde{\tilde{Z}}$.

3.4.2. D'après 3.3.7, on connaît la ramification de $\tilde{Z} \rightarrow X$ et de $\tilde{\tilde{Z}} \rightarrow X$ sur la fibre générique. D'où par application de la formule d'Hurwitz :

$$(1) \quad 2\tilde{\tilde{g}} - 2 = n'(2g - 2) + \sum_{b \in \mathbb{B}} (1 - 1/\tilde{n}_b) + \sum_{i \in \mathbb{J}} (1 - 1/\tilde{m}_i)$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2\tilde{g} - 2 = p(2\tilde{\tilde{g}} - 2 + |\mathbb{P}|n'(1 - 1/p)) \\ = pn'[2g - 2 + \sum_{b \in \mathbb{B}} (1 - 1/\tilde{n}_b) + \sum_{i \in \mathbb{J}} (1 - 1/\tilde{m}_i) + |\mathbb{P}|(1 - 1/p)] \end{cases}$$

où $|\mathbb{A}|$ désigne le cardinal d'un ensemble fini \mathbb{A} .

Calculons maintenant les genres arithmétiques sur les fibres spéciales. Notons $\tilde{\underline{V}}$ (resp. $\tilde{\tilde{V}}$) l'image réciproque de \underline{U} dans \tilde{Z} (resp. $\tilde{\tilde{Z}}$). Alors le morphisme $\tilde{\underline{V}} \rightarrow \tilde{\tilde{V}}$ est un morphisme radiciel (3.1.2) entre courbes n'ayant pour singularités que des points doubles ordinaires, donc ces deux courbes ont même genre.

Soit $b \in \mathbb{B}$, un bout de \underline{X} . Notons $\tilde{\underline{Z}}_b$ (resp. $\tilde{\tilde{Z}}_b$) la restriction de \tilde{Z} (resp. $\tilde{\tilde{Z}}$) au-dessus de \underline{P}_b . Alors (3.3.7), $\tilde{\underline{Z}}_b$ est réunion disjointe de n'/\tilde{n}_b courbes lisses de genre $(\tilde{h}_b - 1)(p - 1)/2$ (resp. est la réunion disjointe de n'/\tilde{n}_b droites projectives) et chacune de ces courbes est liée au reste de $\tilde{\underline{Z}}$ (resp. $\tilde{\tilde{Z}}$) par un seul point. Il en résulte que $\tilde{\underline{Z}}$ et $\tilde{\tilde{V}}$ ont même genre, tandis que celui de $\tilde{\underline{Z}}$ est égal au genre de $\tilde{\underline{V}}$ augmenté de $\sum_{b \in \mathbb{B}} (n'/\tilde{n}_b)(\tilde{h}_b - 1)(p - 1)/2$.

Finalement on trouve :

$$\tilde{g} = \tilde{\tilde{g}} + \sum_{b \in \mathbb{B}} (\tilde{h}_b - 1)(p - 1)(n'/2\tilde{n}_b),$$

d'où

$$(3) \quad 2\tilde{g} - 2 = 2\tilde{g} - 2 + \sum_{b \in B} (\tilde{h}_b - 1)(p - 1)n'/\tilde{n}_b .$$

En utilisant (1) et (2), après division par n' , on obtient :

$$p[2g - 2 + \sum_{b \in B} (1 - 1/\tilde{n}_b) + \sum_{i \in J} (1 - 1/\tilde{m}_i) + |\mathbb{P}|(1 - 1/p)] = \\ 2g - 2 + \sum_{b \in B} (1 - 1/\tilde{n}_b) + \sum_{i \in J} (1 - 1/\tilde{m}_i) + \sum_{b \in B} (\tilde{h}_b - 1)(p - 1)/\tilde{n}_b .$$

Soit encore après regroupement et division par $p - 1$:

$$(4) \quad 2g - 2 + \sum_{i \in J} (1 - 1/\tilde{m}_i) + |\mathbb{P}| = \sum_{b \in B} (\tilde{h}_b/\tilde{n}_b - 1) .$$

Rappelons que dans 3.3.4 et 3.3.5 on a posé $\tilde{h}_b/\tilde{n}_b = \tilde{\sigma}_b$, $h_b/n_b = \sigma_b$ et que $\tilde{\sigma}_b = \sigma_b$. On peut réécrire (4) sous la forme :

$$(4') \quad 2g - 2 + \sum_{i \in J} (1 - 1/\tilde{m}_i) + |\mathbb{P}| = \sum_{b \in B} (\tilde{\sigma}_b - 1) = \sum_{b \in B} (\sigma_b - 1) .$$

Distinguons les bouts primitifs et les bouts neufs (3.3.1). On obtient :

$$(5) \quad \sum_{b \in B_{\text{neuf}}} (\sigma_b - 1) = 2g - 2 + \sum_{i \in J} (1 - 1/\tilde{m}_i) + |\mathbb{P}| + \sum_{b \in B_{\text{prim}}} (1 - \sigma_b) .$$

3.4.3.

Remarque. – La formule (5) est la formule clé qui résume la ramification de $Y \rightarrow X$. Elle peut s'obtenir directement, sans introduire les revêtements auxiliaires $Z \rightarrow X$ et $\tilde{Z} \rightarrow X$, en égalant les genres de $Y_{K'}$ et \underline{Y} et en constatant, avec ravissement, que la combinatoire du G -revêtement $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ n'intervient finalement qu'à travers celle du revêtement $\tilde{Z} \rightarrow \underline{X}$.

Notons qu'au second membre de (5) apparaît l'ensemble initial \mathbb{I} des points de ramification de X_{K_0} dans Y_{K_0} comme réunion disjointe de B_{prim} , \mathbb{J} et \mathbb{P} . Soit r son cardinal. Ainsi $2g - 2 + r$ mesure "l'hyperbolicité" de la courbe ouverte $X_{K_0} - \{\cup a_i, i \in I\}$.

3.4.4.

COROLLAIRE. – On a $2g - 2 + r \geq 0$. De plus :

- (i) $\sum_{b \in B_{\text{neuf}}} (\sigma_b - 1) \leq 2g - 2 + r$, avec égalité si et seulement si $\mathbb{I} = \mathbb{P}$.
- (ii) Le nombre de bouts neufs est majoré par $n'(2g - 2 + r)$ et, a fortiori, par $n(G)(2g - 2 + r)$.

En effet, chaque bout neuf contribue au premier membre de (5) pour une quantité positive $\geq 1/n'$ d'après 3.3.5. Le second membre de (5) est donc ≥ 0 , visiblement majoré par $2g - 2 + r$.

3.4.5.

COROLLAIRE. – Supposons que $2g - 2 + r = 1$ et qu'il existe un bout b_0 tel que σ_{b_0} soit entier. Alors :

- 1) b_o est l'unique bout de l'arbre A , autrement dit celui-ci se réduit à la chaîne joignant la composante origine au bout b_o .
- 2) Si $g = 0$, on a $n' = 1$ et $|\mathbb{P}| = 3$ ou 2 suivant que b_o est neuf ou primitif.

Si $g = 1$ on a :

- $|\mathbb{P}| = 1$ lorsque b_o est un bout neuf,
- $|\mathbb{P}| = 0$ et $n' = 1$ lorsque b_o est un bout primitif.

a) Supposons d'abord que b_o soit un bout neuf. Par hypothèse et 3.3.5 $\sigma_{b_o} - 1$ est donc entier ≥ 1 tandis que le second membre est au plus $2g - 2 + r = 1$, avec égalité si et seulement si $\mathbb{I} = \mathbb{P}$. On a donc $\mathbb{I} = \mathbb{P}$, $\sigma_{b_o} - 1 = 1$ et b_o est l'unique bout neuf, et donc l'unique bout, puisque $\mathbb{B}_{\text{prim}} =$. Si $g = 0$, $r = 3$, le revêtement $\tilde{Z} \rightarrow X$, de degré n' est ramifié en au plus un seul point α_{b_o} et par suite est trivial, donc $n' = 1$, puisque \tilde{Z} est connexe. Si maintenant $g = 1$, $\tilde{Z} \rightarrow X$ est étale puisqu'abélien, ramifié en au plus un point.

b) Supposons maintenant que b_o soit un bout primitif. Alors l'hypothèse entraîne que $1 - \sigma_{b_o}$ est ≤ 0 , donc le second membre de (5) est ≤ 0 . Par suite, le premier également et il n'y a donc pas de bouts neufs. Finalement, il résulte toujours de (5) que b_o est le seul bout primitif, $\mathbb{J} =$ et $\mathbb{P} = I - \{b_o\}$. Le revêtement $\tilde{Z} \rightarrow X$ est ramifié au plus au-dessus de α_{b_o} . Si $g = 0$, il est donc trivial et par suite $n' = 1$. Dans le cas $g = 1$, $\tilde{Z} \rightarrow X$ est alors étale sur la fibre générique, puisqu'abélien et ramifié en au plus un point. Par ailleurs comme \mathbb{P} est maintenant vide puisque $|\mathbb{I}| = 1$, $\tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z}$ est aussi étale sur la fibre générique. Finalement, $\tilde{Z} \rightarrow X$ est étale sur la fibre générique et par suite son groupe de Galois \tilde{N} est commutatif. Ceci entraîne $n' = 1$.

3.5. Pour la commodité du lecteur, nous allons indiquer les étapes du contrôle de la monodromie finie Γ qui conduisent au théorème 0, et qui font l'objet des 2 paragraphes suivants.

Partons d'un anneau de valuation discrète complet R_o , de corps des fractions K_o de caractéristique 0, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, d'indice de ramification e (0.1).

Soit G un groupe fini à centre trivial, ayant un p -Sylow Q d'ordre p , d'où l'entier $n = n(G) = |\text{Norm}_G(Q)/\text{Cent}_G(Q)|$.

Soit X_o la droite projective sur R_o , munie de ses trois sections $\{0, 1, \infty\}$ et soit $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ un revêtement galoisien de groupe G , géométriquement connexe, ramifié exactement en $0, 1, \infty$.

Après extension galoisienne finie $R_o \rightarrow R$, de groupe de Galois Γ , la monodromie finie, Y_{K_o} admet un modèle stable Y_{min} . Quitte à agrandir encore R en R' , on atteint le modèle semi-stable modifié Y (2.4.6) et son quotient $X = Y/G$.

On étudie d'abord au § 4, le p -Sylow Γ_w de Γ , qui correspond donc à la monodromie sauvage. Sans restriction sur e , on montre que si $\Gamma_w \neq \{1\}$, il existe un bout b de l'arbre de \underline{X} , où l'invariant σ_b est entier et Q est central dans le groupe de décomposition H_b (4.2.4). Il résulte alors de 3.4.5 que b est l'unique bout de \underline{X} et que $n' = 1$, c'est-à-dire que Q est central dans N' . Comme G est engendré par N' et H_b (3.1.7), Q est alors central dans G , contrairement à l'hypothèse, donc $\Gamma_w = \{1\}$.

On en vient ensuite au contrôle de la monodromie modérée (§5). Sachant que la monodromie sauvage est triviale, on établit que le modèle minimal modifié Y existe au-

dessus d'une extension R' de R que l'on peut choisir modérée sur R_o (5.1.2). Considérons la clôture intégrale Y_o de X_o dans Y_{K_o} . On montre alors que la multiplicité des composantes de la fibre spéciale \underline{Y}_o est première à p , puis, sous la condition supplémentaire $e < (p-1)/n$, on déduit de 1.2.2 que $Y_o \rightarrow X_o$ est modérément ramifié en les points génériques de \underline{Y}_o . Il résulte alors de 2.4.9 que Y est lisse, modérément ramifié sur $X_o \times_{R_o} R$. Comme G a un centre trivial, on conclut par descente que Y_o est lisse, modérément ramifié sur X_o (4.1.3).

4. Étude de la monodromie sauvage

4.1. Monodromie et torsion

4.1.1.

PROPOSITION. – Soit G un groupe fini de centre C . Soit K un corps de clôture algébrique \overline{K} et soit X un K -schéma de type fini, géométriquement intègre et géométriquement normal. Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement fini galoisien de groupe G , avec Y géométriquement intègre et géométriquement normal.

Alors tout autre K -revêtement $Z \rightarrow X$ galoisien de groupe G , qui devient G -isomorphe à $Y \times_K \overline{K} \rightarrow X \times_K \overline{K}$, par extension des scalaires de K à \overline{K} , se déduit de $Y \rightarrow X$ par torsion par un morphisme (continu) $\lambda : \text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow C$ (confer [Se2] chap. I § 5.3).

Quitte à restreindre X à un ouvert non vide, on peut supposer $Y \rightarrow X$ étale. Par descente radicielle des morphismes étales, on peut remplacer \overline{K} par une clôture séparable K_{sep} de K . Soit E le corps des fractions de X et F celui de Y . Le groupe de Galois de FK_{sep}/E est $H = G \times \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$. Le revêtement initial $Y \rightarrow X$ correspond au morphisme $H \rightarrow G$ qui est la projection sur le premier facteur. Les G revêtements cherchés correspondent aux morphismes continus de groupes $\phi : H \rightarrow G$ qui induisent l'identité sur le premier facteur. Ils sont de la forme $\phi(g, \gamma) = g\lambda(\gamma)$ où λ est un morphisme de groupes continu : $\text{Gal}(K_{\text{sep}}/K) \rightarrow C$.

4.1.2.

PROPOSITION. – Soit R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K . Soit X une R -courbe propre et lisse à fibres géométriques connexes. Soit $Y_K \rightarrow X_K$ un revêtement galoisien de groupe G , de centre C . On suppose que Y_K est géométriquement connexe. Soient K' une extension finie de K , R' la clôture intégrale de R dans K' . Posons $X' = X \times_R R'$, $Y'_{K'} = Y_K \times_K K'$. Supposons que la clôture intégrale Y' de X' dans $Y'_{K'}$ est lisse sur R' et modérément ramifiée sur X' .

Alors : (1) $Y' \rightarrow X'$ se descend canoniquement en $Y^1 \rightarrow X$, galoisien de groupe G , avec Y^1 lisse sur R et $Y^1 \rightarrow X$ modérément ramifié galoisien de groupe G . (2) Le revêtement $Y_K \rightarrow X_K$ est obtenu à partir de $Y^1_K \rightarrow X_K$ par torsion par un morphisme $\lambda : \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K) \rightarrow C$. (3) Il y a une meilleure monodromie finie γ qui conduit à la bonne réduction de Y_K . Le groupe γ est le quotient $\text{Im}(\lambda)$ de $\text{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$; c'est un sous-groupe de C .

Par descente galoisienne, on peut supposer R strictement hensélien. Soit k son corps résiduel, k' celui de R' .

Soit Σ_K le sous-schéma réduit de X_K qui est ramifié dans Y_K et notons Σ son adhérence dans X . Alors l'hypothèse entraîne que $\Sigma \times_R R'$ est étale sur R' . Par descente fidèlement plate, Σ est étale sur R .

Il résulte alors de la théorie du groupe fondamental modéré ([Gr 1] Exp. XIII), que le revêtement modéré $Y' \rightarrow X'$ se descend canoniquement en $Y^1 \rightarrow X$, où Y^1 est lisse sur R , modérément ramifié sur X , au-dessus de Σ , galoisien de groupe G . Le fait que Y_K et Y_K^1 diffèrent par une torsion λ , à valeurs dans C résulte alors de 4.1.1. La dernière assertion est évidente.

4.1.3.

COROLLAIRE. – *Sous les conditions de 4.1.2, si le centre C de G est trivial (resp. d'ordre premier à la caractéristique résiduelle de R), la courbe Y_K a bonne réduction Y sur R et Y est un revêtement modéré de X (resp. acquiert bonne réduction après extension modérée de R).*

4.2. La monodromie sauvage

4.2.1. Plaçons-nous sous les conditions a), b), c) et d) de 2.4.1. Après extension canonique galoisienne, de groupe de Galois γ , égal à la monodromie finie, apparaissent le modèle stable Y_{\min} et $X_{\min} = Y_{\min}/G$. Quitte à faire une nouvelle extension $R \rightarrow R'$, on dispose des modèles modifiés Y et $X = Y/G$ (2.4.6). Rappelons que R' n'est pas canonique, mais que l'on peut choisir R' galoisien sur R_o , de groupe de Galois γ' . Alors γ opère fidèlement sur la fibre fermée \underline{Y}_{\min} de Y_{\min} (2.2.2) (resp. γ' opère sur la fibre fermée \underline{Y} de Y) et le morphisme de domination $Y \rightarrow Y_{\min}$ induit un morphisme $\underline{Y} \rightarrow \underline{Y}_{\min}$ compatible avec les actions de γ' et γ et la surjection naturelle $\gamma' \rightarrow \gamma$. De plus ces actions commutent à celle de G . On note γ'_w (resp. γ_w) le p -sous-groupe de Sylow de γ' (resp. γ); il correspond à la monodromie sauvage.

Rappelons que \underline{X} contient la composante origine \underline{X}_o . Réglons tout de suite le cas trivial suivant :

4.2.2.

PROPOSITION. – *Si $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ est génériquement étale au-dessus de \underline{X}_o , Y_{K_o} a potentiellement bonne réduction Y sur R' , où Y est un revêtement modéré de $X_o \times_{R_o} R'$. La monodromie finie γ est un sous-groupe du centre C de G . En particulier la monodromie γ est triviale (resp. est modérée) si C est trivial (resp. est d'ordre premier à p).*

En effet, Y est alors lisse sur R' , modérément ramifié sur $X = X_o \times_{R_o} R'$ (2.4.9) et la proposition résulte de 4.1.2.

4.2.3. Nous supposons désormais que G possède un p -Sylow Q d'ordre p et nous écartons le cas de 4.2.2, c'est-à-dire que nous ajoutons les conditions e) et f) de 3.1.

Nous reprenons alors les constructions et notations du § 3. En particulier les notations relatives aux bouts b de \underline{X} (3.1.6 et 3.3.3...).

La proposition suivante est l'énoncé clé pour contrôler la monodromie sauvage.

4.2.4.

PROPOSITION. – *Gardons les hypothèses a), b), c), d), e), f) et notations de 3 et supposons $p > n'(2g - 2 + r)$ (ce qui sera en particulier le cas si $p > n(G)(2g - 2 + r)$). Alors :*

- (i) *La monodromie sauvage γ'_w agit trivialement sur \underline{X} et agit trivialement sur \underline{Y} au-dessus de \underline{U} (3.1.4).*
- (ii) *Si γ'_w n'agit pas trivialement sur \underline{Y} au-dessus du bout \underline{P}_b (3.1.6), alors Q est central dans H_b et l'invariant σ_b est entier. Le groupe H_b est contenu dans N' , égal à Q si b est un bout neuf et à $Q \times \mathbf{Z}/n_b\mathbf{Z}$ si b est un bout primitif.*

4.2.5.

COROLLAIRE. – *Sous les conditions de 4.2.4, si la monodromie sauvage γ_w n'est pas triviale, il existe un bout $b \in \mathbb{B}$, tel que σ_b soit entier et Q soit dans le centre du groupe de décomposition H_b .*

En effet comme γ_w agit fidèlement sur \underline{Y}_{\min} et est un quotient de γ'_w , il en résulte que γ'_w n'agit pas trivialement sur \underline{Y} et on applique 4.2.4 ii).

Démonstration de 4.2.4. Notons que γ' agit trivialement sur la composante origine \underline{X}_o puisque X_o est définie et lisse sur R_o . La démonstration va se faire en quatre étapes.

1. γ'_w agit trivialement sur l'arbre A de \underline{X} . Sinon γ'_w agirait non trivialement sur les bouts de \underline{X} . Il existerait donc une orbite 0 de bouts qui compterait au moins p -éléments. Elle est formée de bouts neufs, car γ' fixe les bouts primitifs, les points de ramification initiaux a_i étant rationnels sur R_o . Soit b un bout de l'orbite 0. Comme b est neuf, on a $\sigma_b - 1 \geq 1/n'$ (3.3.5). La contribution des bouts de l'orbite 0 au premier membre de (5) est donc $\geq p/n'$. Par hypothèse, on a $p/n' > 2g - 2 + r$. Le premier membre de (5) est donc $> 2g - 2 + r$, en contradiction avec 3.4.4.

2. γ'_w agit trivialement sur \underline{U} et sur \underline{P}_b , pour b un bout primitif.

On a déjà noté que γ'_w agit trivialement sur la composante origine \underline{X}_o . Les autres composantes de \underline{X} sont des droites projectives. D'après 1), elles sont stables sous γ'_w et les points doubles de \underline{X} sont fixes par γ'_w . De même les points de ramification a_i , $i \in I$, sont fixes par γ' . Or un p -groupe agissant non trivialement sur la droite projective a exactement un point fixe. L'assertion 2) en résulte immédiatement.

3. γ'_w agit trivialement sur la partie de \underline{Y} située au-dessus de \underline{U} (3.1.4).

En effet soit F une fibre de $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ au-dessus d'un point rationnel de \underline{U} . Alors G agit transitivement sur F et F est stable par γ'_w (d'après 2)). Comme les actions de G et γ'_w commutent, toutes les orbites de γ'_w dans F , ont le même nombre d'éléments, qui est une puissance de p , puisque γ'_w est un p -groupe. Par suite si γ'_w n'agit pas trivialement sur F , le cardinal de F est multiple de p . Or comme F est au-dessus de \underline{U} , le fixateur dans G de tout point de F contient un p -groupe d'ordre p . Comme p divise strictement l'ordre de G (d'après f)), le cardinal de F est premier à p , d'où 3).

4. Si b est un bout tel que γ'_w agisse non trivialement au-dessus de \underline{P}_b , alors Q est central dans H_b et σ_b est entier.

La démonstration de 4. est plus délicate et va nécessiter les lemmes 4.2.6, 4.2.7 et 4.2.8 ci-après.

Comme \underline{y}_b est au-dessus de \underline{U} , il est fixe par γ'_w (d'après 2)). Par suite γ'_w stabilise \underline{V}_b .

Notons γ^\wedge l'image de γ'_w dans le groupe des k -automorphismes de \underline{V}_b qui est un p -groupe non trivial par l'hypothèse de 4)). Soit H'_b le groupe des k -automorphismes de \underline{V}_b engendré par H_b et γ^\wedge . Donc γ^\wedge et H_b sont des sous-groupes de H'_b , invariants qui commutent. On a $\underline{P}_b = \underline{V}_b/H_b$; le groupe quotient H'_b/H_b agit fidèlement sur \underline{P}_b . Notons que H'_b/H_b est un quotient de γ^\wedge et, a fortiori, de γ'_w et l'action de H'_b/H_b sur \underline{P}_b coïncide avec l'action naturelle de γ'_w . Notons \underline{P}_b^\wedge le quotient de \underline{P}_b par H'_b/H_b .

4.2.6.

LEMME. – *On a $\gamma^\wedge \cap H_b = Q$; Q est central dans H_b et contenu dans N' ; σ_b est entier; $H_b = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n_b\mathbf{Z}$, où n_b est défini dans 3.3.3 et est égal à 1 si et seulement si b est neuf.*

Montrons que $\gamma^\wedge \cap H_b \neq \{1\}$. Comme c'est un p -groupe, il aura pour ordre p (d'après e)) et comme il contient Q , il sera égal à Q .

Raisonnons par l'absurde et supposons $\gamma^\wedge \cap H_b = \{1\}$. Il en résulte que H'_b est le groupe produit $\gamma^\wedge \times H_b$. Alors $\underline{P}_b = \underline{V}_b/H_b$, $\underline{P}_b/\gamma^\wedge = \underline{P}_b^\wedge$. Posons $\underline{V}_b^\wedge = \underline{V}_b/\gamma^\wedge$, de sorte que l'on a le diagramme commutatif de revêtements galoisiens :

$$\begin{array}{ccc} \underline{V}_b & \xrightarrow{\gamma^\wedge} & \underline{V}_b^\wedge \\ \nu \downarrow & & \downarrow H_b \\ \underline{V}_b & \xrightarrow{\gamma^\wedge} & \underline{P}_b^\wedge \end{array}$$

Pour alléger les notations nous allons terminer la démonstration du lemme en omettant le soulignement et l'indice b . Le diagramme ci-dessus devient :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma^\wedge} & V^\wedge \\ \nu \downarrow & & \downarrow H \\ P_b & \xrightarrow{\gamma^\wedge} & P^\wedge \end{array}$$

Comme $H' = \gamma^\wedge \times H$, le diagramme précédent identifie V au normalisé de $P \times_{P^\wedge} V^\wedge$. Nous allons montrer que nécessairement γ^\wedge est trivial, en contradiction avec l'hypothèse que γ^\wedge agit non trivialement sur V .

C'est clair si b est un bout primitif, car alors l'action de γ'_w sur \underline{P}_b est triviale (d'après 2)), donc l'action (fidèle) de γ^\wedge sur P^\wedge est triviale et par suite γ^\wedge est trivial.

Supposons maintenant que b est un bout neuf et que γ^\wedge n'est pas trivial. Nous allons obtenir une contradiction avec les hypothèses de 4.2.4. Quitte à restreindre γ^\wedge à un sous-groupe d'ordre p (ce qui revient à remplacer K_o par une extension finie), on peut supposer que γ^\wedge est d'ordre p .

Comme b est un bout neuf, $V \rightarrow P$ est ramifié uniquement au-dessus du point de liaison x avec le reste de \underline{X} . Soit x^\wedge l'image de x dans P^\wedge . Alors γ^\wedge laisse fixe x , et par suite, $P \rightarrow P^\wedge$ est un revêtement d'Artin-Schreier de la droite projective, de conducteur 1, ramifié exactement en x^\wedge . De même le revêtement $V^\wedge \rightarrow P^\wedge$ est ramifié uniquement au-dessus de x^\wedge .

4.2.7.

LEMME. — *La courbe V^\wedge n'est pas la droite projective.*

En effet, si V^\wedge était la droite projective, comme V^\wedge est ramifié sur P^\wedge uniquement au-dessus de x^\wedge , H serait un p -groupe. La condition e) entraîne que H serait d'ordre p et $V^\wedge \rightarrow P^\wedge$ serait un revêtement d'Artin-Schreier de conducteur 1. Il résulte alors de 1.1.4 ii), que $V \rightarrow P$ serait aussi un revêtement d'Artin-Schreier, de conducteur 1. Alors V serait une droite projective liée au reste de \underline{Y} par un seul point, en contradiction avec le caractère minimal de Y .

Soit alors y un point de V au-dessus de x et y^\wedge son image dans V^\wedge . La ramification de $V \rightarrow P$ en y (resp. de $V^\wedge \rightarrow P^\wedge$ en y^\wedge) et de type (n_b, h_b) , (resp. n^\wedge, h^\wedge) et conduit à des invariants $\sigma = \sigma_b = h_b/n_b$ (resp. $\sigma^\wedge = h^\wedge/n^\wedge$).

Comme V^\wedge n'est pas la droite projective, on a $\sigma^\wedge \geq 1 + 1/n'$ d'après 1.1.6. Il résulte alors de 1.1.5 que l'on a $\sigma - 1 = p(\sigma^\wedge - 1) \geq p/n'$.

Revenons à la notation non alléger : on a $\sigma = \sigma_b$ et $\sigma_b - 1 \geq p/n'$. Vu l'hypothèse faite dans 4.2.4, on a donc $\sigma_b - 1 \geq p/n' > 2g - 2 + r$, en contradiction encore une fois avec 3.4.4. Ceci achève la démonstration du fait que $\gamma^\wedge \cap H_b = Q$.

Il reste à établir les autres assertions de 4.2.6. Comme γ et H_b commutent, Q est central dans H_b . Comme H_b/Q est d'ordre premier à p , H_b est alors produit direct de Q et d'un

p' -complément C' . Par ailleurs H_b est le groupe de Galois du revêtement $\underline{V}_b \rightarrow \underline{P}_b$, ramifié en 1 ou 2 points suivant que b est un bout neuf ou primitif. Or un revêtement modéré de la droite projective ramifié en au plus 2 points est cyclique, totalement ramifié en ces deux points. Si b est un bout neuf, C' est donc trivial et si b est un bout primitif, C' est cyclique d'ordre n_b qui est l'ordre de l'inertie modérée au-dessus de \underline{x}_b et qui est aussi l'ordre de l'inertie modérée au-dessus du point a_i relatif au bout primitif b , donc $n_b = m_i$. Dans tous les cas, $\underline{V}_b \rightarrow \underline{P}_b$ est totalement ramifié au-dessus de \underline{x}_b et donc H_b est contenu dans N' . Le fait que σ_b soit entier résulte de 1.1.2. Ceci achève la démonstration de 4.2.6.

4.2.8.

LEMME. – Avec les notations de 4.2.6, on a $Q = \gamma^\wedge$, et γ opère trivialement sur \underline{P}_b .

Comme γ opère fidèlement sur \underline{P}_b à travers le quotient γ^\wedge/Q , la condition $Q = \gamma^\wedge$ équivaut au fait que γ opère trivialement sur \underline{P}_b et elle est réalisée si b est un bout primitif d'après 2).

Supposons que b est un bout neuf. De sorte que $H_b = Q$ d'après 4.2.6 et posons pour simplifier $h = h_b$. On a $h > 1$ puisque b est un bout neuf (3.3.5). Supposons $Q \neq \gamma^\wedge$ et examinons les groupes de ramification supérieurs de γ^\wedge . Comme γ^\wedge/Q opère sur la droite projective avec la ramification minimale, tandis que Q opère sur \underline{V}_b avec le conducteur h , Q est un sous-groupe de ramification supérieure et les groupes de ramification sont les suivants dans la notation de ([Se 1] chap. IV) : $\gamma_o^\wedge = \gamma_1^\wedge = \gamma^\wedge$, $\gamma_2^\wedge = \dots = \gamma_h^\wedge = Q$, $\gamma_{h+1}^\wedge = [0]$. Il résulte alors de loc. cit Prop. 11 p. 77, que $h - 1$ est un multiple de p , donc est de la forme sp avec $s \geq 1$ puisque $h > 1$. Comme $n_b = 1$, on a donc $\sigma_b = h_b$ et $\sigma_b - 1 = h - 1 = sp \geq p$. Or par hypothèse dans 4.2.4, on a supposé $p > n'(2g - 2 + r)$. On obtient donc $\sigma_b - 1 \geq p > n'(2g - 2 + r) \geq 2g - 2 + r$, en contradiction avec 3.4.4.

Ceci achève la démonstration de 4.2.8 et finalement de 4.2.4.

Le corollaire suivant ne sera pas utilisé dans la suite.

4.2.9.

COROLLAIRE. – Sous les conditions de 4.2.2, la monodromie sauvage γ_w est un p -groupe abélien annulé par p .

En effet γ_w opère fidèlement sur \underline{Y}_{\min} , et c'est un quotient de γ'_w . D'autre part il résulte de 4.2.2 et 4.2.8 que γ'_w agit sur \underline{Y} à travers un groupe abélien, annulé par p .

4.2.10.

THÉORÈME. – Soit R_o un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K_o de caractéristique 0, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit e son indice de ramification. Soit G un groupe fini ayant un p -Sylow Q d'ordre p , non central dans G . Notons $n = n(G)$ l'ordre du quotient $\text{Norm}_G(Q)/\text{Cent}_G(Q)$.

(1) Soit Y_{K_o} un revêtement galoisien de groupe G de la droite projective sur K_o ramifié en 3 points rationnels. On suppose Y_{K_o} géométriquement connexe de genre ≥ 2 . Alors la monodromie sauvage γ_w est triviale.

(2) Soit X_o une courbe lisse sur R_o à fibres géométriques connexes de genre 1 et soit $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ un revêtement galoisien de groupe G , géométriquement connexe, ramifié en un point rationnel o , avec un groupe d'inertie d'ordre m . On suppose Y_{K_o} de genre ≥ 2 . Alors la monodromie sauvage γ_w est triviale dans les deux cas suivants : -(i) $(m, p) = 1$, -(ii) $e < (p - 1)/n$.

Bien sûr, nous sommes dans les conditions a), b), c), d) de 2.4.1), dans le cas particulier $2g - 2 + r = 1$.

Dans le cas où Y_{K_o} a potentiellement bonne réduction, modérée sur X_o , la monodromie γ est contenue dans le centre de G (4.2.2), et donc γ_w est trivial puisque Q n'est pas central. Ce cas étant écarté, les conditions e) et f) de 3.1) sont également vérifiées.

Comme n' divise n et $n = n(G)$ divise $p - 1$, on a $p/n' > 1 = 2g - 2 + r$ et nous sommes dans les conditions d'application de 4.2.4 et 4.2.5. Donc si γ_w n'est pas trivial, il existe un bout b de \underline{X} tel que σ_b soit entier et H_b contenu dans N' .

Comme $2g - 2 + r = 1$, il résulte de 3.4.5 que b est le seul bout. Mais alors, 3.1.7 entraîne que G est engendré par N' et H_b et donc $G = N'$, puisque H_b est contenu dans N' .

Finalement on a $G = N = N'$, en particulier $n = n'$.

De plus, toujours d'après 3.4.5, si $g = 0$ et $r = 3$, ou si $g = 1$, $r = 1$ et $(m, p) = 1$, on a nécessairement $n' = 1$. C'est dire que Q est central dans N' (3.1.4), donc dans G , contrairement à l'hypothèse.

Il reste le cas $g = 1$, $r = 1$, $p|m$. On sait déjà que $N = G$ et pour étudier la monodromie sauvage on peut diviser par $C^{(p')}$ (3.1.1), qui est d'ordre premier à p . Ainsi, on est ramené au cas où $G = Q \cdot Z/nZ$ et où la signature du revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ est p . D'après la proposition 4.2.13, ci-après, de tels revêtements n'existent pas pour $e < (p - 1)/n$. Ce qui achève la démonstration du théorème 4.2.10.

La proposition suivante est bien connue.

4.2.11.

PROPOSITION. – Soit S un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel de caractéristique 0 et de corps des fractions F . Soit S' la clôture intégrale de S dans une extension finie galoisienne F' de F et soit m l'ordre du groupe d'inertie. Alors le corps résiduel κ' de S' contient les racines m -èmes de l'unité.

En effet soit t' l'idéal maximal de S' . L'extension $S \rightarrow S'$ est modérée et le groupe d'inertie opère fidèlement sur l'espace tangent t'/t'^2 , via un caractère d'ordre m à valeurs dans κ'^* .

4.2.12.

COROLLAIRE. – Soit R un anneau de valuation discrète complet, à corps des fractions K de caractéristique 0, à corps résiduel k de caractéristique p , d'indice de ramification e . Soit G un groupe fini ayant un p -Sylow Q d'ordre p et soit $n = n(G)$ comme dans 3.1.1. Soit x un point rationnel d'une K -courbe lisse X et soit $Y \rightarrow X$ un revêtement galoisien de groupe G . On suppose que p divise l'ordre de l'inertie au-dessus de x .

Alors $(p - 1)|en$.

Soit S le complété de l'anneau local de X en x , S' celui de Y en un point y de Y au-dessus de x . Alors $S' \rightarrow S$ est une extension galoisienne de groupe de Galois D , le groupe de décomposition. Par hypothèse le groupe d'inertie en y , qui est cyclique, contient un groupe Q d'ordre p qui est un p -Sylow. Le groupe Q est évidemment invariant dans D . Quitte à diviser D par un sous-groupe invariant d'ordre premier à p , on se ramène au cas où $D = Q \cdot Z/n'Z$, avec n' divisant $n(G)$.

Soit K' le corps résiduel de S' et e' l'indice de ramification de son anneau d'entiers. Alors K' est une extension de K de degré n' qui contient les racines p -èmes de 1, d'après 4.2.11. Donc $p - 1$ divise e' et, a fortiori, $p - 1$ divise en' et donc en .

4.2.13.

COROLLAIRE. – *Sous les conditions a), b), c), d), e) de 2.4.1 et 3.1, la signature du revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ est première à p si $(p-1)/n$ ne divise pas e et en particulier si $e < (p-1)/n$.*

Le corollaire 4.2.13 achève la démonstration de 4.2.10.

Signalons encore la proposition suivante, comme application de 4.2.13. Elle ne sera pas utilisée dans la suite.

4.2.14.

PROPOSITION. – *Soit R comme dans 4.2.12 et soit X une courbe propre et lisse sur R , à fibres géométriques connexes, a_i , $i \in I$, une famille finie de points entiers de X , à supports disjoints. Soit n divisant $p-1$ et soit $Y_K \rightarrow X_K$ un revêtement galoisien de groupe $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ qui est géométriquement connexe, ramifié uniquement en les a_i , $i \in I$, avec la signature m_i . On suppose $e < (p-1)/n$.*

Alors les m_i sont premiers à p ; Y_K a bonne réduction Y sur R , et Y est un revêtement modéré de groupe G de X .

Le fait que les m_i soient premiers à p , résulte de 4.2.13. Alors $Y_K \rightarrow X_K$ se factorise en $Y_K \rightarrow Z_K$ étale cyclique d'ordre p et $Z_K \rightarrow X_K$, cyclique d'ordre n , ramifié en les a_i . Soit R' l'extension modérée de R , de degré n , de corps des fractions K' . Alors Z_K acquiert bonne réduction Z' sur R' et Z' est un revêtement modéré de $X' = X \times_R R'$. Soit J' la variété abélienne jacobienne de Z' sur R' et soit ${}_p J'$, le noyau de l'élévation à la puissance p dans J' , qui est un R -schéma en groupes fini et plat. Le revêtement $Y_{K'} \rightarrow Z_{K'}$ cyclique de degré p , correspond à une flèche surjective $({}_p J')_{K'} \rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_{K'}$. L'indice de ramification $e' = en$ de R' est $< p-1$. Donc la flèche précédente se prolonge en un morphisme de schéma en groupes surjectif sur $R' : {}_p J' \rightarrow z\mathbf{f}/p\mathbf{Z}$ ([Ra1] Th. 3.3.3). C'est dire que $Y_{K'}$ se prolonge en Y' revêtement fini étale de X' . Alors Y' est un revêtement modéré de X' , de groupe G . Si $n = 1$, on a bien que Y a bonne réduction et si $n > 1$, G a un centre trivial et on conclut que Y' se descend sur R par 4.2.2.

4.3. Un exemple de monodromie sauvage

Pour terminer cette étude de la monodromie sauvage, nous allons montrer que si dans 4.2.10.2) ii), on suppose $p|m$ mais que l'on omet la condition $e < (p-1)/n$, il peut fort bien y avoir une monodromie sauvage γ_w non triviale. Si tel est le cas, on a vu dans la démonstration de 4.2.10 que le groupe G se réduisait à $N' = N$. Nous allons donc considérer ce cas.

4.3.1 Soit R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique 0, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit n un entier > 1 divisant $p-1$ et $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Considérons une courbe elliptique E sur R , munie d'une origine o et soit $Y_K \rightarrow E_K$ un revêtement géométriquement connexe de groupe G , ramifié uniquement au-dessus de o avec une inertie d'ordre p . Nous allons étudier l'action de l'inertie sauvage γ_w sur la réduction stable de Y_K .

Le revêtement $Y_K \rightarrow E_K$ se factorise en $f_K : Y_K \rightarrow F_K$ cyclique de degré p , et $g_K : F_K \rightarrow E_K$ étale, cyclique de degré n . Alors F_K est une courbe de genre 1, qui acquiert bonne réduction après extension modérée de degré n . Dans la mesure où l'on ne s'intéresse qu'à la monodromie sauvage, on peut donc supposer que F_K a bonne réduction

F sur R . Alors g_K se prolonge en $g : F \rightarrow E$ qui est une isogénie entre courbes elliptiques, cyclique de degré n . Choisissons une origine o' de F au-dessus de o .

Soit $\Sigma = g^{-1}(o)$ qui est un R -sous-schéma en groupes de F , étale, cyclique de degré n . Notons $U = E - \{o\}$, $V = F - \Sigma$. Enfin notons Y^1 le normalisé de F dans Y_K .

4.3.2.

PROPOSITION. – (i) *Il existe une fonction v inversible sur V , unique à multiplication près par un élément de $(R^*)^p$, telle que $Y^1|V$, soit un revêtement de Kummer d'équation $y^p = v$. La fibre spéciale \underline{Y}^1 de Y^1 est géométriquement réduite.*

(ii) *Les zéros de la différentielle dv/v forment un fermé Λ de V , étale sur R , fini de degré n . Soit λ une section de Λ sur R . Alors la monodromie sauvage γ_w est triviale si et seulement si $v(\lambda)$ est une puissance p -ème dans R^* .*

Nous allons commencer par déterminer $R^1(g|V)_*(\mu_p)$, calculé pour la topologie fppf.

Soit D le groupe libre de rang n formé des diviseurs de F à support dans Σ . Notons D° le sous-groupe de D , de rang $n - 1$ formé des diviseurs de degré 0. Le choix de l'origine o' sur F permet d'identifier F à sa jacobienne et on dispose de l'application canonique $\phi : D^\circ \rightarrow F$, dont l'image est le sous-groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de F , noyau de l'isogénie $F \rightarrow E$. Alors $\text{Ker}(\phi)$ est le sous-groupe $D^{\circ\circ}$ de D° formé des diviseurs principaux à support dans Σ . C'est un groupe libre de rang $n - 1$, dont la formation commute au passage aux fibres.

On a la suite exacte habituelle de faisceaux fppf sur $\text{Spec}(R)$:

$$(1) \quad 0 \rightarrow R^1 g_*(\mu_p) \rightarrow R^1(g|V)_*(\mu_p) \rightarrow D^\circ/pD^\circ \rightarrow 0$$

et cette suite exacte est compatible avec l'action naturelle de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur les différents termes. Le faisceau $R^1 g_*(\mu_p)$ est représenté par le schéma en groupes fini et plat ${}_p F$, noyau de la multiplication par p dans F . L'isogénie de degré $n : F \rightarrow E$, identifie ${}_p F$ à ${}_p E$ et en particulier $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ agit trivialement sur $R^1 g_*(\mu_p)$. Par contre l'action de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur D°/pD° décompose ce faisceau en $n - 1$ faisceaux constants de rang 1, associés à chacun des $n - 1$ caractères non triviaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ à valeurs dans le corps premier \mathbf{F}_p .

Nous allons voir que la suite exacte (1) est canoniquement scindée. En effet, la théorie de Kummer fournit une flèche canonique $(g|V)_* G_m \rightarrow R^1(g|V)_*(\mu_p)$, d'image $D^{\circ\circ}/pD^{\circ\circ}$. Or la suite exacte :

$$0 \rightarrow D^{\circ\circ} \rightarrow D^\circ \rightarrow z\mathbf{f}/n\mathbf{Z} \rightarrow 0$$

induit un isomorphisme $D^{\circ\circ}/pD^{\circ\circ} \rightarrow D^\circ/pD^\circ$, d'où le fait que la suite exacte (1) est canoniquement scindée et que la flèche canonique :

$$R^1 g_*(\mu_p) \oplus D^{\circ\circ}/pD^{\circ\circ} \rightarrow R^1(g|V)_*(\mu_p)$$

est un isomorphisme.

Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R^*/R^{*p} & \longrightarrow & H^1(V, \mu_p) & \longrightarrow & H^0(R^1(g|V)_*(\mu_p)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K^*/K^{*p} & \longrightarrow & H^1(V_K, \mu_p) & \longrightarrow & H^0(R^1(g_K|V_K)_*(\mu_p)) \end{array}$$

On trouve que la flèche $H^1(V, \mu_p) \rightarrow H^1(V_K, \mu_p)$, induit un isomorphisme sur le sous-espace sur lequel $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ opère avec des caractères non triviaux, sous-espace qui s'identifie à D^{oo}/pD^{oo} .

Ceci étant, identifions $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ à μ_p sur K grâce au choix d'une racine p -ème de 1 dans K . Le revêtement $Y_K \rightarrow E_K$, galoisien de groupe G , fait de $Y_K \rightarrow F_K$ un torseur sous $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ au-dessus de V_K , donc définit un élément η non nul de $H^1(V_K, \mu_p)$. L'action de G sur Y_K entraîne que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ opère sur η avec un caractère d'ordre n . Ce qui précède entraîne que η provient d'un élément de $H^1(V, \mu_p)$, donné par une équation de Kummer $y^p = v$, où v est une unité sur V bien définie modulo une puissance p -ème dans R^* . De plus $\text{Div}(v)$ a une image non nulle dans D^o/pD^o . Soit \underline{v} la réduction de v sur la fibre spéciale de \underline{V} de V . Comme $\text{Div}(\underline{v})$ a des zéros ou pôles d'ordre non multiple de p , \underline{v} n'est pas une puissance p -ème et l'équation $\underline{y}^p = \underline{v}$ définit un schéma réduit. Alors l'équation $y^p = v$ définit un schéma normal sur \underline{V} et donc coïncide avec Y^1 au-dessus de V . Ceci prouve l'assertion i) de 4.3.2.

Les points où Y^1 n'est pas lisse sur R , se trouvent au-dessus de \underline{V} , en les points où la différentielle $d\underline{v}/\underline{v}$ s'annule. Ils sont stables sous l'action de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Comme $d\underline{v}/\underline{v}$ a des pôles simples aux points de $\underline{\Sigma}$, on voit que $d\underline{v}/\underline{v}$ admet exactement une orbite sous $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de zéros et que ceux-ci sont des zéros simples. Par suite les zéros de $d\underline{v}/\underline{v}$ forment un R -schéma fini étale sur R de degré n sur $\text{Spec}(R)$. Choisissons l'un de ces zéros λ et montrons qu'il n'y a pas de monodromie sauvage en λ si et seulement si $v(\lambda)$ est une puissance p -ème dans R (vu le caractère galoisien du revêtement $Y^1 \rightarrow E$, si la monodromie est modérée en λ , elle le sera aussi en les autres zéros de $d\underline{v}/\underline{v}$).

Prenons une coordonnée locale t sur V , centrée en λ . Après complétion, Y^1 a pour équation $y^p = v$ où v est un élément de $R[[t]]$, de la forme $v = a(1 + bt^2 + \dots)$ où a est une unité de R égale à $v(\lambda)$ et b est une unité de R (noter que n est > 1 et divise $p - 1$, donc $p \geq 3$).

4.3.3.

LEMME. — Supposons $p > 2$ et considérons le germe de courbe sur $R[[t]]$ d'équation $y^p = a(1 + bt^2 + \dots)$, où a et b sont des unités de R . Alors la monodromie est modérée si et seulement si a est une puissance p -ème.

Supposons d'abord que a est une puissance p -ème, auquel cas on se ramène à $a = 1$.

Soit β tel que $\beta^{2(p-1)} = -p$, ce qui introduit une extension modérée R' de R , et posons $y = 1 + \beta^2 y'$, $t = \beta^p t'$. Après simplification par β^{2p} , et réduction modulo l'uniformisante de R' , il vient :

$$y'^p - y' = bt'^2 + \dots$$

ce qui est une équation d'Artin-Schreier de conducteur 2. Le cycle évanescant se résout donc sur le disque : $\text{Val}(t) \geq p/2(p-1)\text{Val}(p)$.

Revenons au cas général. Considérons le disque $\text{Val}(t) \geq p/2(p-1)\text{Val}(p)$, qui admet une bonne réduction D après extension modérée R' de R . D'après ce qui précède, le revêtement initial a donc potentiellement bonne réduction au-dessus de D (par exemple après extraction d'une racine p -ème de a). Si la réduction semi-stable survient après une extension modérée de R , l'équation $y^p = a$ (obtenue en faisant $t = 0$) devient alors non ramifiée après extension modérée de R . Mais ceci n'est possible que si a est une puissance p -ème dans R .

Ce lemme achève la démonstration de 4.3.2.

4.3.4. Exemple. – Prenons $n = 2$. Définissons F par une équation de Legendre $z^2 = x(x-1)(x-\tau)$, où τ est une unité de R qui n'est pas congrue à 1 modulo l'uniformisante. Prenons pour origine sur F le point $x = \infty$. Soit E la courbe elliptique quotient de F par le sous-groupe d'ordre 2 engendré par le point $x = 0$. La translation sur F par le point $x = 0$ transforme la fonction rationnelle x en τ/x . Par suite la fonction $v = x/\sqrt{\tau}$ est transformée en v^{-1} .

Ceci étant, choisissons un nombre premier p impair et considérons le revêtement de Kummer de F d'équation $y^p = v$. Il correspond à un revêtement de E galoisien de groupe de Galois le groupe diédral d'ordre $2p$. Les zéros de dv/v sont les deux autres points d'ordre 2 de $F : x = 1$ et $x = \tau$. On a $v(\tau) = \sqrt{\tau}$. D'après 4.3.1, la monodromie sera modérée si et seulement si τ est une puissance p -ème dans R , ce qui évidemment n'est pas automatique.

5. Fin de la démonstration du théorème 0

5.1. Étude de la monodromie modérée

5.1.1.

THÉORÈME. – Soit R_o un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K_o de caractéristique 0, de corps résiduel k algébriquement clos de car. $p > 0$ et soit e son indice de ramification. Soit G un groupe fini à centre trivial, ayant un p -Sylow Q d'ordre p et soit n l'ordre du quotient $\text{Norm}_G(Q)/\text{Cent}_G(Q)$. Soit X_o une courbe propre et lisse sur R_o , à fibres géométriques irréductibles, munie de r points entiers a_i , $i \in I$, disjoints. Soit $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ un revêtement galoisien de groupe G , géométriquement connexe, ramifié exactement au-dessus des a_i , $i \in I$, avec des groupes d'inertie d'ordre m_i . On suppose que Y_{K_o} est de genre ≥ 2 et on fait les hypothèses suivantes :

- La monodromie finie Γ qui conduit à la réduction stable Y_{\min} est modérée;
- $e < (p-1)/n$.

Alors les m_i sont premiers à p , Y_{K_o} a bonne réduction Y_o sur R_o , avec Y_o lisse sur R_o , revêtement de groupe G de X_o , modérément ramifié au-dessus des a_i .

Le fait que les m_i soient premiers à p résulte de 4.2.13. Par hypothèse, il existe une extension modérée R de R_o qui conduit à la réduction stable Y_{\min} .

5.1.2.

LEMME. – Le modèle semi-stable modifié Y (2.4.6) existe sur une extension modérée R' de R .

En effet, puisque les m_i , $i \in I$, sont premiers à p , on peut appliquer la dernière assertion de 2.4.5 et conclure que le modèle semi-stable modifié $Y = Y_{\text{mod}}$ existe après une extension R' de R de degré ≤ 2 . Or la condition $e < (p-1)/n$, entraîne $p \geq 3$, donc R' est une extension modérée de R . D'où le lemme.

Notons Y_o la clôture intégrale de X_o dans Y_{K_o} . Soient ξ le point générique de la fibre spéciale \underline{X}_o , η un point de \underline{Y}_o au-dessus de ξ , I le groupe d'inertie en η . Notons O_ξ (resp. O_η) un hensélisé strict de X_o (resp. Y_o) en ξ (resp. η), de sorte que O_η est un anneau de valuation discrète fini sur O_ξ , extension galoisienne de groupe I .

5.1.3.

LEMME. – *L'indice de ramification de O_η est premier à p .*

Considérons une extension modérée R' de R_o qui conduit au modèle minimal modifié Y et à son quotient $X = Y/G$, ce qui est possible d'après 5.1.2 (c'est ici que l'on utilise de façon essentielle le fait que la monodromie sauvage de Y_{K_o} est triviale). Par construction, la composante origine \underline{X}_o figure dans \underline{X} . Par ailleurs Y étant semi-stable sur R' , \underline{Y} est une courbe réduite. Il en résulte que le normalisé de $O_\eta \otimes_{R_o} R'$ a ses composants locaux qui ont un indice de ramification sur R' égal à 1. Comme R' est modéré sur R_o , le lemme en résulte.

5.1.4.

LEMME. – *Le groupe d'inertie I est d'ordre premier à p .*

Supposons que I ne soit pas d'ordre premier à p . Quitte à remplacer Q par un conjugué, on peut supposer que I contient Q ; la condition e) entraîne que Q est le p -Sylow de I . Il résulte du lemme 5.1.3 que le corps résiduel $k(\eta)$ de O_η est une extension radicielle de degré p du corps résiduel $k(\xi)$ de O_ξ . Soit C' le sous-groupe central maximal de I , d'ordre premier à p , de sorte que $I' = I/C'$ est de la forme $Q \cdot \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$, où $n'|n = n(G)$. Soit $O_{\eta'}$ l'anneau des invariants de O_η sous C' . C'est un anneau de valuation discrète, extension galoisienne de O_ξ de groupe $Q \cdot \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$. Comme C' est d'ordre premier à p , il est encore vrai que le corps résiduel $k(\eta')$ de $O_{\eta'}$ est une extension radicielle de $k(\xi)$, de degré p . Le morphisme d'anneaux $O_\xi \rightarrow O_\eta$, se factorise en $O_\xi \rightarrow O_{\xi'}$ qui est une extension modérée de degré n' et $O_{\xi'} \rightarrow O_{\eta'}$ qui est cyclique de degré p , à extension résiduelle radicielle de degré p . L'indice de ramification e' de $O_{\xi'}$ est $en' \leq en < p - 1$. On trouve alors une contradiction avec 1.2.2.

Ceci étant, on a montré que $O_\xi \rightarrow O_\eta$ est une extension modérée; a fortiori, il en est de même de $Y \rightarrow X$ génériquement au-dessus de la composante origine \underline{X}_o . Comme il y a au pire une inertie qui est un p -groupe, $Y \rightarrow X$ est génériquement étale au-dessus de \underline{X}_o . Il résulte alors de 2.4.9 que Y est lisse sur R' modérément ramifié au-dessus de $X_o \times_{R_o} R'$. Comme G est à centre trivial on conclut par 4.1.3 que Y_o est lisse sur R_o , modérément ramifié sur X_o . Ceci achève la démonstration de 5.1.1.

5.1.5.

THÉORÈME. – *Soient p un nombre premier et G un groupe fini à centre trivial, ayant un p -sous-groupe de Sylow Q d'ordre p et soit $n = n(G)$ l'ordre du quotient $\text{Norm}_G(Q)/\text{Cent}_G(Q)$.*

Soit R_o un anneau de valuation discrète complet, à corps des fractions K_o de caractéristique 0, à corps résiduel algébriquement clos de caractéristique p et soit e son indice de ramification.

Soit X_o une courbe propre et lisse sur R_o , à fibres géométriques connexes de genre g , munie de r -sections disjointes a_i . Enfin soit $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ un revêtement galoisien de groupe G , géométriquement connexe, ramifié en les a_i .

On suppose que $2g - 2 + r = 1$, de sorte que X_o est soit la droite projective munie des 3 sections $0, 1, \infty$, soit une courbe elliptique munie d'une origine o .

Alors si $e < (p - 1)/n$, Y_{K_o} a bonne réduction sur R_o et plus précisément la normalisée Y_o de X_o dans Y_{K_o} est lisse sur R_o et modérément ramifiée sur X_o .

Ce théorème contient le théorème 0 de l'introduction.

Supposons d'abord que le genre de Y_{K_o} est ≥ 2 . L'énoncé résulte alors de 4.2.8 et de 5.1.1.

Le cas où Y_{K_o} est de genre 0 ou 1 est discuté dans les numéros suivants.

5.2. Le cas où Y est de genre 0

Supposons Y_{K_o} de genre 0. Comme k est algébriquement clos, Y_{K_o} est alors une droite projective. Les groupes G qui peuvent intervenir et les signatures possibles sont bien connus. Sous la condition $en < p - 1$, la signature du revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ est nécessairement première à p d'après 4.2.13, et aucun cas ne satisfait aux conditions de 5.1.5.

Indépendamment de 5.1.5, mais supposant G à centre trivial et p divisant l'ordre de G , on peut se demander à quelles conditions, il existe une bonne réduction Y , propre et lisse sur R_o , équivariante sous G . Voici, sans autres détails, la liste des différents cas. On a noté Y_o la clôture intégrale de X_o dans Y_{K_o} .

1. Cas du groupe diédral D_{2m} , d'ordre $2m$, avec $m = p^r m'$, p impair, $r \geq 1$, $(m', p) = 1$

Un revêtement de groupe D_{2m} existe si et seulement si l'extension modérée de degré 2 de K_o contient les racines p^r -èmes de 1.

Si K_o contient les racines p^r -èmes de 1, Y_o est lisse sur R_o . C'est un revêtement de X_o , de groupe D_{2m} qui se factorise en $Y_o \rightarrow Z_o \rightarrow X_o$, où $Z_o \rightarrow X_o$ est modéré de groupe $D_{2m'}$, tandis que $Y_o \rightarrow Z_o$ est cyclique de degré p^r . En dehors de 0, 1, ∞ , $Y_o \rightarrow Z_o$ est un torseur de groupe μ_{p^r} , en particulier est radiciel sur la fibre spéciale.

Si K_o ne contient pas les racines p^r -èmes de 1, il n'existe pas de modèle sur R_o propre et lisse, équivariant sous G .

2. Cas du groupe symétrique S_4

Il existe un revêtement de la droite projective sur K_o , de groupe S_4 , de signature (2,3,4). Il est définissable sur \mathbf{Q}_p et Y_o est l'unique bonne réduction Y , G équivariante. Pour $p = 2$, la fibre spéciale \underline{Y} se factorise en $\underline{Y} \rightarrow \underline{Z} \rightarrow \underline{X}$, où $\underline{Z} \rightarrow \underline{X}$ est galoisien de groupe S_3 et $\underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ est radiciel de groupe $\mu_2 \times \mu_2$, correspondant au sous-groupe de Klein de S_4 . En caractéristique 3, on trouve la réalisation de S_4 comme groupe $\text{PGL}_2(F_3)$.

3. Le cas du groupe alterné A_4 s'obtient comme sous-groupe d'indice 2 du cas S_4 .

4. Le cas du groupe alterné A_5 . Soit u tel que $u^2 - u - 1 = 0$ et considérons $\mathbf{Q}(u)$ qui est l'extension quadratique de \mathbf{Q} contenue dans $\mathbf{Q}(\zeta_5)$. Après complétion en p , on obtient un corps K_o sur lequel existe un revêtement de la droite projective de groupe A_5 , de signature (2,3,5). Ce revêtement admet une unique bonne réduction équivariante $Y = Y_o$. Cette réduction correspond à la réalisation de A_5 comme groupe $\text{PGL}_2(\mathbf{F}_4)$ en caractéristique 2, comme sous-groupe de $\text{PGL}_2(\mathbf{F}_9)$ en caractéristique 3, comme groupe $\text{PGL}_2(\mathbf{F}_5)$ en caractéristique 5.

5.3. Le cas où Y_{K_o} est de genre 1

Rappelons qu'une courbe Y , propre et lisse sur un corps K , géométriquement connexe de genre 1, est un torseur sous sa jacobienne qui elle est une courbe elliptique. Supposons K de caractéristique 0 et soit G un groupe fini de K -automorphismes de Y . Alors G est extension d'un groupe cyclique C d'ordre ν par un groupe T de translations de Y . Supposons G à centre trivial. Alors T est le groupe dérivé $[G, G]$ de G et par suite C est

le plus grand quotient abélien G^{ab} . En effet C opère additivement sur T par conjugaison. Soit u l'automorphisme de T défini par un générateur de C . L'hypothèse que G a un centre trivial signifie que l'endomorphisme $u - 1$ de T est injectif, donc bijectif. Par suite, il n'existe pas de quotient non nul de T sur lequel C agit trivialement et donc $[G, G] = T$.

Lorsque C n'est pas trivial, Y/G est une droite projective et les valeurs de la signature du revêtement $Y \rightarrow Y/G$ sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} \nu = 2 & \text{sgn}(2, 2, 2, 2) \\ \nu = 4 & (2, 4, 4) \\ \nu = 3 & (3, 3, 3) \\ \nu = 6 & (2, 3, 6) \end{array}$$

En particulier, on note que ν est égal à l'un des exposants de la signature, ce qui entraîne que l'un des groupes d'inertie de G opérant sur Y est d'ordre ν et donc que l'extension G de C par T est scindable.

5.3.1.

PROPOSITION. – *Reprenons les notations de 2.4.1.a). Soit X_o une droite projective sur R_o , munie de sections disjointes a_i , $i \in I$. Soit Y_{K_o} une courbe géométriquement connexe, de genre 1, qui est un revêtement galoisien de groupe G de X_{K_o} , ramifié en les a_i , $i \in I$. On suppose que G a un centre trivial.*

Alors : (1) Y_{K_o} a un point rationnel. (2) Si la signature du revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ est première à p , Y_{K_o} a potentiellement bonne réduction. (3) Si l'indice de ramification e de R_o , vérifie $e < (p - 1)/\nu$, où ν est l'ordre de G^{ab} (5.3.1), Y_{K_o} a bonne réduction sur R_o , modérément ramifiée sur X_o .

Le groupe G est extension d'un groupe cyclique C d'ordre ν par un groupe T de translations (5.3.1). Soit $Z_{K_o} = Y_{K_o}/T$ qui est aussi une courbe de genre 1. Le tableau des signatures ci-dessus montre que la ramification de $Z_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ est de degré ν en au moins l'un des a_i , $i \in I$. Par suite Z_{K_o} a un point rationnel o fixe par C . Soit F l'image réciproque de o dans Y_{K_o} . C' est un torseur sous T sur lequel G opère. Choisissons un relèvement C' de C dans l'extension scindable G de C par T . Comme G est à centre trivial, C' est son propre normalisateur dans G . Par suite, C' opérant sur F a géométriquement un seul point fixe et celui-ci est donc rationnel sur K_o (d'où 1).

Désormais on peut donc supposer que Y_{K_o} est une courbe elliptique et que Z_{K_o} est une courbe elliptique isogène à Z_{K_o} .

Prouvons 2. Supposons que la signature du revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ soit première à p . Comme ν divise l'un des exposants de la signature, on a $(\nu, p) = 1$. L'hypothèse que les a_i , $i \in I$, sont disjoints entraîne alors que Z_{K_o} acquiert bonne réduction Z sur l'extension modérée R de R_o de degré ν et Z est un revêtement modérément ramifié le long des a_i , $i \in I$, de $X_o \times_{R_o} R$. Comme Y_{K_o} est une courbe elliptique isogène à Z_{K_o} , Y_{K_o} acquiert aussi bonne réduction Y sur R et l'isogénie $Y_{K_o} \rightarrow Z_{K_o}$ se prolonge sur R en une isogénie $Y \rightarrow Z$ (pas nécessairement étale). D'où 2).

Prouvons 3. Supposons $e < (p - 1)/\nu$. Alors, nécessairement $(\nu, p) = 1$ et on est dans les conditions de 2). Par suite Y_{K_o} et Z_{K_o} acquièrent des bonnes réductions Y et Z sur l'anneau R égal à l'extension modérée de R_o , de degré ν . L'indice de ramification de R est $e\nu < p - 1$. Par suite l'isogénie $Y \rightarrow Z$ est nécessairement étale ([Ra 1] Th. 3.3.3). Finalement $Y \rightarrow Z \rightarrow X_o \times_{R_o} R$ est un revêtement modéré de groupe G . On conclut

par 4.1.3 que Y_{K_o} admet déjà une bonne réduction Y_o sur R_o , qui est un revêtement modéré de X_o . Ceci achève la démonstration de 5.3.1.

5.3.2.

COROLLAIRE. – *L'énoncé 5.3.1 entraîne le théorème 5.1.5 dans le cas où Y_{K_o} est de genre 1.*

En effet reprenons 5.3.1 avec l'hypothèse supplémentaire que G possède un p -Sylow Q d'ordre p et soit, comme d'habitude, $n = n(G)$ l'ordre du quotient $\text{Norm}_G(Q)/\text{Cent}_G(Q)$. Supposons également $e < (p-1)/n$. Alors d'après 4.2.13 (où la condition Y_{K_o} de genre ≥ 2 n'est pas utilisée), la signature du revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ est première à p . D'après le tableau des signatures de 5.3.1, on en déduit que $(\nu, p) = 1$. Par suite Q est contenu dans le sous-groupe T de G des translations de Y_{K_o} . On en déduit que $\text{Norm}_G(Q) = G$ et que $\text{Cent}_G(Q) \supset T$. En fait on a $\text{Cent}_Q(T) = T$, car le groupe $C = G/T$ d'automorphismes de la courbe elliptique $Y_{\overline{K}_o}$ opère fidèlement sur le groupe Q de points d'ordre p . Il en résulte que $n = \nu$. On conclut à la bonne réduction de Y_{K_o} grâce à 5.3.1.3).

6. Commentaires et exemples

6.1. Remarques

6.1.1. Plaçons-nous dans les conditions d'application de 5.1.1. Supposons qu'il existe un anneau de valuation discrète R_{oo} intermédiaire entre les vecteurs de Witt sur k et R_o , tel que la courbe X_o se descende en une courbe lisse X_{oo} définie sur R_{oo} . Supposons que les sections a_i , $i \in I$, se descendent également sur R_{oo} . Notons K_{oo} le corps des fractions de K_o . Alors le revêtement $Y_{K_o} \rightarrow X_{K_o}$ se descend canoniquement sur K_{oo} et a déjà bonne réduction Y_{oo} sur R_{oo} , revêtement modéré de X_{oo} , comme il résulte de la théorie du groupe fondamental modéré. Ainsi dans le théorème 0, on voit que le revêtement initial de la droite projective moins trois points, existe et a déjà bonne réduction sur les vecteurs de Witt à coefficients dans k .

6.1.2. Considérons les hypothèses a), b), c), d), e) de 2.4 et 3.1 mais supposons que p divise au moins l'un des m_i , $i \in I$. Soit g le genre de X_o . Il résulte alors de 4.2.10 que e divise $(p-1)/n$. En particulier, si $e = 1$, on a nécessairement $n = p-1$.

- Si $g \geq 1$, la courbe Y_{K_o} ne peut jamais avoir bonne réduction ou même potentiellement bonne réduction.
- Si $g = 0$, il pourra arriver que Y_{K_o} ait potentiellement bonne réduction Y sur une extension R de R_o , mais alors Y/G sera une droite projective distincte du modèle $X_o \times_{R_o} R$. Il y aura en général une monodromie modérée non triviale comme l'a remarqué Coleman ([Co] § 5), mais, dans le cas de la droite projective privée de 3 points, il n'y aura pas de monodromie sauvage d'après 4.2.8 1).

6.2. Questions

6.2.1. L'énoncé du théorème 0 garde un sens si au lieu de supposer que G a un p -Sylow d'ordre p , on suppose qu'il admet un p -Sylow cyclique d'ordre p^r , $r \geq 1$. J'ignore si la conclusion reste valable.

6.2.2. Dans le cas $2g-2+r=1$, nous avons un très bon contrôle de la monodromie sauvage grâce à 3.4.5 et 4.2.8. Il est plausible que le type d'énoncé donné dans 5.1.1 s'étende aux autres courbes hyperboliques sous une forme affaiblie. Par exemple, si l'on

suppose $p/n > 2g - 2 + r$, et $e < (p - 1)/n$, est-il vrai que la monodromie sauvage Γ_w est triviale auquel cas, il résultera de 5.1.1 que Y_{K_o} a bonne réduction Y_o sur R_o , revêtement modéré de X_o ?

6.3. Le cas critique $e = (p - 1)/n$. Lorsque l'on garde les hypothèses de 5.1.1, mis à part que l'on remplace la condition $en < p - 1$, par $en = p - 1$, nous dirons que nous sommes dans le cas critique. Alors la preuve de la bonne réduction achoppe : après extension modérée de R_o de degré n , on ne peut plus conclure que le normalisé de X_o dans Y_{K_o} est génériquement étale au-dessus de \underline{X}_o , il peut apparaître un degré radiciel p qui conduit à un torseur sous μ_p (1.2.2). Nous allons en donner des exemples. Notons que si $e = 1$, le cas critique se produit lorsque $n = p - 1$, c'est-à-dire dans le cas où il y a dans le groupe G une seule classe de conjugaison d'éléments d'ordre p .

Donnons des exemples de mauvaise réduction dans le cas critique. Supposons que e divise $p - 1$ et est différent de $p - 1$. Posons $n = (p - 1)/e$ qui est donc un entier > 1 . Soit C un groupe cyclique d'ordre n , on va voir que l'on peut prendre pour G le produit semi-direct $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \cdot C$, qui est bien à centre trivial.

Partons de X_o propre et lisse sur R_o et soit $Z_1 \rightarrow X_o$, un revêtement modéré de groupe C , qui est propre et lisse sur R_o . Notons J_1 la jacobienne de Z_1 , munie de l'action naturelle de C . Supposons que J_1 contienne un sous-schéma en groupes \mathcal{H}_1 isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, qui est stable par C et sur lequel C agit par un caractère $\chi : C \rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ d'ordre n .

Soient K l'extension modérée de K_o de degré n et R la clôture intégrale de R_o dans K . Considérons le caractère cyclotomique $\omega : \text{Gal}(K/K_o) \rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$, qui décrit l'action de Galois sur les racines p -èmes de 1. Il est d'ordre n . Soit $\psi : \text{Gal}(K/K_o) \rightarrow C$, tel que $\chi \circ \psi = \omega$. Si alors on tord la fibre générique $(Z_1)_{K_o}$ de Z_1 par ψ ([Se2] 5.3), on obtient une nouvelle courbe $(Z_2)_{K_o}$ qui est un revêtement de $(X_o)_{K_o}$ de groupe C . Soit $(J_2)_{K_o}$ sa jacobienne. Par la torsion le sous-groupe \mathcal{H}_1 est transformé en un sous-groupe de $(J_2)_{K_o}$ isomorphe à μ_p . Par dualité, il lui correspond un revêtement $Y_{K_o} \rightarrow (Z_2)_{K_o}$ étale, cyclique d'ordre p . Le composé $Y_{K_o} \rightarrow (Z_2)_{K_o} \rightarrow (X_o)_{K_o}$ est galoisien de groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \cdot C = G$. Par construction, Y_{K_o} n'a pas bonne réduction sur R_o , car déjà $(Z_2)_{K_o}$ n'a pas bonne réduction. Quand on fait l'extension à K , on obtient Y_K qui se prolonge en Y sur R , et admet la factorisation $Y \rightarrow Z_1 \times_{R_o} R \rightarrow X_o \times_{R_o} R$. La première flèche est un torseur sous μ_p . En particulier, si le genre de Z_1 est > 1 , on voit que Y_{K_o} n'a même pas potentiellement bonne réduction.

Il reste à voir que l'on peut réaliser les conditions ci-dessus, pour certaines valeurs de n et de p , et avec des revêtements de la droite projective ramifiés en 3 points.

6.3.1.

LEMME. – Soit X_o la droite projective sur R_o et $Z_1 \rightarrow X_o$ un revêtement cyclique d'ordre n , ramifié en $0, 1, \infty$, où n divise $p - 1$. Soit J_1 la jacobienne de Z_1 . Alors J_1 est un relèvement canonique (au sens de Serre-Tate) de sa fibre spéciale \underline{J}_1 .

Rappelons que c'est là une situation exceptionnelle dès que le genre de Z_1 est > 3 ([Dw-Ogl]).

Soit T le groupe p -divisible associé à J_1 . Le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ agit sur T , de sorte que T se décompose en la somme directe des T_χ , où χ parcourt les caractères de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ à valeurs dans les racines $(p - 1)$ -èmes de 1. Un calcul facile de caractéristique d'Euler-Poincaré sur la fibre générique montre que chaque groupe p -divisible T_χ est de hauteur ≤ 1 (et de hauteur 1 si Z_1 est de genre > 0 et χ d'ordre n). Par suite T_χ est soit étale, soit de type

multiplicatif. En particulier T est somme directe de sa partie étale et de sa partie de type multiplicatif, donc J_1 est un relèvement canonique de sa fibre spéciale.

Comme la hauteur de la partie étale et de la partie de type multiplicatif sont égales, il est clair que dès que Z_1 n'est pas de genre 0, il existe un T_χ étale non nul, avec χ d'ordre n . On peut alors prendre pour groupe \mathcal{H}_1 , le noyau de la multiplication par p dans un tel T_χ .

6.4. Liens avec la rigidité

Soient G un groupe fini, C_i , $i = 1, \dots, r$ des classes de conjugaison de G . Soit Σ l'ensemble des suites (g_1, \dots, g_r) , telles que :

- $g_i \in C_i$
- $g_1 g_2 \cdots g_r = 1$
- (g_1, \dots, g_r) engendrent G .

Alors G opère par conjugaison sur Σ et cette action est libre dès que le centre de G est trivial. On dit que la suite (C_1, \dots, C_r) de classes de conjugaison de G est *rigide* si Σ est non vide, et G agit transitivement sur Σ .

6.4.1.

PROPOSITION. – Soit R_o un anneau de valuation discrète complet, à corps des fractions K_o de caractéristique 0, à corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique p , d'indice de ramification $e = 1$. Soit G un groupe fini, à centre trivial, ayant un p -Sylow Q d'ordre p . Soit (C_o, C_1, C_∞) un triplet rigide de classes de conjugaison de G , formé d'éléments d'ordre premier à p . Supposons $n = n(G) < (p - 1)$.

Alors, si X_o désigne la droite projective sur R_o , munie de ses trois sections $(0, 1, \infty)$, il existe un revêtement $Y_o \rightarrow X_o$, galoisien de groupe G , lisse sur R_o , modérément ramifié au-dessus de $0, 1, \infty$, tel que l'inertie au-dessus de 0 (resp. 1, resp. ∞) soit engendrée par un élément de C_o (resp. C_1 , resp. C_∞). De plus ce revêtement est unique à un G -isomorphisme unique près.

Notons d'abord que k étant algébriquement clos, et les C_i étant formées d'éléments d'ordre premier à p , les C_i sont des classes rationnelles sur K_o . L'existence du revêtement sur K_o et son unicité résultent de la théorie de la rigidité ([Se3] 8.2.1 ou [Ma-Ma]). Sa bonne réduction sur R_o , revêtement modéré de X_o , résulte du théorème 5.1.5.

6.4.2. Exemple. – Prenons pour G le groupe sporadique M de Fischer-Griess. Il existe, de par la rigidité (et la classification supposée des groupes simples intervenant dans M), un revêtement de la droite projective sur \mathbf{Q} , de groupe M , de signature $(2,3,29)$ ([Hu], [Th]). Étudions sa réduction mod. p , pour les différents premiers p qui divisent strictement l'ordre de M et autres que 29. Compte tenu du nombre de classes de conjugaison d'ordre p dans M ([At]), on trouve qu'il y a bonne réduction pour $p = 23, 31, 47, 59, 71$ et que l'on est dans le cas critique pour $p = 17, 19$ et 41. Comme on pouvait le prévoir d'après 4.2.10, pour $p = 29$, on a $n(G) = p - 1 = 28$.

6.4.3. Remarques. – 1) Dans 6.4.1, la condition $n(G) < p - 1$ ne peut être levée comme le montrent les exemples de 6.3 où l'on prend $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$, $p - 1 > 2$. En effet, ces revêtements correspondent à des triplets de classes de conjugaison rigides. Ces classes sont rationnelles sur \mathbf{Q}_p , (mais ne sont pas rationnelles sur \mathbf{Q}).

2) Le problème de la bonne réduction mod. p , pour les revêtements de la droite projective, disons ramifiés en 3 points, qui sont obtenus par la méthode de rigidité et pour

des classes de conjugaison d'ordre premier à p , a été soulevé par Serre dans ([Se3] 8.2.1). L'énoncé 6.4.1 apporte une réponse très partielle.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ab] S. ABHYANKAR, Coverings of algebraic curves, *Am. J. Math.* **79**, 1957, pp. 825–856.
- [At] *Atlas of finite groups by Conway, Curtis, Norton, Parker, Wilson*. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [B-L-R] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT et M. RAYNAUD, *Néron Models*. Ergebnisse der Mathematik 3, Folge, Band 21, Springer-Verlag, 1990.
- [Co] R. COLEMAN, *Torsion Points on Curves*, in Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry ; Advanced studies in pure mathematics 12, North-Holland, 1987, pp. 235–247.
- [De] M. DESCHAMPS, *Réduction semi-stable*. Séminaire Szpiro sur les pincesaux de courbes de genre au moins 2, Astérisque n° 86, 1981, pp. 1–34.
- [De-Mu] P. DELIGNE et D. MUMFORD, The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publ. Math. I.H.E.S.* n° 36, 1969, pp. 75–109.
- [Dw-Og] B. DWORK et A. OGUS, Canonical liftings of jacobians. *Composito*, 1986, vol. **58**, pp. 111–131.
- [Gr1] A. GROTHENDIECK, Séminaire de Géométrie Algébrique, SGA 1. Lecture Notes n°224, Springer-Verlag, 1971.
- [Gr2] A. GROTHENDIECK, Éléments de Géométrie algébrique III. *Publ. Math. I.H.E.S.* n° 11, 1961.
- [Hu] D. C. HUNT, Rational rigidity and the sporadic groups. *J. of Algebra*, **99**, 1986, pp. 577–592.
- [Ka] N. KATZ, Local-to global extensions of fundamental groups. *Ann. Inst. Fourier*, t. 36, 4, 1986, pp. 70–105.
- [Ma] H. MATZAT, Konstruktion von Zahl- und Funktionenkörpern mit vorgegebener Galoisgruppe. *J. Reine Angew. Math.*, **349**, 1982, pp. 179–220.
- [Ma-Ma] G. MALLE et H. MATZAT, *Inverse Galois Theory*. IWR des Universität Heidelberg (1992), livre à paraître chez Springer-Verlag.
- [Oo-Ta] F. OORT et J. TATE, Group schemes of prime order. *Ann. Sc. E.N.S.*, t. 3, 1970, pp. 1–21.
- [Ra1] M. RAYNAUD, Schémas en groupes de type (p, \dots, p) . *Bull. Soc. Math. France*, t. 102, 1974, pp. 241–280.
- [Ra2] M. RAYNAUD, p -groupes et réduction semi-stable des courbes. The Grothendieck Festschrift, vol. **III**, Progress in Mathematics - Birkhäuser 1990, pp. 179–197.
- [Ra3] M. RAYNAUD, Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$. *Invent. Math.*, **116**, 1994, pp. 423–462.
- [Sa] T. SAITO, Vanishing cycles and geometry of curves over a discrete valuation ring. *Am. J. Math.*, **109**, 1987, pp. 1043–1085.
- [Se1] J.-P. SERRE, Corps locaux, *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, **8**, Hermann, Paris, 1962.
- [Se2] J.-P. SERRE, Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes n° 5, Springer-Verlag, 1964.
- [Se3] J.-P. SERRE, Topics in Galois Theory, Research Notes in Mathematics, vol. **1**, Jones and Barlett Publishers, Boston, London, 1992.
- [Th] J. G. THOMPSON, Some finite groups which appear as $\text{Gal}(L/K)$ where $K = \mathbb{Q}(\mu_n)$. *J. of Algebra* **89**, 1984, pp. 437–499.
- [Za] H. ZASSENHAUS, *The theory of groups*, Vandenhoeck & Rupprecht Ed., 1956.

(Manuscrit reçu le 30 janvier 1998;
accepté, après révision, le 4 septembre 1998.)

M. RAYNAUD
Université de Paris-Sud,
URAD 0752 du CNRS,
91405 Orsay Cedex, France
michel.raynaud@math.u-psud.fr