ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ILARIA DAMIANI

La R-matrice pour les algèbres quantiques de type affine non tordu

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 31, nº 4 (1998), p. 493-523
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1998_4_31_4_493_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 31, 1998, p. 493 à 523.

LA R-MATRICE POUR LES ALGÈBRES QUANTIQUES DE TYPE AFFINE NON TORDU

PAR ILARIA DAMIANI

RÉSUMÉ. – Ici on étudie la R-matrice des algèbres quantiques de type affine non tordu : grâce aux résultats contenus dans [8], [25], [26] il s'agit de trouver une base de $\mathcal{U}_q^+$ et une $\mathcal{U}_q^-$ duales par rapport à la forme de Killing.

Après avoir rappelé les notations (1 et 2), les résultats généraux (2, 3) et ceux connus pour le cas fini – et conséquemment pour les racines réelles – (4), le premier pas est d'étudier l'action du coproduit sur les vecteurs relatifs aux racines imaginaires (5 et 7), en utilisant les propriétés de commutation analysées dans 6.

Ensuite on décrit quelques propriétés de dualité des bases de PBW (8) et on calcule la forme de Killing sur les vecteurs relatifs aux racines imaginaires (9), pour conclure enfin avec l'étude complète des propriétés de dualité (10).

On résume donc les résultats dans la formule exponentielle pour la R-matrice (11). © Elsevier, Paris

ABSTRACT. – This paper deals with the study of the R-matrix for non-twisted affine quantum algebras: thanks to the results of [8], [25], [26] this problem reduces to looking for dual bases of $\mathcal{U}_q^+$ and $\mathcal{U}_q^-$ (dual with respect to the Killing form).

After recalling the notations (1 and 2), the general results (2 and 3) and the well known facts about the finite case and the real root vectors (4), the first step consists in studying the action of the coproduct on the imaginary root vectors (5 and 7) by applying the commutation rules found in 6.

The second step is describing some duality properties of the PBW-bases (8), computing the Killing form on the imaginary root vectors (9) and finally giving complete details on the duality properties (10).

These results are gathered together in 11, where an explicit exponential formula for the R-matrix is given. © Elsevier, Paris

0. Introduction

Dans cet article on calcule la R-matrice $R = R_{\hat{\mathfrak{g}}}$ pour les algèbres quantiques $\mathcal{U}_q = \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ de type affine non tordu, en étudiant l'action du groupe des tresses généralisé et ses relations avec le coproduit Δ, à l'aide de certaines « R-matrices partielles », qui ont d'abord été introduites par Levendorskii-Soibelman (cf. [18]) pour la détermination de $R_{\mathfrak{g}}$ dans le cas fini.

Levendorskii-Soibelman-Stukopin, dans [19], trouvent $R_{\widehat{sl(2)}}$, mais ils affirment ne pas savoir comment étendre leur résultat au cas affine non tordu général.

Khoroshkin-Tolstoy, dans [15], donnent une formule générale pour $R_{\hat{\mathfrak{g}}}$, mais ils n'étudient pas l'action du groupe des tresses et utilisent d'autres techniques.

Partially supported by Swiss National Science Foundation and Université Louis-Pasteur, Strasbourg.

Dans cet article on généralise les techniques de [18], [19], en les appliquant à une base de type PBW de $\mathcal{U}_q$ (cf. [2]), ce qui permet de décrire assez précisément le coproduit Δ sur les vecteurs E_α relatifs aux racines positives.

Les racines positives réelles ne présentent aucune différence avec le cas fini, sauf qu'il y a deux suites de racines positives au lieu d'une seule; mais tout marche comme dans [17] et on ne rencontre pas de vraies difficultés.

D'un autre côté pour les racines imaginaires, qui n'appartiennent pas à l'orbite des racines simples sous l'action du groupe de Weyl, il faut donner d'autres arguments: essentiellement, on arrive à décrire $\Delta(E_{(m\delta,i)})$ ($m > 0$, $i \in I_0$: cf. définition 2.7) grâce au fait que

(i) les vecteurs $E_{(m\delta,i)}$ sont points fixes pour le sous-groupe du groupe des tresses généralisé engendré par $\{T_{\omega_j^\vee} | j \in I_0\}$ et en particulier pour $T_{\rho^\vee}$, où $\omega_1^\vee,\ldots,\omega_n^\vee$ sont les copoids fondamentaux de l'algèbre de Kac-Moody de type fini associée à $\hat{\mathfrak{g}}$ et $\rho^\vee$ est leur somme;

(ii) on connaît exactement les règles de commutation entre $E_{(m\delta,i)}$ et E_j, $E_{\delta-\alpha_j}$ ($j \in I_0$);

(iii) la formule de Levendorskii-Soibelman (cf. [18]) entraîne des bonnes propriétés de commutation, qu'on étudie au moyen d'une analyse de la relation d'ordre sur $\tilde{\Phi}_+$ relative à la base de PBW choisie.

On arrive ainsi à trouver une base de $\mathcal{U}_q^+$ et une base de $\mathcal{U}_q^-$ qui soient duales par rapport à la forme de Killing, et donc, grâce aux liens entre la R-matrice et la forme de Killing décrits dans [8], [25], [26], à donner une formule exponentielle explicite pour la R-matrice dans le cas affine non tordu, qui généralise celle connue dans le cas fini (et dans le cas $\widehat{sl(2)}$).

J'ai abordé ce problème d'après les conseils et les encouragements des Professeurs Corrado De Concini, Tetsuji Miwa, Nikolaj Reshetikhin et Marc Rosso, qui a aussi lu mon manuscrit, en me donnant plusieurs indications pour l'améliorer; je voudrais aussi remercier Georges Papadopoulo qui a corrigé mon français.

1. Définitions et préliminaires

Dans ce paragraphe on donne les définitions, les notations et les propriétés principales qui seront utilisées ensuite.

NOTATION 1. – Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie; on dénote:

1) $I_0 = \{1,\ldots,n\}$ l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin (pour l'identification entre I_0 et $\{1,\ldots,n\}$ voir [4]);
2) $o : I_0 \to \{\pm 1\}$ une fonction telle que $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow o(i)o(j) = -1$;
3) $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (engendrée par $\{h_1,\ldots,h_n\} = \{h_i | i \in I_0\}$);
4) $\Phi_0 = \Phi_{0,+} \cup (-\Phi_{0,+}) \subseteq \mathfrak{h}^*$ le système des racines (c'est-à-dire $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Phi_0} \mathfrak{g}_\alpha)$, et $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1\ \forall \alpha \in \Phi_0$), $\Phi_{0,+}$ l'ensemble des racines positives et $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} = \{\alpha_i | i \in I_0\}$ l'ensemble des racines simples;
5) $Q_0 = \sum_{\alpha\in\Phi_0} \mathbb{Z}\alpha = \oplus_{i\in I_0} \mathbb{Z}\alpha_i$ le réseau des racines;
6) $Q_0^\vee = \sum_{\alpha\in\Phi_0} \mathbb{Z}\alpha^\vee = \oplus_{i\in I_0} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ le réseau des co-racines et $P_0^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q_0, \mathbb{Z}) = \oplus_{i\in I_0} \mathbb{Z}\omega_i^\vee$ le réseau des co-poids ($Q_0^\vee \subseteq P_0^\vee$); $P_{0,+}^\vee = \sum_{i\in I_0} \mathbb{N}\omega_i^\vee$ est l'ensemble des co-poids dominants;
7) $\rho^\vee \doteqdot \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Phi_{0,+}} \alpha^\vee = \sum_{i\in I_0} \omega_i^\vee \in P_0^\vee$ ($2\rho^\vee \in Q_0^\vee$);

8) W_0 le groupe de Weyl.

NOTATION 2. – Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie; on dénote $\hat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Kac-Moody de type affine non tordue correspondant à $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}\partial$$

où $[\cdot, \cdot]$ est défini de la façon suivante:

(i) c est central, c'est-à-dire $[c, x] = 0 \ \forall x \in \hat{\mathfrak{g}}$;

(ii) $\mathrm{ad}\partial = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire $[\partial, x \otimes t^m] = mx \otimes t^m \ \forall x \in \mathfrak{g}, \forall m \in \mathbb{Z}$;

(iii) $[x \otimes t^r, y \otimes t^s] = [x, y] \otimes t^{r+s} + (x|y) r \delta_{r,-s} c \ \forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall r, s \in \mathbb{Z}$, où $(\cdot|\cdot)$ est la forme bilinéaire symétrique invariante non dégénérée de $\mathfrak{g}$ (correctement normalisée).

NOTATION 3. – Soient $\mathfrak{g}$ et $\hat{\mathfrak{g}}$ comme dans la notation 2; pour $\hat{\mathfrak{g}}$ on dénote:

1) $I = \{0, 1, ..., n\} \supset I_0$ l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin;

2) $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ la matrice de Cartan généralisée et $D = \mathrm{diag}(d_i | i \in I)$ la matrice diagonale à coefficients entiers positifs (et premiers entre eux) telle que DA soit symétrique ($d_0 = 1$);

3) $\hat{\mathfrak{h}} \doteqdot \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}\partial \subseteq \hat{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre de Cartan;

4) $\Phi = \Phi_+ \cup (-\Phi_+) \subseteq \hat{\mathfrak{h}}^*$ le système des racines, $\Phi_+ = \Phi_+^{\mathrm{re}} \cup \Phi_+^{\mathrm{im}}$ l'ensemble des racines positives, $\{\alpha_0, ..., \alpha_n\} = \{\alpha_i | i \in I\}$ l'ensemble des racines simples, $\Phi_+^{\mathrm{im}} = \{m\delta | m > 0\}$ l'ensemble des racines imaginaires positives où $\delta = \theta + \alpha_0$ et θ est la racine la plus haute de $\mathfrak{g}$, $\Phi_+^{\mathrm{re}} = \Phi_{0,+} \cup \{\alpha + m\delta | \alpha \in \Phi_0, m > 0\}$ l'ensemble des racines réelles positives; remarquons que

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi} \hat{\mathfrak{g}}_\alpha)$$

où $\dim_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha \in \Phi^{\mathrm{re}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \# I_0 & \text{if } \alpha \in \Phi^{\mathrm{im}} \end{cases}$: donc si on définit la multiplicité d'une racine α comme la dimension de l'espace propre associé à α on peut identifier l'ensemble $\tilde{\Phi}_+$ des « racines positives avec leurs multiplicités » à $\tilde{\Phi}_+ = \Phi_+^{\mathrm{re}} \cup (\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0)$; on appelle $p : \tilde{\Phi}_+ \to \Phi_+$ l'application naturelle;

5) $Q = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z}\alpha = \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i = Q_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_0 = Q_0 \oplus \mathbb{Z}\delta$ le réseau des racines, $\leq$ la relation d'ordre sur Q donnée par $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \in Q_+$ où $Q_+ = \sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i$;

6) $\forall \eta \in Q$

$$\mathrm{Par}(\eta) \doteqdot \left\{ \underline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_r) | r \geq 0, \ \gamma_u \in \tilde{\Phi}_+ \ \forall u = 1, ..., r, \ \sum_{u=1}^{r} p(\gamma_u) = \eta \right\} \Big/ \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par

$$(\gamma_1, ..., \gamma_r) \sim (\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_s) \Leftrightarrow r = s \ \text{ et } \ \exists \sigma \in \mathfrak{S}_r \ \text{ tel que } \ \tilde{\gamma}_u = \gamma_{\sigma(u)} \ \ \forall u = 1, ..., r;$$

de plus $\mathcal{P} \doteqdot \cup_{\eta \in Q_+} \mathrm{Par}(\eta)$; on remarque que équivalemment

$$\mathcal{P} = \{(\gamma_1, ..., \gamma_r) | r \in \mathbb{N}, \gamma_u \in \tilde{\Phi}_+ \ \ \forall u = 1, ..., r, \ \gamma_1 \preceq ... \preceq \gamma_r\}$$

où $\preceq$ est une relation d'ordre totale de $\tilde{\Phi}_+$: par la suite (cf. définition 2.4) on choisira une relation d'ordre totale bien déterminée de $\tilde{\Phi}_+$;

7) $(\cdot|\cdot)$ la forme bilinéaire symétrique invariante sur $\hat{\mathfrak{g}}$, correctement normalisée (on a que $(h_i|h_j) = \frac{a_{ij}}{d_j}$); on remarque que $(\cdot|\cdot)|_{\hat{\mathfrak{h}}}$ est non dégénérée, donc induit une identification entre $\hat{\mathfrak{h}}$ et $\hat{\mathfrak{h}}^*$, et une forme bilinéaire symetrique sur $\hat{\mathfrak{h}}^*$ (et sur Q), encore dénotée par $(\cdot|\cdot)$; on sait que la matrice de cette forme sur Q par rapport à la base $\{\alpha_i|i\in I\}$ est DA; on dénote alors par α_∞ l'élément de $\hat{\mathfrak{h}}^*$ tel que $(\alpha_\infty|Q\oplus\mathbb{Z}\alpha_\infty)=0$ et $(\alpha_\infty|\alpha_0)=1$, et par Q_∞ le réseau $Q_\infty \doteqdot Q\oplus\mathbb{Z}\alpha_\infty$;
8) $\mathcal{T}$ le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin;
9) $W = W_0 \ltimes Q_0^\vee$ le groupe de Weyl, $\tilde{W} = W_0 \ltimes P_0^\vee = W \rtimes \mathcal{T}$ le groupe de Weyl généralisé, $\{s_0,\dots,s_n\} = \{s_i|i\in I\} \subseteq W$ l'ensemble des réflexions simples de W: $s_1,\dots,s_n$ sont les réflexions simples de $W_0 \subseteq W_0 \ltimes Q_0^\vee$ et s_0 est l'élément de $W_0 \ltimes Q_0^\vee$ défini par $s_0 \doteqdot (s_\theta, -\theta^\vee)$; ici $\theta^\vee$ est la coracine relative à θ et s_θ est la réflexion orthogonale de direction θ, c'est-à-dire $s_\theta = ws_iw^{-1}$ où $w\in W_0$ et $i\in I_0$ sont tels que $\theta = w(\alpha_i)$; ça donne l'identification entre W et $W_0\ltimes Q_0^\vee$;
10) $l:\tilde{W}\to\mathbb{N}$ la fonction longueur, c'est-à-dire la fonction définie de la façon suivante:

$$l(w) \doteqdot \min\{m\in\mathbb{N}|\exists\tau\in\mathcal{T}, i_1,\dots,i_m\in I \text{ tels que } w = s_{i_1}\cdot\ldots\cdot s_{i_m}\tau\};$$

on remarque que la fonction longueur restreinte à W_0 est la fonction longueur de W_0;
11) $\mathcal{B}$ le groupe des tresses (engendré par $\{T_i|i\in I\}$), $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\rtimes\mathcal{T}$ le groupe des tresses généralisé, et $T:\tilde{W}\to\tilde{\mathcal{B}}$ la section telle que $T_w = T_{i_1}\cdot\ldots\cdot T_{i_r}$ si $w = s_{i_1}\cdot\ldots\cdot s_{i_r}$ et $l(w)=r$ ($\mathcal{B}$ est le groupe des tresses associé à W).

REMARQUE 4. – W agit sur Q_∞ (et sur Φ), et $(\cdot|\cdot)$ est W-invariante;

DÉFINITION 5. – Soit $\hat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Kac-Moody de type affine non tordu associée à $\mathfrak{g}$; on dénote par $\mathcal{U}_q = \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ l'algèbre quantique de $\hat{\mathfrak{g}}$ (engendrée par l'ensemble

$$\{E_i, F_i, K_i^{\pm1}, D^{\pm1}|i\in I\}$$

sur $\mathbb{C}(q)$) avec les relations suivantes:

$$K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu} \quad \forall\lambda,\mu\in Q_\infty,$$

$$K_\lambda E_i = q^{(\lambda|\alpha_i)}E_iK_\lambda \quad \forall\lambda\in Q_\infty, \forall i\in I,$$

$$K_\lambda F_i = q^{-(\lambda|\alpha_i)}F_iK_\lambda \quad \forall\lambda\in Q_\infty, \forall i\in I,$$

$$[E_i,F_j] = \delta_{ij}\frac{K_i-K_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}} \quad \forall i,j\in I$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}}\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ r\end{bmatrix}_{q_i} E_i^rE_jE_i^{1-a_{ij}-r} = 0 = \sum_{r=0}^{1-a_{ij}}\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ r\end{bmatrix}_{q_i} F_i^rF_jF_i^{1-a_{ij}-r} \quad \forall i\neq j\in I,$$

où on pose

(i) $K_\infty \doteqdot D$;
(ii) $K_\lambda \doteqdot K_0^{m_0}\cdot\ldots\cdot K_n^{m_n}D^{m_\infty}$ si $\lambda = \sum_{i\in I\cup\{\infty\}} m_i\alpha_i\in Q_\infty$;
(iii) $q_\alpha \doteqdot q^{\frac{(\alpha|\alpha)}{2}}$ $\forall\alpha\in\Phi^{\mathrm{re}}$, $q_i \doteqdot q_{\alpha_i}$ $\forall i\in I$, $q_{(m\delta,i)} \doteqdot q_i$ $\forall m>0, \forall i\in I$;

(iv) $[m]_{q^r} \doteqdot \dfrac{q^{rm} - q^{-rm}}{q^r - q^{-r}} \quad \forall m, r \in \mathbb{Z}$,

$$(m)_\alpha \doteqdot \begin{cases} \dfrac{q_\alpha^{2m} - 1}{q_\alpha^2 - 1} & \text{si } \alpha \in \Phi_+^{\mathrm{re}} \\ m & \text{si } \alpha \in \Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

$\forall m \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \tilde{\Phi}_+ \ [m]_{q^r}! \doteqdot \prod_{s=1}^m [s]_{q^r}, \ (m)_\alpha! \doteqdot \prod_{s=1}^m (s)_\alpha$;

v) $\forall \alpha \in \tilde{\Phi}_+, \ \forall x \in \mathcal{U}_q$

$$\exp_\alpha(x) \doteqdot \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{(m)_\alpha!}.$$

REMARQUE 6. – On rappelle qu'on a les structures suivantes attachées à $\mathcal{U}_q$:

1) une Q-graduation $\mathcal{U}_q = \oplus_{\eta \in Q} \mathcal{U}_{q,\eta}$ où $E_i \in \mathcal{U}_{q,\alpha_i}$, $F_i \in \mathcal{U}_{q,-\alpha_i}$, $K_i^{\pm 1} \in \mathcal{U}_{q,0}$ $\forall i \in I$, $D^{\pm 1} \in \mathcal{U}_{q,0}$;
2) une décomposition triangulaire de $\mathcal{U}_q$: $\mathcal{U}_q \cong \mathcal{U}_q^- \otimes \mathcal{U}_q^0 \otimes \mathcal{U}_q^+ \cong \mathcal{U}_q^+ \otimes \mathcal{U}_q^0 \otimes \mathcal{U}_q^-$, où $\mathcal{U}_q^-, \mathcal{U}_q^0$ et $\mathcal{U}_q^+$ sont les sous-algèbres de $\mathcal{U}_q$ engendrées respectivement par $\{E_i | i \in I\}$, $\{K_i^{\pm 1}, D^{\pm 1} | i \in I\}$ et $\{F_i | i \in I\}$;
3) une anti-involution anti-linéaire $\Omega : \mathcal{U}_q \to \mathcal{U}_q$ définie par

$$\Omega(E_i) \doteqdot F_i, \quad \Omega(F_i) \doteqdot E_i, \quad \Omega(K_i) \doteqdot K_i^{-1}, \quad \Omega(D) \doteqdot D^{-1}, \quad \Omega(q) \doteqdot q^{-1};$$

4) une action du groupe des tresses commutant à Ω et telle que $T_i(K_\lambda) = K_{s_i(\lambda)}$, $T_i(E_i) = -F_i K_i$ et $T_i(E_j) \in \mathcal{U}^+_{q, s_i(\alpha_j)}$ $\forall i \in I$, $\forall j \in I \setminus \{i\}$, $\forall \lambda \in Q_\infty$;
5) une structure de Hopf (Δ, ϵ, S), dont le coproduit $\Delta : \mathcal{U}_q \to \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q$ est donné par

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i,$$

$$\Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1},$$

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i;$$

remarquons que $\Delta \circ \Omega = (\Omega \otimes \Omega) \circ \sigma \circ \Delta$ où $\sigma : \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q \to \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q$ est défini par $\sigma(x \otimes y) \doteqdot y \otimes x$;
6) la forme de Killing, c'est-à-dire l'unique forme bilinéaire $(\cdot,\cdot) : \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^{\leq 0} \to \mathbb{C}(q)$ telle que
   (i) $(x, y_1 y_2) = (\Delta(x), y_1 \otimes y_2)$ $\forall x \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}$, $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{U}_q^{\leq 0}$;
   (ii) $(x_1 x_2, y) = (x_2 \otimes x_1, \Delta(y))$ $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}$, $\forall y \in \mathcal{U}_q^{\leq 0}$;
   (iii) $(K_\lambda, K_\mu) = q^{-(\lambda,\mu)}$ $\forall \lambda, \mu \in Q_\infty$;
   (iv) $(K_\lambda, F_i) = 0 = (E_i, K_\lambda)$ $\forall i \in I$, $\forall \lambda \in Q_\infty$;
   (v) $(E_i, F_j) = \dfrac{\delta_{ij}}{q_i^{-1} - q_i}$ $\forall i, j \in I$;

remarquons que $(\cdot,\cdot)$ a les propriétés suivantes:

a) $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{U}_{q,\eta}^{\geq 0} \times \mathcal{U}_{q,-\tilde{\eta}}^{\leq 0}} = 0$ si $\eta \neq \tilde{\eta}$;
b) $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{U}_{q,\eta}^{+} \times \mathcal{U}_{q,-\eta}^{-}}$ est non dégénérée $\forall \eta \in Q_+$;
c) $(x K_\lambda, y) = (x, y) = (x, y K_\lambda)$ $\forall x \in \mathcal{U}_q^+$, $\forall y \in \mathcal{U}_q^-$, $\forall \lambda \in Q_\infty$.

2. PBW-bases

On introduit maintenant des vecteurs associés aux racines réelles et une base de type Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathcal{U}_q$ et on en décrit brièvement quelques propriétés fondamentales.

NOTATION 1. – Soit $N \doteqdot l(2\rho\check{})$ et soit $i : \{1, ..., 2mn\} \to I_0$ $(m > 0)$ tel que

$$\forall j \in I_0 \quad \#\{u \in \{1, ..., 2mn\} | i_u = j\} = 2m$$

(c'est-à-dire, $\sum_{u=1}^{2mn} \omega\check{}_{i_u} = 2m\rho\check{}$); on dénote par $\iota : \mathbb{Z} \to I$ une suite cyclique de période mN telle que $\forall u = 1, ..., 2mn$ $\exists \tau_u \in \mathcal{T}$ tel que

$$s_{\iota(1)} \cdot ... \cdot s_{\iota(l_u)}\tau_u = \omega\check{}_{i_1} \cdot ... \cdot \omega\check{}_{i_u} \quad \text{avec} \quad l_u = \sum_{v=1}^{u} l(\omega\check{}_{i_v}).$$

On remarque qu'une telle suite ι existe, car $l|_{P\check{}_{0,+}}$ est une fonction additive (cf. [1], [2], [3]).

DÉFINITION 2. – Soit ι comme décrite dans la notation 1; on pose alors, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\beta_k (= \beta_k^{(\iota)}) \doteqdot \begin{cases} s_{\iota(1)} \cdot ... \cdot s_{\iota(k-1)}(\alpha_{\iota(k)}) & \text{si} \quad k \geq 1 \\ s_{\iota(0)} \cdot ... \cdot s_{\iota(k+1)}(\alpha_{\iota(k)}) & \text{si} \quad k \leq 0. \end{cases}$$

Pour la proposition suivante voir [2]:

PROPOSITION 3. – *Les β_k vérifient les propriétés suivantes:*

1) *$k \mapsto \beta_k$ définit une bijection de $\mathbb{Z}$ sur Φ_+^{re};*

2) $\{\beta_k | k \geq 1\} = \{r\delta - \alpha | r > 0, \alpha \in \Phi_{0,+}\}$ *et* $\{\beta_k | k \leq 0\} = \{r\delta + \alpha | r \geq 0, \alpha \in \Phi_{0,+}\}$. □

DÉFINITION 4. – On définit la relation d'ordre sur $\tilde{\Phi}_+$ (notée $\preceq$) par

1) $\beta_k \preceq \beta_l$ si et seulement si: soit $1 \leq k \leq l$, soit $k \leq l \leq 0$, soit $k \geq 1 > l$;

2) $\beta_k \preceq \alpha \preceq \beta_l$ $\forall \alpha \in \Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0$, $\forall k > 0 \geq l$;

3) $(r\delta, i) \preceq (s\delta, j)$ si et seulement si: soit $r > s$ soit $r = s$ et $i \leq j$.

Par abus de notation, on note aussi $\preceq$ la relation d'ordre lexicographique qu'on en déduit sur $\mathcal{P}$ de la façon suivante: $(\gamma_1, ..., \gamma_r) \preceq (\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_s)$ si et seulement si: soit $\exists k \leq \min\{r, s\}$ tel que $\gamma_{\sigma(u)} = \tilde{\gamma}_{\tau(u)}$ $\forall u < k$ et $\gamma_{\sigma(k)} \prec \tilde{\gamma}_{\tau(k)}$, soit $r \leq s$ et $\gamma_{\sigma(u)} = \tilde{\gamma}_{\tau(u)}$ $\forall u \leq r$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ et $\tau \in \mathfrak{S}_s$ sont tels que $\gamma_{\sigma(1)} \preceq ... \preceq \gamma_{\sigma(r)}$ et $\tilde{\gamma}_{\tau(1)} \preceq ... \preceq \tilde{\gamma}_{\tau(s)}$.

On écrit aussi $\alpha \prec \beta$ si $\alpha \preceq \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

REMARQUE 5. – La relation d'ordre $\preceq$ est « presque convexe », c'est-à-dire que si $\alpha, \gamma_1 \preceq ... \preceq \gamma_r \in \tilde{\Phi}_+$ et $p(\alpha) = \sum_{u=1}^{r} p(\gamma_u)$ $(r > 1)$ alors ou bien $\alpha, \gamma_1, ..., \gamma_r$ appartiennent toutes à $\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0$ ou bien $\gamma_1 \prec \alpha \prec \gamma_r$.

REMARQUE 6. – Notons par $\preceq'$ soit la relation d'ordre sur $\tilde{\Phi}_+$ donnée par

$$\preceq' |_{(\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0) \times (\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0)} \doteqdot \preceq |_{(\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0) \times (\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0)}$$

et

$$\preceq' |_{\tilde{\Phi}_+ \setminus ((\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0) \times (\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0))} \doteqdot \succeq |_{\tilde{\Phi}_+ \setminus ((\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0) \times (\Phi_+^{\mathrm{im}} \times I_0))}$$

soit, par abus de notation, la relation d'ordre lexicographique associée sur $\mathcal{P}$; la relation d'ordre $\preceq'$ est alors encore « presque convexe ».

DÉFINITION 7. – Soit ι comme décrite dans la notation 1; on définit alors les vecteurs relatifs aux racines positives (avec multiplicité) de la façon suivante:

$$E_{\beta_k}(=E^{(\iota)}_{\beta_k}) \doteq \begin{cases} T_{\iota(1)}\cdot\ldots\cdot T_{\iota(k-1)}(E_{\iota(k)}) & \text{si } k\geq 1 \\ T^{-1}_{\iota(0)}\cdot\ldots\cdot T^{-1}_{\iota(k+1)}(E_{\iota(k)}) & \text{si } k\leq 0; \end{cases}$$

$$\tilde{E}_{(r\delta,i)}(=\tilde{E}^{(\iota)}_{(r\delta,i)}) \doteq -E_{r\delta-\alpha_i}E_i + q_i^{-2}E_iE_{r\delta-\alpha_i} \quad \forall r>0, i\in I_0,$$

$$\exp\Big((q_i-q_i^{-1})\sum_{r>0}E_{(r\delta,i)}u^r\Big) \doteq 1-(q_i-q_i^{-1})\sum_{r>0}\tilde{E}_{(r\delta,i)}u^r \quad \forall i\in I_0,$$

$$F_\alpha \doteq \Omega(E_\alpha) \quad \forall\alpha\in\tilde{\Phi}_+, \quad \tilde{F}_{(r\delta,i)} \doteq \Omega(\tilde{E}_{(r\delta,i)}).$$

DÉFINITION 8. – Supposons donné, $\forall\alpha\in\tilde{\Phi}_+$, un élément $x_\alpha\in\mathcal{U}_q$; on définit alors $\forall\underline{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\in\mathcal{P}$

$$x(\underline{\gamma}) \doteq x_{\gamma_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot x_{\gamma_{\sigma(r)}}, \quad x(-\underline{\gamma}) \doteq x_{\gamma_{\sigma(r)}}\cdot\ldots\cdot x_{\gamma_{\sigma(1)}}$$

où $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ est tel que $\gamma_{\sigma(1)}\preceq\ldots\preceq\gamma_{\sigma(r)}$.

On rappelle ici le théorème suivant, donnant une base de type PBW pour $\mathcal{U}_q$ (cf. [2]):

THÉORÈME 9. – *Les ensembles*

$$\{E(\underline{\gamma})|\underline{\gamma}\in\mathcal{P}\} \quad \textit{et} \quad \{E(-\underline{\gamma})|\underline{\gamma}\in\mathcal{P}\}$$

sont deux bases de $\mathcal{U}_q^+$ indexées par $\mathcal{P}$. De plus, si $\mathcal{U}_{\mathbb{C}[q,q^{-1}]}$ est la $\mathbb{C}[q,q^{-1}]$-sous-algèbre de $\mathcal{U}_q$ engendrée par

$$\left\{E_\alpha, F_\alpha, \frac{D-D^{-1}}{q-q^{-1}}, \frac{K_i-K_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}} | \alpha\in\tilde{\Phi}_+, i\in I\right\},$$

on a

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+2} \hookrightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{C}[q,q^{-1}]}/(q-1)\mathcal{U}_{\mathbb{C}[q,q^{-1}]} \twoheadrightarrow \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$$

($\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ est l'algèbre enveloppante de $\hat{\mathfrak{g}}$), où pour chaque $\alpha\in\tilde{\Phi}_+$ on a $E_\alpha\mapsto\pm e_\alpha$, $F_\alpha\mapsto\pm f_\alpha$, avec

$$(e_\alpha,f_\alpha) = \begin{cases} (e_\beta\otimes t^m, f_\beta\otimes t^{-m}) & \textit{si } \alpha=m\delta+\beta \ (\beta\in\Phi_{0,+}, m\geq 0) \\ (f_\beta\otimes t^m, e_\beta\otimes t^{-m}) & \textit{si } \alpha=m\delta-\beta \ (\beta\in\Phi_{0,+}, m>0). \end{cases}$$

□

On rappelle aussi la formule de Levendorskii-Soibelman (cf. [2], [18]) qui décrit des bonnes propriétés de commutation pour ces bases:

THÉORÈME 10. – $\forall\underline{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\in\mathcal{P}$, $\forall\alpha\in\tilde{\Phi}_+$,

$$E(\underline{\gamma})E_\alpha - q^{-r(\underline{\gamma};\alpha)}E_\alpha E(\underline{\gamma}) = \sum_{\substack{\underline{\tilde{\gamma}}: \\ (\underline{\gamma},\alpha)\prec\underline{\tilde{\gamma}}\succ'(\underline{\gamma},\alpha)}} a_{\underline{\tilde{\gamma}}}E(\underline{\tilde{\gamma}})$$

et

$$E(-\underline{\gamma})E_\alpha - q^{-r(\underline{\gamma};\alpha)}E_\alpha E(-\underline{\gamma}) = \sum_{\substack{\underline{\tilde{\gamma}}: \\ (\underline{\gamma},\alpha)\prec\underline{\tilde{\gamma}}\succ'(\underline{\gamma},\alpha)}} b_{\underline{\tilde{\gamma}}} E(-\underline{\tilde{\gamma}})$$

où

$$r(\underline{\gamma};\alpha) \doteqdot \sum_{\gamma_i\succ\alpha}(p(\gamma_i)|p(\alpha)) - \sum_{\gamma_i\prec\alpha}(p(\gamma_i)|p(\alpha)).$$

□

Enfin on rappelle le résultat suivant (cf. [1], [4]):

PROPOSITION 11. – *$\forall r\in\mathbb{N}$ $\forall i\in I_0$ $E_{r\delta+\alpha_i} = T_{\omega_i^\vee}^{-r}(E_i)$ et $E_{(r+1)\delta-\alpha_i} = T_{\omega_i^\vee}^{r+1}T_i^{-1}(E_i)$ (en particulier, $E_{r\delta+\alpha_i}$, $E_{(r+1)\delta-\alpha_i}$ et $E_{((r+1)\delta,i)}$ ne dépendent pas de ι); de plus $\forall r,s>0$ $\forall i,j\in I_0$*

$$T_{\omega_i^\vee}(E_{(r\delta,j)}) = E_{(r\delta,j)},$$

$$[E_{(r\delta,i)},E_{s\delta\pm\alpha_j}] = \pm(o(i)o(j))^r\frac{[ra_{ij}]_{q_i}}{r}E_{(r+s)\delta\pm\alpha_j},$$

$$[E_{(r\delta,i)},F_{(s\delta,j)}] = \delta_{r,s}(o(i)o(j))^r\frac{[ra_{ij}]_{q_i}}{r}\frac{K_{r\delta}-K_{r\delta}^{-1}}{q_j-q_j^{-1}}.$$

□

On conclut ce paragraphe en introduisant les définitions suivantes:

DÉFINITION 12. – On définit les sous-ensembles suivants de $\tilde{\Phi}_+$:

$$\Phi_+(k) \doteqdot \begin{cases} \{\beta_r|1\le r<k\} & \text{si } k\ge 1 \\ \{\beta_r|0\ge r>k\} & \text{si } k\le 0; \end{cases}$$

$$\Phi_+(\infty)\doteqdot\{\beta_r|r\ge 1\},\quad \Phi_+(-\infty)\doteqdot\{\beta_r|r\le 0\},$$

$$\Phi_+(\mathrm{im})\doteqdot\Phi_+^{\mathrm{im}}\times I_0,$$

$$\Phi_+(\tilde{\infty})\doteqdot\Phi_+(\infty)\cup\Phi_+(\mathrm{im}),\quad \Phi_+(-\tilde{\infty})\doteqdot\Phi_+(-\infty)\cup\Phi_+(\mathrm{im}).$$

DÉFINITION 13. – Soit $*\in\mathbb{Z}\cup\{\pm\infty,\pm\tilde{\infty},\mathrm{im}\}$; on définit alors $\mathcal{U}_q^+(*)$ comme la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q$ engendrée par $\{E_\alpha|\alpha\in\Phi_+(*)\}$.

On définit aussi $\mathcal{U}_q^{\ge 0}(*)\doteqdot\mathcal{U}_q^+(*)\mathcal{U}_q^0$, $\mathcal{U}_q^-(*)\doteqdot\Omega(\mathcal{U}_q^+(*))$, $\mathcal{U}_q^{\le 0}(*)\doteqdot\Omega(\mathcal{U}_q^{\ge 0}(*))$.

REMARQUE 14. – La formule de Levendorskii-Soibelman implique que

$$\forall *\in\mathbb{Z}\cup\{\pm\infty,\pm\tilde{\infty},\mathrm{im}\}$$

$$\{E(\underline{\gamma})|\gamma_u\in\Phi_+(*)\ \forall u=1,...,r\}\quad\text{et}\quad\{E(-\underline{\gamma})|\gamma_u\in\Phi_+(*)\ \forall u=1,...,r\}$$

sont deux bases de $\mathcal{U}_q^+(*)$ (où on a posé $\underline{\gamma}=(\gamma_1,...,\gamma_r)$). □

3. La R-matrice: résultats généraux

On introduit maintenant la R-matrice et on donne les résultats généraux, que l'on utilisera par la suite pour le calcul explicite de $R_{\hat{\mathfrak{g}}}$.

DÉFINITION 1. – Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf dont le coproduit est dénoté par Δ; un élément $R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est dit une R-matrice pour $\mathcal{A}$ si

$$(*) \quad \begin{cases} \text{a)} \ R \text{ est inversible,} \\ \text{b)} \ R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \\ \text{c)} \ R\Delta(a) = \Delta'(a)R \quad \forall a \in \mathcal{A}, \end{cases}$$

où $R_{12} \doteqdot R \otimes 1$, $R_{23} \doteqdot 1 \otimes R$, $R_{13} \doteqdot (1 \otimes \sigma)(R \otimes 1)$ sont dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, et $\Delta' \doteqdot \sigma \circ \Delta$ ($\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$).

REMARQUE 2. – Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf avec coproduit Δ; si U et V sont deux $\mathcal{A}$-modules la structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{A}$ induit d'une façon naturelle une structure de $\mathcal{A}$-module sur $U \otimes V$, et on a, grâce à la coassociativité de Δ, que $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$ pour U, V, W $\mathcal{A}$-modules.

En général, ce n'est pas vrai que $U \otimes V \cong V \otimes U$; mais s'il existe une R-matrice pour $\mathcal{A}$, elle fournit un isomorphisme $\sigma_{U,V} \circ R : U \otimes V \to V \otimes U$ pour chaque pair de $\mathcal{U}$-modules U et V (ici $\sigma_{U,V}$ est défini par $\sigma_{U,V}(u \otimes v) \doteqdot v \otimes u$).

On remarque encore que pour obtenir un isomorphisme entre $U \otimes V$ et $V \otimes U$ il n'est pas nécessaire d'avoir un élément $R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$: en fait on n'a utilisé que le fait d'avoir (induit par R) un endomorphisme linéaire de $U \otimes V$.

Les considérations précédentes suggèrent une définition légèrement plus générale de R-matrice:

DÉFINITION 3. – Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf, Δ son coproduit et $\mathcal{O}$ une catégorie de $\mathcal{A}$-modules; on appelle R-matrice de $\mathcal{A}$ (relative à la catégorie $\mathcal{O}$) une rule R qui associe à chaque pair (U, V) d'objets de $\mathcal{O}$ un endomorphisme $R^{U,V}$ de $U \otimes V$ satisfaisant $(*)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \text{a)} \ R^{U,V} \text{ est inversible,} \\ \text{b)} \ R_{12}^{U,V,W}R_{13}^{U,V,W}R_{23}^{U,V,W} = R_{23}^{U,V,W}R_{13}^{U,V,W}R_{12}^{U,V,W}, \\ \text{c)} \ R^{U,V}\Delta(a) = \Delta'(a)R^{U,V} \quad \forall a \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Ici $R_{12}^{U,V,W}$ dénote $R^{U,V} \otimes \mathrm{id}_W$, $R_{23}^{U,V,W}$ dénote $\mathrm{id}_U \otimes R^{V,W}$ et $R_{13}^{U,V,W}$ dénote $(\mathrm{id}_U \otimes \sigma_{W,V})(R^{U,W} \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes \sigma_{V,W})$, où U, V, W sont objets de $\mathcal{O}$. On a alors que $\sigma_{U,V} \circ R^{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$-modules $\forall U, V$.

On revient maintenant à l'étude des algèbres quantiques. Dans ce contexte on a le résultat suivant (cf. [8], [25], [26]):

THÉORÈME 4. – *$\forall \eta \in Q_+$ soit $C_\eta \in \mathcal{U}_{q,\eta}^+ \otimes \mathcal{U}_{q,-\eta}^-$ l'élément canonique de la forme de Killing $(\cdot,\cdot)$; de plus soit $t_\infty \in \hat{\mathfrak{h}} \otimes \hat{\mathfrak{h}}$ l'élément canonique de $(\cdot|\cdot)$; alors, si on pose*

$$R \doteqdot \Big(\sum_{\eta \in Q_+} C_\eta \Big) q^{-t_\infty}$$

on a que R est une R-matrice pour $\mathcal{U}_q$. □

REMARQUE 5. – Puisque $\sum_{\eta\in Q_+} C_\eta$ est une « somme infinie », R (comme définie dans le théorème 4) n'est pas un élément de $\mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q$; il faut donc donner une catégorie de $\mathcal{U}_q$-modules $\mathcal{O}$ où R définit un endomorphisme de $U \otimes V$ pour chaque pair d'objets de $\mathcal{O}$, pour qu'il ait un sens.

Dans ce but, on remarque que la définition même de C_η implique que si $\mathcal{O}$ est la catégorie des $\mathcal{U}_q$-modules sur lesquels tous les E_i agissent d'une façon localement nilpotente, alors $\sum_{\eta\in Q_+} C_\eta$ dénote un bien défini endomorphisme de $U \otimes V$ pour tous U, V objets de $\mathcal{O}$.

Or, si U est un objet de $\mathcal{O}$, on a en particulier que U est Q_∞-gradué; on définit alors $q^{-t_\infty} : U \otimes V \to U \otimes V$ (U, V objets de $\mathcal{O}$) par

$$q^{-t_\infty}|_{U_\eta \otimes V_\theta} \doteqdot q^{-(\eta|\theta)} \mathrm{id}_{U_\eta \otimes V_\theta}.$$

On ne considerera dorénavant que $\mathcal{U}_q$-modules qui vivent dans la catégorie $\mathcal{O}$, et on applique les même considérations de cette remarque à toutes les sommes infinies qui apparaîtront par la suite.

Le problème de trouver la R-matrice pour $\mathcal{U}_q$ est ainsi ramené à l'étude de la forme de Killing.

4. Les racines réelles

Maintenant on a les ingrédients principaux pour aborder le calcul de la R-matrice: on se propose de décrire C_η (cf. théorème 3.4), c'est-à-dire de trouver deux bases de $\mathcal{U}_q^+$ et $\mathcal{U}_q^-$ qui soient duales par rapport à $(\cdot,\cdot)$.

L'idée est de réussir à contrôler $\Delta(E_\alpha)$ et d'utiliser le lien entre la forme de Killing et le coproduit.

On commence donc en décrivant le comportement des racines réelles, qui est exactement le même que celui que Levendorskii et Soibelman ont décrit dans le cas fini; on renvoie à [18], [5] pour les démonstrations.

DÉFINITION 1. – Soit $i \in I$; on pose

$$\tilde{R}_i \doteqdot \sum_{n\geq 0} \frac{(q_i^{-1} - q_i)^n q_i^{-\frac{n(5n-1)}{2}}}{[n]_{q_i}!} E_i^n K_i^{-n} \otimes F_i^n K_i^n$$

et

$$\bar{R}_i \doteqdot \sum_{n\geq 0} \frac{(q_i - q_i^{-1})^n q_i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_{q_i}!} F_i^n \otimes E_i^n.$$

LEMME 2. – *Pour tout V, W dans $\mathcal{O}$ et pour tout $i \in I$, $\tilde{R}_i$ et $\bar{R}_i$ induisent des opérateurs bien définis sur $V \otimes W$; $\tilde{R}_i$ et $\bar{R}_i$ sont inversibles et on a*

$$\tilde{R}_i^{-1} \doteqdot \sum_{n\geq 0} \frac{(q_i - q_i^{-1})^n q_i^{-\frac{n(3n+1)}{2}}}{[n]_{q_i}!} E_i^n K_i^{-n} \otimes F_i^n K_i^n$$

et

$$\bar{R}_i^{-1} \doteqdot \sum_{n\geq 0} \frac{(q_i^{-1} - q_i)^n q_i^{\frac{-n(n-1)}{2}}}{[n]_{q_i}!} F_i^n \otimes E_i^n;$$

de plus

$$\bar{R}_i = (T_i^{-1} \otimes T_i^{-1})(\tilde{R}_i^{-1});$$

enfin

$$\Delta(T_i(x)) = \tilde{R}_i^{-1} \cdot (T_i \otimes T_i)(\Delta(x)) \cdot \tilde{R}_i \quad \forall x \in \mathcal{U}_q$$

et

$$\Delta(T_i^{-1}(x)) = \bar{R}_i^{-1} \cdot (T_i^{-1} \otimes T_i^{-1})(\Delta(x)) \cdot \bar{R}_i \quad \forall x \in \mathcal{U}_q.$$

□

DÉFINITION 3. – Soit ι comme dans 2.1 et soit $k \in \mathbb{Z}$; on définit alors des R-matrices partielles comme suit:

$$\tilde{R}(k) \doteqdot \begin{cases} \tilde{R}_{\iota(1)} & \text{si } k = 1 \\ T_{w_{k-1}}(\tilde{R}_{\iota(k)})\tilde{R}(k-1) & \text{si } k > 1 \\ \bar{R}_{\iota(0)} & \text{si } k = 0 \\ T^{-1}_{w^{-1}_{k+1}}(\bar{R}_{\iota(k)})\tilde{R}(k+1) & \text{si } k < 0, \end{cases}$$

où $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$w_k \doteqdot \begin{cases} s_{\iota(1)} \cdot \ldots \cdot s_{\iota(k)} & \text{si } k \geq 1 \\ s_{\iota(0)} \cdot \ldots \cdot s_{\iota(k)} & \text{si } k \leq 0. \end{cases}$$

On a alors le théorème suivant, qui résoud le cas des racines réelles:

THÉORÈME 4.

1) *On a le lien suivant entre le coproduit, l'action du groupe des tresses et les R-matrices partielles:* $\forall x \in \mathcal{U}_q$

$$\Delta(T_{w_k}(x)) = \tilde{R}(k)^{-1} \cdot (T_{w_k} \otimes T_{w_k})(\Delta(x)) \cdot \tilde{R}(k) \quad \text{si } k \geq 1,$$

$$\Delta(T^{-1}_{w_k^{-1}}(x)) = \tilde{R}(k)^{-1} \cdot (T^{-1}_{w_k^{-1}} \otimes T^{-1}_{w_k^{-1}})(\Delta(x)) \cdot \tilde{R}(k) \quad \text{si } k \leq 0;$$

2) *les R-matrices partielles ont la propriété suivante: soit $k \in \mathbb{Z}$; alors*

$$\tilde{R}(k) = \sum_u l_u^{(k)} \otimes l_u'^{(k)} \quad \text{et} \quad \tilde{R}(k)^{-1} = \sum_u m_u^{(k)} \otimes m_u'^{(k)}$$

où $l_u^{(k)} K_{\gamma_u} \otimes l_u'^{(k)} K_{\gamma_u}^{-1},\ m_u^{(k)} K_{\gamma_u} \otimes m_u'^{(k)} K_{\gamma_u}^{-1} \in \mathcal{U}^+_{q,\gamma_u}(k+1) \otimes \mathcal{U}^-_{q,-\gamma_u}(k+1)$ *pour quelque* $\gamma_u \in Q_+$ *si* $k \geq 1$, *et* $l_u^{(k)} \otimes l_u'^{(k)},\ m_u^{(k)} \otimes m_u'^{(k)} \in \mathcal{U}_q^-(k-1) \otimes \mathcal{U}_q^+(k-1)$ *si* $k \leq 0$;

3) *on a la propriété suivante pour le coproduit des vecteurs relatifs aux racines réelles:*

$$\Delta(E_{\beta_k}) - (E_{\beta_k} \otimes 1 + K_{\beta_k} \otimes E_{\beta_k}) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(k) \otimes \mathcal{U}_q^+ \quad \textit{et}$$

$$\Delta(F_{\beta_k}) - (1 \otimes F_{\beta_k} + F_{\beta_k} \otimes K_{\beta_k}^{-1}) \in \mathcal{U}_q^- \otimes \mathcal{U}_q^{\leq 0}(k) \quad \textit{si } k \geq 1$$

$$\Delta(E_{\beta_k}) - (E_{\beta_k} \otimes 1 + K_{\beta_k} \otimes E_{\beta_k}) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+(k) \quad \textit{et}$$

$$\Delta(F_{\beta_k}) - (1 \otimes F_{\beta_k} + F_{\beta_k} \otimes K_{\beta_k}^{-1}) \in \mathcal{U}_q^-(k) \otimes \mathcal{U}_q^{\leq 0} \quad \textit{si } k \leq 0;$$

4) *si* $\underline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_r), \underline{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_s) \in \mathcal{P}$ *sont tels que*

$$\{\gamma_u, \tilde{\gamma}_v | 1 \leq u \leq r, 1 \leq v \leq s\} \subseteq \Phi_+(\infty)$$

ou bien

$$\{\gamma_u, \tilde{\gamma}_v | 1 \leq u \leq r, 1 \leq v \leq s\} \subseteq \Phi_+(-\infty),$$

on a

$$(E(-\underline{\gamma}), F(-\underline{\tilde{\gamma}})) \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\gamma} = \underline{\tilde{\gamma}};$$

5) *si* $\underline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_r) \in \mathcal{P}$ *est tel que*

$$\{\gamma_u | 1 \leq u \leq r\} \subseteq \Phi_+(\infty) \text{ ou bien } \{\gamma_u | 1 \leq u \leq r\} \subseteq \Phi_+(-\infty)$$

on a

$$(E(-\underline{\gamma}), F(-\underline{\gamma})) = \prod_{\alpha \in \tilde{\Phi}_+} \frac{(\mu^\alpha_{\underline{\gamma}})_\alpha!}{(q_\alpha^{-1} - q_\alpha)^{\mu^\alpha_{\underline{\gamma}}}}.$$

□

5. Premier contrôle de l'action du coproduit sur $\mathcal{U}^+_{q,\mathrm{im}}$

On aborde maintenant l'étude des vecteurs relatifs aux racines imaginaires: comme ils ne sont pas définis au moyen de l'action du groupe des tresses, les techniques utilisées par Levendorskii et Soibelman afin d'obtenir un contrôle du coproduit ne s'appliquent pas dans le cas de ces racines; mais ce qu'on connaît de ces vecteurs et de leurs relations avec le groupe des tresses et les vecteurs relatifs aux racines réelles est suffisant pour pouvoir en déduire des premières propriétés.

LEMME 1. – *La définition de* E_{β_k} *entraîne immédiatement que*

$$T_{2\rho^\cdot}(E_{\beta_k}) = E_{\beta_{k+N}} \text{ si } k \geq 1 \text{ et } T_{2\rho^\cdot}^{-1}(E_{\beta_k}) = E_{\beta_{k-N}} \text{ si } k \leq 0;$$

de plus, si $k \geq 1$ $\exists m > 0$ *tel que*

$$T_{2\rho^\cdot}^{-m}(E_{\beta_k}) \in \mathcal{U}_q^{\leq 0} \quad (\text{et } T_{2\rho^\cdot}^{-\tilde{m}}(E_{\beta_k}) \in \mathcal{U}_q^{\leq 0} \ \ \forall \tilde{m} \geq m)$$

et si $k \leq 0$ $\exists m > 0$ *tel que*

$$T_{2\rho^\cdot}^{m}(E_{\beta_k}) \in \mathcal{U}_q^{\leq 0} \quad (\text{et } T_{2\rho^\cdot}^{\tilde{m}}(E_{\beta_k}) \in \mathcal{U}_q^{\leq 0} \ \ \forall \tilde{m} \geq m).$$

PROPOSITION 2. – $x \in \mathcal{U}_q^+(\mathrm{im}) \Rightarrow \Delta(x) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\tilde{\infty}) \otimes \mathcal{U}_q^+(-\tilde{\infty})$.

Preuve. – Comme $x \in \mathcal{U}_q^+(\mathrm{im})$ on sait que $T_{\omega_i^\cdot}(x) = x$ $\forall i \in I_0$ (cf. proposition 11); en particulier, on a alors $T_{2\rho^\cdot}(x) = x$.

Le lemme 1 entraîne que si $\Delta(x) \notin \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\tilde{\infty}) \otimes \mathcal{U}_q^+$, $\exists m > 0$ tel que $(T_{2m\rho^\cdot} \otimes T_{2m\rho^\cdot})(\Delta(x)) \notin \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q$; de même si $\Delta(x) \notin \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+(-\tilde{\infty})$, $\exists m > 0$ tel que $(T_{2m\rho^\cdot}^{-1} \otimes T_{2m\rho^\cdot}^{-1})(\Delta(x)) \notin \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q^{\geq 0}$; on va prouver que cela est impossible.

Soient d'abord $m > 0$ et

$$(T_{2m\rho^\cdot} \otimes T_{2m\rho^\cdot})(\Delta(x)) = \sum_{\substack{\eta \in Q_+ \\ \underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)}} X_{\underline{\gamma}}(K_\eta F(\underline{\gamma}) \otimes 1)$$

avec $X_{\underline{\gamma}} \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q$. Alors, on a

$$\mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q \ni \Delta(x) = \Delta(T_{2m\rho^\cdot}(x)) = \tilde{R}(mN)^{-1}(T_{2m\rho^\cdot} \otimes T_{2m\rho^\cdot})(\Delta(x))\tilde{R}(mN) =$$

$$= \tilde{R}(mN)^{-1} \sum_{\substack{\eta \in Q_+ \\ \underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)}} X_{\underline{\gamma}}(K_\eta F(\underline{\gamma}) \otimes 1)\tilde{R}(mN) =$$

$$= \tilde{R}(mN)^{-1} \sum_{\substack{\eta \in Q_+ \\ \underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)}} X_{\underline{\gamma}}\tilde{R}(mN)(K_\eta F(\underline{\gamma}) \otimes 1)+$$

$$+\tilde{R}(mN)^{-1} \sum_{\substack{\eta \in Q_+ \\ \underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)}} X_{\underline{\gamma}}[K_\eta F(\underline{\gamma}) \otimes 1, \tilde{R}(mN)];$$

or, $\tilde{R}(mN) = \sum_v l_v \otimes l'_v$ avec $l_v K_{\gamma(v)} \in \mathcal{U}^+_{q,\gamma(v)}$ (cf. théorème 4.4, 2), donc pour $\underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)$ on a

$$[K_\eta F(\underline{\gamma}), l_v] \in \oplus_{\eta' < \eta} \mathcal{U}_q^{\geq 0} \mathcal{U}^-_{q,-\eta'};$$

cela entraîne que si η est maximal dans

$$\{\tilde{\eta} \in Q_+ | \exists \underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\tilde{\eta}) \text{ tel que } X_{\underline{\gamma}} \neq 0\}$$

et si $\underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)$ est tel que $X_{\underline{\gamma}} \neq 0$, alors ou bien $\tilde{R}(mN)^{-1} X_{\underline{\gamma}} \tilde{R}(mN) = 0$ (donc $X_{\underline{\gamma}} = 0$, ce qui contredit le choix de $\underline{\gamma}$) ou bien $\eta = 0$.

Mais $\eta = 0$ veut dire $(T_{2m\rho^\cdot} \otimes T_{2m\rho^\cdot})(\Delta(x)) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q$, et ça pour tout $m > 0$, donc $\Delta(x) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\tilde{\infty}) \otimes \mathcal{U}_q^+$.

La preuve que $\Delta(x) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+(-\tilde{\infty})$ est tout à fait pareille:

soient $m > 0$ et

$$(T^{-1}_{2m\rho^\cdot} \otimes T^{-1}_{2m\rho^\cdot})(\Delta(x)) = \sum_{\substack{\eta \in Q_+ \\ \underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)}} X_{\underline{\gamma}}(1 \otimes F(\underline{\gamma})) \quad \text{avec} \quad X_{\underline{\gamma}} \in \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q^{\geq 0}.$$

Alors, on a

$$\mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q^+ \ni \Delta(x) = \Delta(T^{-1}_{2m\rho^\cdot}(x)) = \tilde{R}(1-mN)^{-1} \sum_{\substack{\eta \in Q_+ \\ \underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)}} X_{\underline{\gamma}}(1 \otimes F(\underline{\gamma}))\tilde{R}(1-mN) =$$

$$= \tilde{R}(1-mN)^{-1} \sum_{\substack{\eta \in Q_+ \\ \underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)}} X_{\underline{\gamma}}\tilde{R}(1-mN)(1 \otimes F(\underline{\gamma}))+$$

$$+\tilde{R}(1-mN)^{-1}\sum_{\substack{\eta\in Q_+\\ \underline{\gamma}\in\mathrm{Par}(\eta)}} X_{\underline{\gamma}}[1\otimes F(\underline{\gamma}),\tilde{R}(1-mN)];$$

or si $\tilde{R}(1-mN)=\sum_v l_v\otimes l'_v$ avec $l'_v\in\mathcal{U}^+_{q,\gamma(v)}$, on a pour tout $\underline{\gamma}\in\mathrm{Par}(\eta)$

$$[F(\underline{\gamma}),l'_v]\in\oplus_{\eta'<\eta}\mathcal{U}_q^{\geq 0}\mathcal{U}^-_{q,-\eta'};$$

cela entraîne que si η est maximal dans

$$\{\tilde{\eta}\in Q_+|\exists\underline{\gamma}\in\mathrm{Par}(\tilde{\eta})\text{ tel que }X_{\underline{\gamma}}\neq 0\}$$

et si $\underline{\gamma}\in\mathrm{Par}(\eta)$ est tel que $X_{\underline{\gamma}}\neq 0$, alors ou bien $\tilde{R}(1-mN)^{-1}X_{\underline{\gamma}}\tilde{R}(1-mN)=0$ (ce qui contredit le choix de $\underline{\gamma}$) ou bien $\eta=0$.

Mais $\eta=0$ veut dire $(T^{-1}_{2m\rho^\vee}\otimes T^{-1}_{2m\rho^\vee})(\Delta(x))\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}\otimes\mathcal{U}_q$, et ça pour tout $m>0$, donc $\Delta(x)\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}\otimes\mathcal{U}_q^+(-\tilde{\infty})$.

En conclusion

$$\Delta(x)\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}(\tilde{\infty})\otimes\mathcal{U}_q^+(-\tilde{\infty}).$$

□

REMARQUE 3. – La proposition 2 fournit en particulier des informations sur $\Delta(E_\alpha)$ pour $\alpha\in\Phi_+(\mathrm{im})$; mais ces informations peuvent être affinées: en effet, les vecteurs E_α ($\alpha\in\Phi_+(\mathrm{im})$) ont, par rapport aux autres éléments de $\mathcal{U}^+_{q,\mathrm{im}}$, des meilleures propriétés (notamment des meilleures propriétés de commutation avec $E_{m\delta\pm\alpha_i}$ pour $i\in I_0$) qui n'ont pas été utilisées. On va maintenant les étudier pour obtenir des résultats plus précis.

Le premier pas consiste à démontrer que, sous certaines conditions, le seul vecteur avec des relations de commutation « simples » est zéro.

6. Relation d'ordre sur $\tilde{\Phi}_+$ et q-commutation

LEMME 1.

1) *Soit $k\geq 1$; alors $\exists i\in I_0$ tel que $E_{\beta_k}E_i\neq q^{(\alpha_i|\beta_k)}E_iE_{\beta_k}$ (c'est-à-dire, E_{β_k} et E_i ne q-commutent pas);*
2) *soit $k\leq 0$; alors $\exists i\in I_0$ tel que $E_{\beta_k}E_{\delta-\alpha_i}\neq q^{(\alpha_i|\beta_k)}E_{\delta-\alpha_i}E_{\beta_k}$ (c'est-à-dire, E_{β_k} et $E_{\delta-\alpha_i}$ ne q-commutent pas);*
3) *soit $m>0$; alors, si*

$$[\sum_{i\in I_0}a_iE_{(m\delta,i)},E_j]=0\ \forall j\in I_0\quad\textit{ou bien}\quad[\sum_{i\in I_0}a_iE_{(m\delta,i)},E_{\delta-\alpha_j}]=0\ \forall j\in I_0,$$

on a $a_i=0\ \forall i\in I_0$;

4) *soit $m>0$ et soit $x\in\mathcal{U}_q^+(\mathrm{im})\cap\mathcal{U}_{q,m\delta}$ tel que $[x,E_i]=0\ \forall i\in I_0$ ou bien $[x,E_{\delta-\alpha_i}]=0$ $\forall i\in I_0$; alors $x=0$.*

Preuve.

1) $k\geq 1\Rightarrow\exists\alpha\in\Phi_{0,+},m>0$ tels que $\beta_k=m\delta-\alpha$; or E_α appartient à l'algèbre engendrée par $\{E_i|i\in I_0\}$, donc en supposant que $E_{\beta_k}E_i=q^{(\alpha_i|\beta_k)}E_iE_{\beta_k}$ $\forall i\in I_0$

on trouverait $E_{m\delta-\alpha}E_\alpha = q^{-(\alpha|\alpha)}E_\alpha E_{m\delta-\alpha}$; en particulier (grâce aux propriétés de la spécialisation à $q=1$) on aurait $[e_{m\delta-\alpha}, e_\alpha] = 0$, ce qui est absurde car $[e_{m\delta-\alpha}, e_\alpha] = [f_\alpha \otimes t^m, e_\alpha] = -h_\alpha \otimes t^m \neq 0$.

2) $k \leq 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \Phi_{0,+}, m \geq 0$ tels que $\beta_k = m\delta + \alpha$; donc $T_{\rho^\vee}^{-1}(E_{\beta_k}) = E_{m'\delta+\alpha}$ où $m' \doteqdot m + \langle \rho^\vee, \alpha \rangle > 0$; d'un autre côté

$$T_{\rho^\vee}^{-1}(E_{\delta-\alpha_i}) = T_{\omega_i^\vee}^{-1}(E_{\delta-\alpha_i}) = T_i^{-1}(E_i) = -K_i^{-1}F_i;$$

donc la condition

$$E_{\beta_k}E_{\delta-\alpha_i} = q^{(\alpha_i|\beta_k)}E_{\delta-\alpha_i}E_{\beta_k}$$

est équivalente à la condition

$$[E_{m'\delta+\alpha}, F_i] = 0;$$

si cette condition était satisfait $\forall i \in I_0$, comme F_α appartient à l'algèbre engendrée par $\{F_i | i \in I_0\}$, on aurait $[E_{m'\delta+\alpha}, F_\alpha] = 0$, ce qui est impossible car dans l'algèbre enveloppante de $\hat{\mathfrak{g}}$ on a $[e_{m'\delta+\alpha}, f_\alpha] \neq 0$.

3) On a

$$\Big[\sum_{i\in I_0} a_i E_{(m\delta,i)}, E_j\Big] = \Big(\sum_{i\in I_0} a_i (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{m}\Big) E_{m\delta+\alpha_j}, \quad \text{et}$$

$$\Big[\sum_{i\in I_0} a_i E_{(m\delta,i)}, E_{\delta-\alpha_j}\Big] = -\Big(\sum_{i\in I_0} a_i (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{m}\Big) E_{(m+1)\delta-\alpha_j},$$

donc l'assertion suit du fait que la matrice $([ma_{ij}]_{q_i})_{i,j\in I_0}$ est non-dégénérée (car, par exemple, $(a_{ij})_{i,j\in I_0}$ est non-dégénérée).

4) Soit $x = \sum_{\underline{\gamma}} a_{\underline{\gamma}} E(\underline{\gamma}) \in \mathcal{U}_q^+(\mathrm{im}) \cap \mathcal{U}_{q,m\delta} \setminus \{0\}$ (avec $m > 0$) et soient

(i) $k \doteqdot \min\{l > 0 | \exists \underline{\gamma} = (\gamma_1 \preceq \ldots \preceq \gamma_r)$ tel que $a_{\underline{\gamma}} \neq 0$ et $(\gamma_r) \in \mathrm{Par}(l\delta)\}$;

(ii) $\underline{\gamma} = (\gamma_1 \preceq \ldots \preceq \gamma_r)$ tel que $a_{\underline{\gamma}} \neq 0$ et $(\gamma_r) \in \mathrm{Par}(k\delta)$;

(iii) $X_i \doteqdot E_i$ ou $E_{\delta-\alpha_i}$, $Y_i \doteqdot \begin{cases} E_{k\delta+\alpha_i} & \text{si } X_i = E_i \\ E_{(k+1)\delta-\alpha_i} & \text{si } X_i = E_{\delta-\alpha_i}; \end{cases}$

(iv) $\pi_{\underline{\gamma},i} : \mathcal{U}_q^+ \to \mathbb{C}(q)E_{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_{r-1}}Y_i$ $(i \in I_0)$ la projection par rapport à la base $\{E(\tilde{\underline{\gamma}})\}$ de $\mathcal{U}_q^+$ si $X_i = E_i$ et à la base $\{E(-\tilde{\underline{\gamma}})\}$ de $\mathcal{U}_q^+$ si $X_i = E_{\delta-\alpha_i}$.

Alors

$$\pi_{\underline{\gamma},i}([x, X_i]) = \sum_{\tilde{\underline{\gamma}}} a_{\tilde{\underline{\gamma}}} \pi_{\underline{\gamma},i}([E(\tilde{\underline{\gamma}}), X_i]) =$$

$$= \sum_{j\in I_0} a_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{r-1},(k\delta,j))} \pi_{\underline{\gamma},i}([E(\gamma_1,\ldots,\gamma_{r-1},(k\delta,j)), X_i]) =$$

$$= \Big(\sum_{j\in I_0} (1 + \#\{u < r | \gamma_u = (k\delta, j)\}) a_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{r-1},(k\delta,j))}\Big) E_{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_{r-1}} [E_{(k\delta,j)}, X_i];$$

donc si $[x, X_i] = 0 \ \forall i \in I_0$, on a aussi

$$\Big[\sum_{j\in I_0} (1 + \#\{u < r | \gamma_u = (k\delta, j)\}) a_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{r-1},(k\delta,j))} E_{(k\delta,j)}, X_i\Big] = 0 \quad \forall i \in I_0;$$

il suit alors de 3) que $a_{(\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1},(k\delta,j))} = 0 \ \forall j \in I_0$, ce qui est impossible car $a_{\underline{\gamma}} \neq 0$ pour le choix de $\underline{\gamma}$. □

Pour généraliser ce lemme, en étendant les conditions sous lesquelles un élément $x \in \mathcal{U}_q$ ne peut pas q-commuter avec tous les E_i ou bien tous les $E_{\delta-\alpha_i}$ $(i \in I_0)$, il faut maintenant étudier quelques propriétés de la relation d'ordre $\preceq$ sur $\mathcal{P}$.

LEMME 2. – *Soient*

(i) $(\gamma_1 \preceq \dots \preceq \gamma_r) \in \mathcal{P}$ *et* $u < r$ *tels que* $\gamma_u \prec \gamma_r$;

(ii) $\underline{\gamma}' = (\gamma_1' \preceq \dots \preceq \gamma_s')$ et $\underline{\gamma}'' = (\gamma_1'' \preceq \dots \preceq \gamma_t'')$ *tels que* $\gamma_u \prec \gamma_1'$ *et* $\gamma_r \prec \gamma_1''$.

Alors

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{u-1}, \gamma_{u+1}, \dots, \gamma_r, \underline{\gamma}') \succ (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}, \underline{\gamma}'').$$

Preuve. – Soit $v \geq u$ tel que $\gamma_u = \gamma_{u+1} = \dots = \gamma_v \prec \gamma_{v+1}$; alors $v < r$ et

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{u-1}, \gamma_{u+1}, \dots, \gamma_r, \underline{\gamma}') =$$

$$= (\gamma_1 \preceq \dots \preceq \gamma_{u-1} \preceq \gamma_{u+1} \preceq \dots \preceq \gamma_v \prec \min\{\gamma_1', \gamma_{v+1}\} \preceq \dots) =$$
$$= (\gamma_1 \preceq \dots \preceq \gamma_{v-1} \prec \min\{\gamma_1', \gamma_{v+1}\} \preceq \dots);$$

d'un autre côté

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}, \underline{\gamma}'') = (\gamma_1 \preceq \dots \preceq \gamma_v \preceq \dots),$$

et comme $\gamma_v \prec \min\{\gamma_1', \gamma_{v+1}\}$ on a l'assertion. □

LEMME 3. – *Soient*

(i) $(\gamma_1 \preceq \dots \preceq \gamma_r) \in \mathcal{P}$ *et* $u \leq r$ *tels que* $\gamma_u = \gamma_r$;

(ii) $\underline{\gamma}' = (\gamma_1' \preceq \dots \preceq \gamma_s')$ *et* $\underline{\gamma}'' = (\gamma_1'' \preceq \dots \preceq \gamma_t'')$ *tels que* $\underline{\gamma}' \succeq \underline{\gamma}''$ *et* $\min\{\gamma_1', \gamma_1''\} \succ \gamma_r$.

Alors

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{u-1}, \gamma_{u+1}, \dots, \gamma_r, \underline{\gamma}') \succeq (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}, \underline{\gamma}'')$$

et on a que $(\gamma_1, \dots, \gamma_{u-1}, \gamma_{u+1}, \dots, \gamma_r, \underline{\gamma}') = (\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}, \underline{\gamma}'')$ *si et seulement si* $\underline{\gamma}' = \underline{\gamma}''$.

Preuve. – Il suit immédiatement du fait que

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{u-1}, \gamma_{u+1}, \dots, \gamma_r, \underline{\gamma}') = (\gamma_1 \preceq \dots \preceq \gamma_{r-1} \preceq \gamma_1' \preceq \dots \preceq \gamma_s')$$

et

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}, \underline{\gamma}'') = (\gamma_1 \preceq \dots \preceq \gamma_{r-1} \preceq \gamma_1'' \preceq \dots \preceq \gamma_t'').$$

□

LEMME 4. – *Soient*

(i) $\underline{\gamma} = (\gamma_1 \preceq \dots \preceq \gamma_r), \underline{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1 \preceq \dots \preceq \tilde{\gamma}_s) \in \mathrm{Par}(\eta)$ *tels que* $\underline{\gamma} \prec \underline{\tilde{\gamma}}$;

(ii) $\underline{\gamma}' = (\gamma_1' \preceq \dots)$ *et* $\underline{\gamma}'' = (\gamma_1'' \preceq \dots)$ *tels que* $\gamma_1' \succ \gamma_r$ *et* $\gamma_1'' \succ \tilde{\gamma}_s$.

Alors, ou bien

a) $\exists k < \min\{r, s+1\}$ *tel que* $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i \ \forall i < k$, $\gamma_k \prec \tilde{\gamma}_k$, *et donc*

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}, \underline{\gamma}') \prec (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{s-1}, \underline{\gamma}'');$$

ou bien

b) $r \leq s$, $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i \; \forall i < r$, $\gamma_r, \tilde{\gamma}_r, ..., \tilde{\gamma}_s \in \Phi_+(\mathrm{im})$ *(et clairement* $\sum_{t=r}^s p(\tilde{\gamma}_t) = p(\gamma_r)$*).*

Dans le cas b) *si de plus on a*

(iii) $\underline{\bar{\gamma}} = (\bar{\gamma}_1 \preceq ... \preceq \bar{\gamma}_u) \in \mathrm{Par}(\eta + \bar{\gamma}_u)$ *avec* $\bar{\gamma}_u \in \Phi_+(-\infty)$;

(iv) $\bar{k} < \min\{r, u-1\}$ *tel que* $\gamma_i = \bar{\gamma}_i \; \forall i < k$, $\gamma_k \prec \bar{\gamma}_k$*;*

(v) $\mathcal{I} \subseteq \{r, ..., s\}$;

on trouve que

c) $\underline{\bar{\gamma}} \succ (\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{r-1}, (\tilde{\gamma}_v)_{v \in \mathcal{I}}, \alpha_j + \sum_{v=r, v \notin \mathcal{I}}^s p(\gamma_v))$.

Preuve. – Comme $\underline{\gamma} \neq \underline{\tilde{\gamma}} \in \mathrm{Par}(\eta)$, si k est tel que $\gamma_i = \tilde{\gamma}_i \; \forall i < k$ il faut avoir $k \leq \min\{r, s\}$.

Si $k < \min\{r, s+1\}$ il est clair que a) est vrai.

Si $k \geq \min\{r, s+1\}$ on a $\min\{r, s+1\} \leq k \leq \min\{r, s\}$, donc $k = r \leq s$; alors il est clair que $p(\gamma_r) = \sum_{t=r}^s p(\tilde{\gamma}_t)$ (et $\tilde{\gamma}_r \succ \gamma_r$), donc en particulier $\gamma_r \in \Phi_+(\mathrm{im})$, et aussi $\tilde{\gamma}_t \in \Phi_+(\mathrm{im}) \; \forall t = r, ..., s$.

Maintenant soient $\underline{\bar{\gamma}}$, k et $\mathcal{I}$ comme dans iii)-v).

Alors

$$\Big(\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{r-1}, (\tilde{\gamma}_v)_{v \in \mathcal{I}}, \alpha_j + \sum_{\substack{v=r \\ v \notin \mathcal{I}}}^s p(\gamma_v)\Big) =$$

$$= \Big(\gamma_1, ..., \gamma_{r-1}, (\tilde{\gamma}_v)_{v \in \mathcal{I}}, \alpha_j + \sum_{\substack{v=r \\ v \notin \mathcal{I}}}^s p(\gamma_v)\Big) =$$

$$= \Big(\bar{\gamma}_1, ..., \bar{\gamma}_{k-1}; \gamma_k, ..., \gamma_{r-1}, (\tilde{\gamma}_v)_{v \in \mathcal{I}}, \alpha_j + \sum_{\substack{v=r \\ v \notin \mathcal{I}}}^s p(\gamma_v)\Big) \prec$$

$$\prec (\bar{\gamma}_1, ..., \bar{\gamma}_u) = \underline{\bar{\gamma}},$$

car $k \leq r-1$ et $\gamma_k \prec \bar{\gamma}_k$. □

REMARQUE 5. – Comme les preuves des lemmes 2, 3 et 4 n'utilisent que le fait que $\preceq$ est « presque convexe », le lemme reste vrai si on remplace $\preceq$ par $\preceq'$ et $\Phi_+(-\infty)$ par $\Phi_+(\infty)$.

COROLLAIRE 6. – *Soit* $\eta > 0$ *et soit* $x \in \mathcal{U}_q^+(\tilde{\infty}) \cap \mathcal{U}_{q,\eta}^+$ *tel que* $xE_i = q^{(\eta|\alpha_i)} E_i x \; \forall i \in I_0$*; alors* $x = 0$*; de même si* $y \in \mathcal{U}_q^+(-\tilde{\infty}) \cap \mathcal{U}_{q,\eta}^+$ $(\eta > 0)$ *est tel que* $yE_{\delta-\alpha_i} = q^{(\eta|\alpha_i)} E_{\delta-\alpha_i} y$ $\forall i \in I_0$ *on a* $y = 0$.

Preuve. – Soit $x = \sum_{\underline{\gamma}} a_{\underline{\gamma}} E(\underline{\gamma}) \in \mathcal{U}_q^+(\tilde{\infty}) \cap \mathcal{U}_{q,\eta}^+ \setminus \{0\}$ tel que $xE_i = q^{(\eta|\alpha_i)} E_i x \; \forall i \in I_0$ et soit $\underline{\gamma} \doteqdot \min\{\underline{\gamma}' | a_{\underline{\gamma}'} \neq 0\}$ avec $\underline{\gamma} = (\gamma_1 \preceq ... \preceq \gamma_r)$.

Si $\gamma_r \in \Phi_+(\infty)$ la formule de Levendorskii-Soibelman et le lemme 1 nous disent que $\exists i \in I_0$ tel que

$$E_{\gamma_r} E_i - q^{(\gamma_r|\alpha_i)} E_i E_{\gamma_r} = \sum_{\underline{\gamma}' \succ (\gamma_r, \alpha_i)} b_{\underline{\gamma}'} E(\underline{\gamma}') \neq 0;$$

soient $\underline{\gamma}' \doteqdot \min\{\underline{\gamma}''|b_{\underline{\gamma}''} \neq 0\}$ et

$$\pi^* : \mathcal{U}_q^+ \to \mathbb{C}(q)E_{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_{r-1}}E(\underline{\gamma}') =$$
$$= \mathbb{C}(q)E(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}, \underline{\gamma}')$$

la projection par rapport à la base $\{E(\tilde{\underline{\gamma}})\}$ de $\mathcal{U}_q^+$; alors les lemmes 2, 3 et 4 impliquent que

$$0 = \pi^*(xE_i - q^{(\eta|\alpha_i)}E_i x) =$$
$$= \pi^*\Big(a_{\underline{\gamma}} \sum_{v=u}^{r} q^{-(r-v)(\gamma_r|\gamma_r+\alpha_i)} E_{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_{v-1}}(E_{\gamma_v}E_i - q^{(\gamma_u|\alpha_i)}E_iE_{\gamma_v})E_{\gamma_{v+1}} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_r}\Big) =$$
$$= \sum_{v=u}^{r} q^{-(r-v)(\gamma_r|\gamma_r+\alpha_i)} a_{\underline{\gamma}} b_{\underline{\gamma}'} E(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}, \underline{\gamma}')$$

où u est tel que $\gamma_{u-1} \prec \gamma_u = \gamma_{u+1} = \ldots = \gamma_r$; donc $a_{\underline{\gamma}} b_{\underline{\gamma}'} = 0$, ce qui contredit le choix de $\underline{\gamma}$ et de $\underline{\gamma}'$.

On a alors $\gamma_r \in \Phi_+(\mathrm{im})$.

Il suit encore des lemmes 2 et 4 que si

$$\tilde{\pi} : \mathcal{U}_q^+ \to E_{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_{r-1}} \mathcal{U}_q^+(-\tilde{\infty})$$

est la projection par rapport à la base $\{E(\tilde{\underline{\gamma}})\}$ de $\mathcal{U}_q^+$ on a

$$0 = \tilde{\pi}(xE_i - q^{(\eta|\alpha_i)}E_i x) =$$
$$= E_{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_{r-1}}[(r-u+1)a_{\underline{\gamma}}E_{\gamma_r} +$$
$$+ \sum_{\tilde{\underline{\gamma}} \succ (\gamma_r)} a_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}, \tilde{\underline{\gamma}})} E(\tilde{\underline{\gamma}}), E_i]$$

où $u \le r$ est tel que $\gamma_{u-1} \prec \gamma_u = \gamma_{u+1} = \ldots = \gamma_r$.

Mais

$$(r-u+1)a_{\underline{\gamma}}E_{\gamma_r} + \sum_{\tilde{\underline{\gamma}} \succ (\gamma_r)} a_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}, \tilde{\underline{\gamma}})} E(\tilde{\underline{\gamma}}) \in \mathcal{U}_q^+(\mathrm{im}) \cap \mathcal{U}_{q,p(\gamma_r)}$$

et $(r-u+1)a_{\underline{\gamma}} \neq 0$, ce qui contredit le fait que $\tilde{\pi}(xE_i - q^{(\eta|\alpha_i)}E_i x) = 0 \ \forall i \in I_0$ (voir le point 4) du lemme 1).

Donc $x = 0$.

De même, en remplaçant $\preceq$ avec $\preceq'$, E_i avec $E_{\delta-\alpha_i}$, ∞ et $-\tilde{\infty}$ par $-\infty$ et $\tilde{\infty}$, on prouve, grâce à la remarque 5, que si

$$y = \sum_{\underline{\gamma}} a_{\underline{\gamma}} E(\underline{\gamma}) \in \mathcal{U}_q^+(\tilde{\infty}) \cap \mathcal{U}_{q,\eta}^+ \quad \text{avec} \quad \eta > 0$$

est tel que

$$yE_{\delta-\alpha_i} = q^{(\eta|\alpha_i)}E_{\delta-\alpha_i}y \quad \forall i \in I_0$$

alors $y = 0$. □

7. Contrôle sur $\Delta(E_{(m\delta,i)})$

Les résultats des paragraphes précédents nous permettent de démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 1. – *Soit* $\alpha \in \Phi_+(\mathrm{im})$*; alors*

$$\Delta(E_\alpha) - (E_\alpha \otimes 1 + K_{p(\alpha)} \otimes E_\alpha) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty) \otimes \mathcal{U}_q^+(-\infty).$$

Preuve. – Soit $(\alpha) \in \mathrm{Par}(m\delta)$ et prouvons d'abord que

$$\Delta(E_\alpha) - (E_\alpha \otimes 1 + K_{m\delta} \otimes E_\alpha) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\tilde{\infty}) \otimes \mathcal{U}_q^+(-\infty).$$

Soient

$$\Delta(E_\alpha) - (E_\alpha \otimes 1 + K_{m\delta} \otimes E_\alpha) = \sum_{\underline{\delta},\underline{\gamma}} u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}} \otimes E(\underline{\delta})E(\underline{\gamma})$$

avec $E(\underline{\delta}) \in \mathcal{U}_q^+(\mathrm{im})$, $E(\underline{\gamma}) \in \mathcal{U}_q^+(-\infty)$, $u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}} \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\tilde{\infty})$, et

$$X \doteqdot \sum_{\substack{\underline{\delta},\underline{\gamma}:\\ \underline{\delta}\neq\emptyset}} u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}} \otimes E(\underline{\delta})E(\underline{\gamma});$$

On veut prouver que $X = 0$.

Or on sait que $\forall i \in I_0\ \exists c_{\alpha,i} \in \mathbb{C}(q)$ tel que

$$[E_\alpha, E_i] = c_{\alpha,i} E_{m\delta+\alpha_i} \quad \text{et } \alpha_i, m\delta + \alpha_i \in \Phi_+(-\infty),$$

donc

$$[\Delta(E_\alpha), E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i] = c_{\alpha,i}\Delta(E_{m\delta+\alpha_i}) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+(-\infty);$$

de plus

$$[E_\alpha \otimes 1 + K_{m\delta} \otimes E_\alpha, E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i] =$$

$$= c_{\alpha,i}(E_{m\delta+\alpha_i} \otimes 1 + K_{m\delta+\alpha_i} \otimes E_{m\delta+\alpha_i}) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+(-\infty),$$

et si $x \in \mathcal{U}_q^+(-\infty)$ on a aussi que pour tout $y \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}$

$$[y \otimes x, E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i] \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+(-\infty);$$

il suit alors que $\forall i \in I_0\ [X, E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i] \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+(-\infty)$.

Supposons $X \neq 0$ et soit $\eta \in Q_+$ minimal dans

$$\{\eta' | \exists \underline{\delta} \neq \emptyset,\ \exists \underline{\gamma} \text{ tels que } (\underline{\delta}, \underline{\gamma}) \in \mathrm{Par}(\eta') \text{ et } u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}} \neq 0\}.$$

On a alors

$$[X, E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i] =$$

$$= \sum_{\substack{\eta',\underline{\delta},\underline{\gamma}:\underline{\delta}\neq\emptyset,\\ (\underline{\delta},\underline{\gamma})\in\mathrm{Par}(\eta')}} \{[u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}},E_i]\otimes E(\underline{\delta})E(\underline{\gamma}) + u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}K_i\otimes\big(E(\underline{\delta})E(\underline{\gamma})E_i - q^{-(\eta'|\alpha_i)}E_iE(\underline{\delta})E(\underline{\gamma})\big)\}$$

donc si $\underline{\delta}\neq\emptyset$ et $\underline{\gamma}$ sont tels que $(\underline{\delta},\underline{\gamma})\in\mathrm{Par}(\eta)$ il faut avoir $[u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}},E_i]=0$ $\forall i\in I_0$, c'est-à-dire $\forall i\in I_0$

$$u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}K_\eta^{-1}E_i = q^{-(\eta|\alpha_i)}E_iu_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}K_\eta^{-1}$$

où $u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}K_\eta^{-1}\in\mathcal{U}_q^+(\tilde{\infty})$.

Cela implique que $u_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}=0$ (grâce au corollaire 6.6), ce qui contredit le choix de η. Donc $X=0$ et

$$\Delta(E_\alpha)-(E_\alpha\otimes 1+K_{p(\alpha)}\otimes E_\alpha)\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}(\tilde{\infty})\otimes\mathcal{U}_q^+(-\infty).$$

Soient maintenant

$$\Delta(E_\alpha)-(E_\alpha\otimes 1+K_{m\delta}\otimes E_\alpha) = \sum_{\substack{\eta,\underline{\delta},\underline{\gamma}:\\ (\underline{\gamma},\underline{\delta})\in\mathrm{Par}(\eta)}} E(\underline{\gamma})E(\underline{\delta})K_{m\delta-\eta}\otimes v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}$$

avec $E(\underline{\gamma})\in\mathcal{U}_q^+(\infty)$, $E(\underline{\delta})\in\mathcal{U}_q^+(\mathrm{im})$, $v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}\in\mathcal{U}_q^+(-\infty)$, et

$$Y \doteqdot \sum_{\substack{\eta,\underline{\delta},\underline{\gamma}:\underline{\delta}\neq\emptyset,\\ (\underline{\gamma},\underline{\delta})\in\mathrm{Par}(\eta)}} E(\underline{\gamma})E(\underline{\delta})K_{m\delta-\eta}\otimes v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}};$$

On veut prouver que $Y=0$.

Or on sait que $\forall i\in I_0$ $\exists c_{\alpha,i}\in\mathbb{C}(q)$ tel que

$$[E_\alpha,E_{\delta-\alpha_i}] = c_{\alpha,i}E_{(m+1)\delta-\alpha_i} \quad \text{et } \delta-\alpha_i,(m+1)\delta-\alpha_i\in\Phi_+(\infty),$$

donc

$$[\Delta(E_\alpha),\Delta(E_{\delta-\alpha_i})] = c_{\alpha,i}\Delta(E_{(m+1)\delta-\alpha_i})\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty)\otimes\mathcal{U}_q^+;$$

de plus $[K_{m\delta}\otimes E_\alpha,\Delta(E_{\delta-\alpha_i})]\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty)\otimes\mathcal{U}_q^+$, et si $x\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty)$ on a aussi que pour tout $y\in\mathcal{U}_q^+$ $[x\otimes y,\Delta(E_{\delta-\alpha_i})]\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty)\otimes\mathcal{U}_q^+$; il suit alors que $\forall i\in I_0$ $[Y+E_\alpha\otimes 1,\Delta(E_{\delta-\alpha_i})]\in\mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty)\otimes\mathcal{U}_q^+$.

Supposons $Y\neq 0$ et soit $\eta\in Q_+$ minimal dans

$$\{\eta'\in Q_+|\exists\underline{\delta}\neq\emptyset,\ \ \exists\underline{\gamma} \text{ tels que } (\underline{\gamma},\underline{\delta})\in\mathrm{Par}(\eta') \text{ et } v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}\neq 0\}.$$

On a alors que $0<\eta<m\delta$ et que

$$[Y+E_\alpha\otimes 1,\Delta(E_{\delta-\alpha_i})] =$$

$$= [\sum_{\substack{\underline{\delta},\underline{\gamma}:\underline{\delta}\neq\emptyset,\\ (\underline{\gamma},\underline{\delta})\in\mathrm{Par}(\eta)}} E(\underline{\gamma})E(\underline{\delta})K_{m\delta-\eta}\otimes v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}},K_{\delta-\alpha_i}\otimes E_{\delta-\alpha_i}] + \sum_t x_t\otimes y_t$$

où $\sum_t x_t\otimes y_t\in\oplus_{\beta\neq\eta}\mathcal{U}_{q,\beta}^{\geq 0}\otimes\mathcal{U}_q$. Mais

$$[E(\underline{\gamma})E(\underline{\delta})K_{m\delta-\eta}\otimes v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}},K_{\delta-\alpha_i}\otimes E_{\delta-\alpha_i}] =$$

$$= E(\underline{\gamma})E(\underline{\delta})K_{(m+1)\delta-\eta-\alpha_i} \otimes (v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}E_{\delta-\alpha_i} - q^{-(\eta|\alpha_i)}E_{\delta-\alpha_i}v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}),$$

donc, pour que $[Y + E_\alpha \otimes 1, \Delta(E_{\delta-\alpha_i})] \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty) \otimes \mathcal{U}_q^+ \ \forall i \in I_0$ il faut que

$$v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}}E_{\delta-\alpha_i} = q^{-(\eta|\alpha_i)}E_{\delta-\alpha_i}v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}} \quad \forall i \in I_0, \forall \underline{\delta}, \underline{\gamma} \ \text{ tels que } \ \underline{\delta} \neq \emptyset \ \text{ et } \ (\underline{\gamma}, \underline{\delta}) \in \mathrm{Par}(\eta),$$

donc, grâce au corollaire 6.6 (on rappelle que $v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}} \in \mathcal{U}_q^+(-\infty) \cap \mathcal{U}_{q,m\delta-\eta}$),

$$v_{\underline{\delta},\underline{\gamma}} = 0 \quad \forall \underline{\delta}, \underline{\gamma} \ \text{ tels que } \ \underline{\delta} \neq \emptyset \ \text{ et } \ (\underline{\gamma}, \underline{\delta}) \in \mathrm{Par}(\eta),$$

ce qui contredit le choix de η.

On a alors $Y = 0$ et

$$\Delta(E_\alpha) - (E_\alpha \otimes 1 + K_{p(\alpha)} \otimes E_\alpha) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty) \otimes \mathcal{U}_q^+(-\infty).$$

□

COROLLAIRE 2. – *Soit $m > 0$ et soit x une combinaison linéaire des $E_{(m\delta,i)}$ (pour $i \in I_0$); alors*

$$\Delta(x) - (x \otimes 1 + K_{m\delta} \otimes x) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty) \otimes \mathcal{U}_q^+(-\infty).$$

Si y est une combinaison linéaire des $F_{(m\delta,i)}$ (pour $i \in I_0$), alors

$$\Delta(y) - (1 \otimes y + y \otimes K_{-m\delta}) \in \mathcal{U}_q^-(-\infty) \otimes \mathcal{U}_q^{\leq 0}(\infty).$$

Preuve. – L'assertion est un corollaire immédiat de la proposition 1 et des relations entre Δ et Ω. □

8. Propriétés de dualité de la base de PBW

On va maintenant aborder le problème de trouver deux bases de $\mathcal{U}_q^+$ et $\mathcal{U}_q^-$ duales par rapport à la forme de Killing.

PROPOSITION 1. – *Soient $\alpha \in \tilde{\Phi}_+$ et $\underline{\gamma} = (\gamma_1 \preceq \ldots \preceq \gamma_r) \in \mathcal{P}$; si*

$$(E_\alpha, F(-\underline{\gamma})) \neq 0 \ \textit{ ou bien } \ (E(-\underline{\gamma}), F_\alpha) \neq 0$$

on a $r = 1$.

Preuve. – On démontre la proposition par récurrence sur $\mathrm{ht}(\alpha)$ en se rappelant que $\preceq$ est une relation d'ordre « presque convexe » : si $\mathrm{ht}(\alpha)$=1, l'assertion est évidente.

Supposons alors $\mathrm{ht}(\alpha) > 1$ et $r > 1$ (donc $0 < \mathrm{ht}(\gamma_r) < \mathrm{ht}(\alpha)$); on a les cas suivants:

1) $\alpha \in \Phi_+(\mathrm{im})$: on a alors $\gamma_r \in \Phi_+(-\tilde{\infty})$; mais

$$\Delta(E_\alpha) - (E_\alpha \otimes 1 + K_{p(\alpha)} \otimes E_\alpha) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(\infty) \otimes \mathcal{U}_q^+$$

et

$$\Delta(F_\alpha) - (1 \otimes F_\alpha + F_\alpha \otimes K_{p(\alpha)}^{-1}) \in \mathcal{U}_q^- \otimes \mathcal{U}_q^{\leq 0}(\infty);$$

donc

$$(E_\alpha, F(-\underline{\gamma})) = (\Delta(E_\alpha), F_{\gamma_r} \otimes F_{\gamma_{r-1}} \cdot \ldots \cdot F_{\gamma_1}) = 0$$

et

$$(E(-\underline{\gamma}), F_\alpha) = (E_{\gamma_{r-1}} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_1} \otimes E_{\gamma_r}, \Delta(F_\alpha)) = 0;$$

2) $\alpha \in \Phi_+(\infty)$, c'est-à-dire $\exists k \geq 1$ tel que $\alpha = \beta_k$: alors $\gamma_r \succ \alpha$, donc $\gamma_r \notin \Phi_+(k+1)$; mais

$$\Delta(E_\alpha) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0}(k+1) \otimes \mathcal{U}_q^+$$

et

$$\Delta(F_\alpha) \in \mathcal{U}_q^- \otimes \mathcal{U}_q^{\leq 0}(k+1);$$

donc

$$(E_\alpha, F(-\underline{\gamma})) = (\Delta(E_\alpha), F_{\gamma_r} \otimes F_{\gamma_{r-1}} \cdot \ldots \cdot F_{\gamma_1}) = 0$$

et

$$(E(-\underline{\gamma}), F_\alpha) = (E_{\gamma_{r-1}} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_1} \otimes E_{\gamma_r}, \Delta(F_\alpha)) = 0;$$

3) $\alpha \in \Phi_+(-\infty)$, c'est-à-dire $\exists k \leq 0$ tel que $\alpha = \beta_k$: encore, ça implique que $\gamma_1 \prec \alpha$, donc $\gamma_1 \notin \Phi_+(k-1)$; mais

$$\Delta(E_\alpha) \in \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+(k-1)$$

et

$$\Delta(F_\alpha) \in \mathcal{U}_q^-(k-1) \otimes \mathcal{U}_q^{\leq 0};$$

donc

$$(E_\alpha, F(-\underline{\gamma})) = (\Delta(E_\alpha), F_{\gamma_r} \cdot \ldots \cdot F_{\gamma_2} \otimes F_{\gamma_1}) = 0$$

et

$$(E(-\underline{\gamma}), F_\alpha) = (E_{\gamma_1} \otimes E_{\gamma_r} \cdot \ldots \cdot E_{\gamma_2}, \Delta(F_\alpha)) = 0.$$

□

REMARQUE 2. – La proposition 1 entraîne, en particulier, que si $\alpha \in \Phi_+^{\mathrm{re}}$ et $\underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\alpha)$ sont tels que

$$(E_\alpha, F(-\underline{\gamma})) \neq 0 \quad \text{ou bien} \quad (E(-\underline{\gamma}), F_\alpha) \neq 0$$

alors $\underline{\gamma} = (\alpha)$. □

9. La forme de Killing sur les vecteurs relatifs aux racines imaginaires

Il faut maintenant étudier les vecteurs relatifs aux racines imaginaires: on verra que la remarque 8.2 n'est plus satisfaite si α est imaginaire et qu'il faudra donc transformer ces vecteurs pour en obtenir de nouveaux qui aient un meilleur comportement. Le but de ce paragraphe est donc de calculer $(E_{(m\delta,i)}, F_{(m\delta,j)})$.

DÉFINITION 1. – Soit $j \in I_0$; on appelle π_j la projection $\pi_j : \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q \to \mathcal{U}_q \otimes \mathbb{C}(q)E_j$.

REMARQUE 2. – $\pi_j(\Delta(E_{(m\delta,i)}))$ est un multiple de $E_{m\delta-\alpha_j}K_j \otimes E_j$.

Preuve. – Si $m\delta - \alpha_j = \beta_{k_1} + ... + \beta_{k_r}$ avec $k_1, ..., k_r \geq 1$ on a $r = 1$, car β_{k_i} est de la forme $m_i\delta - \gamma_i$ avec $\gamma_i \in \Phi_{0,+}$. □

On peut alors donner la définition suivante:

DÉFINITION 3. – $\forall m > 0$ $\forall i, j \in I_0$ on définit $c_m^{ij} \in \mathbb{C}(q)$ par

$$\pi_j(\Delta(E_{(m\delta,i)})) = c_m^{ij} E_{m\delta-\alpha_j} K_j \otimes E_j.$$

LEMME 4. – *Soit* $m > 0$*; alors* $\forall i, j \in I_0$

$$(E_{(m\delta,i)}, F_{(m\delta,j)}) = -q_j^2 \frac{c_m^{ij}}{(q_j^{-1} - q_j)^2}.$$

Preuve. – On sait que $F_{(m\delta,j)} + \tilde{F}_{(m\delta,j)}$ appartient à la sous-algèbre de $\mathcal{U}_q^-$ engendrée par $\{F_{(r\delta,j)} | 0 < r < m\}$, donc

$$(E_{(m\delta,i)}, F_{(m\delta,j)}) = -(E_{(m\delta,i)}, \tilde{F}_{(m\delta,j)}) = (E_{(m\delta,i)}, F_j F_{m\delta-\alpha_j} - q_j^2 F_{m\delta-\alpha_j} F_j);$$

or $F_j F_{m\delta-\alpha_j} = F(-(m\delta - \alpha_j, \alpha_j))$, donc $(E_{(m\delta,i)}, F_j F_{m\delta-\alpha_j}) = 0$, d'où

$$(E_{(m\delta,i)}, F_{(m\delta,j)}) = -q_j^2 (E_{(m\delta,i)}, F_{m\delta-\alpha_j} F_j) =$$

$$= -q_j^2 (\Delta(E_{(m\delta,i)}), F_{m\delta-\alpha_j} \otimes F_j) = -q_j^2 (\pi_j \Delta(E_{(m\delta,i)}), F_{m\delta-\alpha_j} \otimes F_j) =$$

$$= -q_j^2 c_m^{ij} (E_{m\delta-\alpha_j}, F_{m\delta-\alpha_j})(E_j, F_j) = -q_j^2 \frac{c_m^{ij}}{(q_j^{-1} - q_j)^2}.$$

□

Pour calculer c_m^{ij} on suit les pas suivants:

LEMME 5. – $\forall m > 0$, $\forall i, j \in I_0$ on a

$$c_m^{ij} = (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{[2m]_{q_j}} c_m^{jj}.$$

Preuve. – On sait que

$$[E_{(m\delta,i)}, E_j] = (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{m} E_{m\delta+\alpha_j}, \quad [E_{(m\delta,j)}, E_j] = \frac{[2m]_{q_j}}{m} E_{m\delta+\alpha_j}.$$

D'un autre côté $\forall u \in I_0$ on a

$$\pi_j(\Delta[E_{(m\delta,u)}, E_j]) = [\pi_j(\Delta(E_{(m\delta,u)})), E_j \otimes 1] + [E_{(m\delta,u)} \otimes 1, K_j \otimes E_j] =$$

$$= [\pi_j(\Delta(E_{(m\delta,u)})), E_j \otimes 1] = c_m^{uj} [E_{m\delta-\alpha_j} K_j, E_j] \otimes E_j = -q_j^2 c_m^{uj} E_{(m\delta,j)} K_j \otimes E_j,$$

donc on a $q_j^2 c_m^{ij} [2m]_{q_j} = (o(i)o(j))^m q_j^2 c_m^{jj} [ma_{ij}]_{q_i}$, d'où

$$c_m^{ij} = (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{[2m]_{q_j}} c_m^{jj}.$$

□

LEMME 6. – $\forall m > 0$, $\forall i, j \in I_0$ *on a*

$$m[a_{ij}]_{q_i} c_m^{ij} = (o(i)o(j))^{m-1}[ma_{ij}]_{q_i} c_1^{ij}.$$

Preuve. – Soit $\tilde{\pi}_j : \mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+ \to \oplus_{m>0}\mathbb{C}(q)E_{m\delta-\alpha_j}K_j \otimes E_j$ la projection par rapport à la base $\{E(-\underline{\gamma})K_\lambda \otimes E(-\underline{\gamma}')\}$ de $\mathcal{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathcal{U}_q^+$ et soient $r, s > 0$; alors

$$\tilde{\pi}_j(\Delta(E_{(r\delta,i)}E_{(s\delta,i)})) =$$
$$= \tilde{\pi}_j\big(\tilde{\pi}_j(\Delta(E_{(r\delta,i)}))(E_{(s\delta,i)} \otimes 1) + (E_{(r\delta,i)} \otimes 1)\tilde{\pi}_j(\Delta(E_{(s\delta,i)}))\big) =$$
$$= \tilde{\pi}_j\big((c_r^{ij}E_{r\delta-\alpha_j}E_{(s\delta,i)} + c_s^{ij}E_{(r\delta,i)}E_{s\delta-\alpha_j})K_j \otimes E_j\big) = c_r^{ij}[E_{r\delta-\alpha_j}, E_{(s\delta,i)}]K_j \otimes E_j =$$
$$= c_r^{ij}(o(i)o(j))^s \frac{[sa_{ij}]_{q_i}}{s} E_{(r+s)\delta-\alpha_j}K_j \otimes E_j;$$

mais $E_{(r\delta,i)}E_{(s\delta,i)} = E_{(s\delta,i)}E_{(r\delta,i)}$, donc on trouve que

$$c_r^{ij}(o(i)o(j))^s \frac{[sa_{ij}]_{q_i}}{s} = c_s^{ij}(o(i)o(j))^r \frac{[ra_{ij}]_{q_i}}{r};$$

en particulier pour $r = m, s = 1$ on obtient l'assertion. □

LEMME 7. – $\forall i \in I_0$ $c_1^{ii} = (1 - q_i^{-4})$.

Preuve.

$$\pi_i(\Delta(E_{(\delta,i)})) = -\pi_i(\Delta(\tilde{E}_{(\delta,i)})) = \pi_i(\Delta(E_{\delta-\alpha_i}E_i - q_i^{-2}E_iE_{\delta-\alpha_i})) =$$
$$= \pi_i(\Delta(E_{\delta-\alpha_i}))(E_i \otimes 1) - q_i^{-2}(E_i \otimes 1)\pi_i(\Delta(E_{\delta-\alpha_i}))+$$
$$+(E_{\delta-\alpha_i}K_i - q_i^{-2}K_iE_{\delta-\alpha_i}) \otimes E_i =$$
$$= (1 - q_i^{-4})E_{\delta-\alpha_i}K_i \otimes E_i$$

comme $\pi_i(\Delta(E_{\delta-\alpha_i})) = 0$ (car $2\alpha_i \notin \Phi_{0,+}$). □

PROPOSITION 8. – $\forall m > 0$, $\forall i, j \in I_0$ $c_m^{ij} = -(o(i)o(j))^m q_j^{-2}(q_j^{-1} - q_j)\dfrac{[ma_{ij}]_{q_i}}{m}$.

Preuve.

$$c_m^{ij} = (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{[2m]_{q_j}} c_m^{jj} =$$
$$= (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{[2m]_{q_j}} \frac{[2m]_{q_j}}{m[2]_{q_j}}(1 - q_j^{-4}) = -(o(i)o(j))^m q_j^{-2}(q_j^{-1} - q_j)\frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{m}.$$

□

COROLLAIRE 9. – $\forall m > 0$, $\forall i, j \in I_0$ *on a*

$$(E_{(m\delta,i)}, F_{(m\delta,j)}) = (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{m(q_j^{-1} - q_j)}.$$

Preuve.

$$(E_{(m\delta,i)}, F_{(m\delta,j)}) = -q_j^2 \frac{c_m^{ij}}{(q_j^{-1} - q_j)^2} =$$
$$= (o(i)o(j))^m \frac{[ma_{ij}]_{q_i}}{m(q_j^{-1} - q_j)}.$$

□

10. Deux bases duales

REMARQUE 1. – Comme on a que $\forall r > 0$ et $\forall i, j \in I_0$

$$[E_{(r\delta,i)}, F_{(r\delta,j)}] = (o(i)o(j))^r \frac{[ra_{ij}]_{q_i}}{r(q_j - q_j^{-1})}(K_{r\delta} - K_{r\delta}^{-1}),$$

il s'ensuit que $(E_{(r\delta,i)}, F_{(r\delta,j)})$ est le coefficient de $(K_{r\delta}^{-1} - K_{r\delta})$ dans $[E_{(r\delta,i)}, F_{(r\delta,j)}]$, c'est-à-dire

$$[E_{(r\delta,i)}, F_{(r\delta,j)}] = (E_{(r\delta,i)}, F_{(r\delta,j)})(K_{r\delta}^{-1} - K_{r\delta});$$

plus généralement si x est une combinaison linéaire des $E_{(r\delta,i)}$ et y est une combinaison linéaire des $F_{(r\delta,i)}$ où $r > 0$ a été fixé, on a

$$[x, y] = (x, y)(K_{r\delta}^{-1} - K_{r\delta}),$$

et en particulier $(\Omega(y), \Omega(x)) = -\Omega((x, y))$, car $\Omega([x, y]) = [\Omega(y), \Omega(x)]$ et $\Omega(K_{r\delta} - K_{r\delta}^{-1}) = -(K_{r\delta} - K_{r\delta}^{-1})$.

Le corollaire 9.9 entraîne, en particulier, que les deux bases $\{E(-\underline{\gamma})\}$ de $\mathcal{U}_q^+$ et $\{F(-\underline{\gamma})\}$ de $\mathcal{U}_q^-$ ne sont pas duales par rapport à la forme de Killing; mais elle fournit aussi la façon de trouver de nouveaux vecteurs qui produisent deux bases duales. Dans ce but, on rappelle qu'il existe (voir [4]) des éléments $A_{ij}^{\prime(m)} \in \mathbb{C}(q)$ (stables par Ω) tels que si on pose

$$\bar{F}_{(r\delta,i)} \doteqdot \sum_{j \geq i} o(j)^r [d_j]_q A_{ij}^{\prime(r)} F_{(r\delta,j)}$$

on a que $\forall i > j$

$$[E_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,j)}] = 0.$$

Or, si on définit $\bar{E}_{(r\delta,i)} \doteqdot \Omega(\bar{F}_{(r\delta,i)})$, on a que $\bar{E}_{(r\delta,i)}$ est une combinaison linéaire des $E_{(r\delta,j)}$ avec $j \geq i$, donc en particulier on a encore que si $i > j$

$$[\bar{E}_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,j)}] = 0,$$

d'où $(\bar{E}_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,j)}) = 0$; mais alors si $i < j$

$$(\bar{E}_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,j)}) = (\Omega(\bar{F}_{(r\delta,i)}), \Omega(\bar{E}_{(r\delta,j)})) = -\Omega((\bar{E}_{(r\delta,j)}, \bar{F}_{(r\delta,i)})) = 0$$

c'est-à-dire que

$$(\bar{E}_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,j)}) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

□

DÉFINITION 2. – $\forall \alpha \in \Phi_+^{\mathrm{re}}$ on pose

$$\bar{E}_\alpha \doteqdot E_\alpha, \quad \bar{F}_\alpha \doteqdot F_\alpha.$$

$\forall \alpha \in \Phi_+(\mathrm{im})$ $\bar{E}_\alpha$ et $\bar{F}_\alpha$ sont définis comme dans la remarque 1.

LEMME 3. – *Soient* $\alpha \in \tilde{\Phi}_+$ et $\underline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_r) \in \mathcal{P}$; *si*

$$(\bar{E}_\alpha, \bar{F}(-\underline{\gamma})) \neq 0 \;\; ou\ bien \;\; (\bar{E}(-\underline{\gamma}), \bar{F}_\alpha) \neq 0$$

on a $\underline{\gamma} = (\alpha)$.

Preuve. – L'assertion est une conséquence immédiate de la proposition 8.1 et de la remarque 1. □

LEMME 4. – *Soit* $\underline{\gamma}' = (\gamma_1' \succeq' ... \succeq' \gamma_r')$ *avec* $r > 0$ *et* $\gamma_i' \in \Phi_+(\tilde{\infty})$ $\forall i = 1, ..., r$, *et soit* $\underline{\gamma}'' = (\gamma_1'' \succeq' ... \succeq' \gamma_s'')$; *si*

$$E(-\underline{\gamma}'')E(-\underline{\gamma}') = \sum_{\underline{\gamma}} a_{\underline{\gamma}} E(-\underline{\gamma}), \quad F(-\underline{\gamma}'')F(-\underline{\gamma}') = \sum_{\underline{\gamma}} b_{\underline{\gamma}} F(-\underline{\gamma})$$

et si $\underline{\gamma} = (\gamma_1 \succeq' ... \succeq' \gamma_t)$ *est tel que ou bien* $a_{\underline{\gamma}} \neq 0$ *ou bien* $b_{\underline{\gamma}} \neq 0$, *alors soit*

(i) $\{\gamma_i', \gamma_j'' | i = 1, ..., r;\ j = 1, ..., s\} \subseteq \Phi_+(-\tilde{\infty})$ *et alors* $\{\gamma_i' | i = 1, ..., r\} \subseteq \{\gamma_k | k = 1, ..., t\}$,

soit

(ii) $\{\gamma_i', \gamma_j'' | i = 1, ..., r;\ j = 1, ..., s\} \not\subseteq \Phi_+(-\tilde{\infty})$ *et alors* $\gamma_1 \succeq' \gamma_r'$ *avec* $\gamma_1 \in \Phi_+(\infty)$.

Preuve. – Si $\{\gamma_j''\} \subseteq \Phi_+(-\tilde{\infty})$ ou bien $\gamma_1'' \preceq' \gamma_r'$ on a évidemment

$$E(-\underline{\gamma}'')E(-\underline{\gamma}') = E(-(\underline{\gamma}', \underline{\gamma}'')), \quad F(-\underline{\gamma}'')F(-\underline{\gamma}') = F(-(\underline{\gamma}', \underline{\gamma}''))$$

et l'assertion est évidente.

Si par contre $\gamma_1'' \in \Phi_+(\infty)$ et $\gamma_1'' \succ' \gamma_r'$ on a

$$E_{\gamma_1''}E(-\underline{\gamma}') = \sum a_{\underline{\tilde{\gamma}}} E(-\underline{\tilde{\gamma}}) \quad F_{\gamma_1''}F(-\underline{\gamma}') = \sum b_{\underline{\tilde{\gamma}}} F(-\underline{\tilde{\gamma}})$$

où si $\underline{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1 \succeq' ... \succeq' \tilde{\gamma}_u)$ et $a_{\tilde{\gamma}} \neq 0$ ou bien $b_{\tilde{\gamma}} \neq 0$ on a $\tilde{\gamma}_1 \succeq' \tilde{\gamma}_u \succeq' \gamma_r'$.

Le lemme suit immédiatement. □

PROPOSITION 5. – *Soient* $\underline{\gamma} = (\gamma_1 \preceq ... \preceq \gamma_r), \underline{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1 \preceq ... \preceq \tilde{\gamma}_s) \in \mathrm{Par}(\eta)$; *si* $\underline{\gamma} \neq \underline{\tilde{\gamma}}$ *on a*

$$(\bar{E}(-\underline{\gamma}), \bar{F}(-\underline{\tilde{\gamma}})) = 0.$$

Preuve. – On prouve l'assertion par récurrence sur $\mathrm{ht}(\eta)$, en se rappelant qu'on sait déjà qu'elle est vraie si $\gamma_1, \tilde{\gamma}_1 \in \Phi_+(-\infty)$ (c'est-à-dire $\gamma_i, \tilde{\gamma}_j \in \Phi_+(-\infty)$ $\forall i, j$).

Il s'agit alors de prouver que $(\bar{E}(-\underline{\xi})\bar{E}_\beta^{\delta_{M,0}}\bar{E}_\alpha^M, \bar{F}(-\underline{\theta})\bar{F}_\beta^{\delta_{\tilde{M},0}}\bar{F}_\alpha^{\tilde{M}}) = 0$ quand

(i) $\alpha \in \Phi_+(\tilde{\infty})$;

(ii) $\alpha \succ' \beta$;

(iii) $\underline{\xi} = (\xi_1 \succeq' ... \succeq' \xi_u)$, $\underline{\theta} = (\theta_1 \succeq' ... \succeq' \theta_v)$ avec $\alpha \succ' \xi_1$ et $\alpha \succ' \theta_1$; de plus $\beta \succeq' \xi_1$ si $M = 0$ et $\beta \succeq' \theta_1$ si $\tilde{M} = 0$;

(iv) $M, \tilde{M} \geq 0$ et $M + \tilde{M} > 0$;

(v) si $M = \tilde{M}$ alors $\underline{\xi} \neq \underline{\theta}$.

Supposons d'abord $M \geq \tilde{M}$; alors

$$(\bar{E}(-\underline{\xi})\bar{E}_\beta^{\delta_{M,0}}\bar{E}_\alpha^M, \bar{F}(-\underline{\theta})\bar{F}_\beta^{\delta_{\tilde{M},0}}\bar{F}_\alpha^{\tilde{M}}) = (\Delta(\bar{E}(-\underline{\xi})\bar{E}_\alpha^M), \bar{F}(-\underline{\theta}) \otimes \bar{F}_\beta^{\delta_{\tilde{M},0}}\bar{F}_\alpha^{\tilde{M}});$$

or $\Delta(\bar{E}_\alpha)^M - K^M_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}^M_\alpha$ est une combinaison linéaire de vecteurs $\bar{E}(-\underline{\gamma}')K_\lambda \otimes x_{\underline{\gamma}'}$ où $\underline{\gamma}'$ satisfait aux conditions du lemme 4 avec $\gamma'_r \succeq' \alpha$; de plus si $\gamma'_1 \in \bar{\Phi}_+(\mathrm{im})$ on a $\gamma'_1 = \ldots = \gamma'_r = \alpha$.

Donc
$$\Delta(\bar{E}(-\underline{\xi}))(\Delta(\bar{E}_\alpha)^M - K^M_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}^M_\alpha) = \sum \bar{E}(-\underline{\gamma})K_\lambda \otimes \tilde{x}_{\underline{\gamma}}$$
où, si $\tilde{x}_{\underline{\gamma}} \neq 0$, ou bien $\mu^\alpha_{\underline{\gamma}} > 0$, ou bien $\underline{\gamma} = (\gamma_1 \succeq' \ldots \succeq' \gamma_t)$ avec $\gamma_1 \succeq' \alpha$; en particulier $(\bar{E}(-\underline{\gamma}), \bar{F}(-\underline{\theta})) = 0$, d'où
$$(\Delta(\bar{E}(-\underline{\xi}))(\Delta(\bar{E}_\alpha)^M - K^M_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}^M_\alpha), \bar{F}(-\underline{\theta}) \otimes \bar{F}^{\delta_{\tilde{M},0}}_\beta \bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha) = 0;$$
mais $(\Delta(\bar{E}(-\underline{\xi}))(K^M_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}^M_\alpha), \bar{F}(-\underline{\theta}) \otimes \bar{F}^{\delta_{\tilde{M},0}}_\beta \bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha) = 0$ car soit $M > \tilde{M} > 0$, soit $M = \tilde{M} > 0$ et $\underline{\xi} \neq \underline{\theta}$, soit $M > \tilde{M} = 0$ et l'assertion suit en appliquant encore le lemme 4 (avec $\underline{\gamma}' = (\alpha, \ldots, \alpha)$) et en rappelant que $\beta \prec' \alpha$.

Ainsi $(\bar{E}(-\underline{\xi})\bar{E}^M_\alpha, \bar{F}(-\underline{\theta})\bar{F}^{\delta_{\tilde{M},0}}_\beta \bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha) = 0$.

De même, si $M < \tilde{M}$,
$$(\bar{E}(-\underline{\xi})\bar{E}^{\delta_{M,0}}_\beta \bar{E}^M_\alpha, \bar{F}(-\underline{\theta})\bar{F}^{\delta_{\tilde{M},0}}_\beta \bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha) = (\bar{E}^{\delta_{M,0}}_\beta \bar{E}^M_\alpha \otimes \bar{E}(-\underline{\xi}), \Delta(\bar{F}(-\underline{\theta})\bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha));$$
or $\Delta(\bar{F}_\alpha)^{\tilde{M}} - \bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha \otimes K^{-\tilde{M}}_{p(\alpha)}$ est une combinaison linéaire de vecteurs $y_{\underline{\gamma}'} \otimes \bar{F}(-\underline{\gamma}')K_\lambda$ où $\underline{\gamma}'$ satisfait aux conditions du lemme 4 avec $\gamma'_r \succeq' \alpha$; de plus si $\gamma'_1 \in \Phi_+(\mathrm{im})$ on a $\gamma'_1 = \ldots = \gamma'_r = \alpha$.

Donc
$$\Delta(\bar{F}(-\underline{\theta}))(\Delta(\bar{F}_\alpha)^{\tilde{M}} - \bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha \otimes K^{-\tilde{M}}_{p(\alpha)}) = \sum \tilde{y}_{\underline{\gamma}} \otimes \bar{F}(-\underline{\gamma})K_\lambda$$
où, si $\tilde{y}_{\underline{\gamma}} \neq 0$, ou bien $\mu^\alpha_{\underline{\gamma}} > 0$, ou bien $\underline{\gamma} = (\gamma_1 \succeq' \ldots \succeq' \gamma_t)$ avec $\gamma_1 \succeq' \alpha$; en particulier $(\bar{E}(-\underline{\xi}), \bar{F}(-\underline{\gamma})) = 0$, d'où
$$(\bar{E}^{\delta_{M,0}}_\beta \bar{E}^M_\alpha \otimes \bar{E}(-\underline{\xi}), \Delta(\bar{F}(-\underline{\theta}))(\Delta(\bar{F}_\alpha)^{\tilde{M}} - \bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha \otimes K^{\tilde{M}}_{p(\alpha)})) = 0;$$
mais $(\bar{E}^{\delta_{M,0}}_\beta \bar{E}^M_\alpha \otimes \bar{E}(-\underline{\xi}), \Delta(\bar{F}(-\underline{\theta}))(\bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha \otimes K^{\tilde{M}}_{p(\alpha)})) = 0$, car ou bien $0 < M < \tilde{M}$, ou bien $0 = M < \tilde{M}$ et l'assertion suit en appliquant encore le lemme 4 et en rappelant que $\beta \prec' \alpha$.

Ainsi $(\bar{E}(-\xi)\bar{E}^{\delta_{M,0}}_\beta \bar{E}^M_\alpha, \bar{F}(-\theta)\bar{F}^{\tilde{M}}_\alpha) = 0$. □

Il ne reste maintenant qu'à calculer
$$(\bar{E}(-\underline{\gamma}), \bar{F}(-\underline{\gamma})).$$

LEMME 6. – *Soit* $\underline{\gamma} \in \mathrm{Par}(\eta)$; *alors*
$$(\bar{E}(-\underline{\gamma}), \bar{F}(-\underline{\gamma})) = \prod_{\alpha \in \tilde{\Phi}_+} (\bar{E}^{\mu^\alpha_{\underline{\gamma}}}_\alpha, \bar{F}^{\mu^\alpha_{\underline{\gamma}}}_\alpha).$$

Preuve. – On utilise ici le même argument qu'on a utilisé pour démontrer la proposition 5: en effet, on sait déjà que l'assertion est vraie si $\mu^\alpha_{\underline{\gamma}} = 0 \ \forall \alpha \notin \Phi_+(-\infty)$; d'un autre côté si $\underline{\gamma} = (\alpha, \ldots, \alpha, \underline{\gamma}')$ où $\alpha \in \Phi_+(\tilde{\infty})$ et $\mu^\beta_{\underline{\gamma}'} = 0 \ \forall \beta \succeq' \alpha$, on a vu que
$$(\bar{E}(-\underline{\gamma}), \bar{F}(-\underline{\gamma})) = (\bar{E}(-\underline{\gamma}')(K^{\mu^\alpha_{\underline{\gamma}}}_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}^{\mu^\alpha_{\underline{\gamma}}}_\alpha), \bar{F}(-\underline{\gamma}') \otimes \bar{F}^{\mu^\alpha_{\underline{\gamma}}}_\alpha) =$$

$$= (\bar{E}(-\underline{\gamma}'), \bar{F}(-\underline{\gamma}'))(\bar{E}_\alpha^{\mu_{\underline{\gamma}}^\alpha}, \bar{F}_\alpha^{\mu_{\underline{\gamma}}^\alpha}),$$

d'où la preuve du lemme par récurrence sur $\mathrm{ht}(\eta)$. □

LEMME 7. – *Soit* $\alpha \in \Phi_+(\mathrm{im})$ *et soit* $r \in \mathbb{N}$; *alors*

$$(\bar{E}_\alpha^r, \bar{F}_\alpha^r) = r!(\bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha)^r.$$

Preuve. – On sait que

$$\Delta(\bar{E}_\alpha) - (\bar{E}_\alpha \otimes 1 + K_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}_\alpha) \in \sum_{m>0, \eta_0 \in Q_{0,+}\setminus\{0\}} \mathcal{U}^{\geq 0}_{q, m\delta - \eta_0} \otimes \mathcal{U}_q$$

donc on a aussi que

$$\Delta(\bar{E}_\alpha^r) - (\bar{E}_\alpha \otimes 1 + K_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}_\alpha)^r \in \sum_{m>0, \eta_0 \in Q_{0,+}\setminus\{0\}} \mathcal{U}^{\geq 0}_{q, m\delta - \eta_0} \otimes \mathcal{U}_q;$$

en particulier

$$(\bar{E}_\alpha^r, \bar{F}_\alpha^r) = (\Delta(\bar{E}_\alpha^r), \bar{F}_\alpha^{r-1} \otimes \bar{F}_\alpha) = ((\bar{E}_\alpha \otimes 1 + K_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}_\alpha)^r, \bar{F}_\alpha^{r-1} \otimes \bar{F}_\alpha) =$$

$$= \left(\sum_{u=0}^{r} \binom{r}{u} \bar{E}_\alpha^u K_{p(\alpha)}^{r-u} \otimes \bar{E}_\alpha^{r-u}, \bar{F}_\alpha^{r-1} \otimes \bar{F}_\alpha\right) = (r\bar{E}_\alpha^{r-1} K_{p(\alpha)} \otimes \bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha^{r-1} \otimes \bar{F}_\alpha) =$$

$$= r(\bar{E}_\alpha^{r-1}, \bar{F}_\alpha^{r-1})(\bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha)$$

et l'assertion suit par récurrence sur r. □

LEMME 8. – *Soient* $r > 0$ *et* $i \in I_0$; *alors*

$$(\bar{E}_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,i)}) = \frac{[d_i]_q A_{ii}^{\prime(r)} [r]_q \bar{c}_i^{(r)}}{r(q_i^{-1} - q_i)},$$

où $\bar{c}_i^{(r)}$ *est tel que* $[E_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,i)})] = \dfrac{o(i)^r [r]_q \bar{c}_i^{(r)}}{r(q_i - q_i^{-1})}(K_{r\delta} - K_{r\delta}^{-1})$.

Preuve.

$$(\bar{E}_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,i)}) = (\sum_{j \geq i} o(j)^r [d_j]_q A_{ij}^{\prime(r)} E_{(r\delta,j)}, \bar{F}_{(r\delta,i)}) =$$

$$= (o(i)^r [d_i]_q A_{ii}^{\prime(r)} E_{(r\delta,i)}, \bar{F}_{(r\delta,i)}) =$$

$$= \frac{[d_i]_q A_{ii}^{\prime(r)} [r]_q \bar{c}_i^{(r)}}{r(q_i^{-1} - q_i)}.$$

□

PROPOSITION 9. – $\forall \underline{\gamma} \in \mathcal{P}$ *soit*

$$k_{\underline{\gamma}} \doteqdot \Big(\prod_{\alpha \in \tilde{\Phi}_+} \frac{(\mu_{\underline{\gamma}}^\alpha)_\alpha!}{(q_\alpha^{-1} - q_\alpha)^{\mu_{\underline{\gamma}}^\alpha}} \Big) \prod_{r>0, i \in I_0} \Big(\frac{[r]_q [d_i]_q A_{ii}^{\prime(r)} \bar{c}_i^{(r)}}{r} \Big)^{\mu_{\underline{\gamma}}^{(r\delta,i)}};$$

alors $\left\{ \dfrac{\bar{E}(-\underline{\gamma})}{k_{\underline{\gamma}}} | \underline{\gamma} \in \mathcal{P} \right\}$ et $\{\bar{F}(-\underline{\gamma}) | \underline{\gamma} \in \mathcal{P}\}$ *sont bases duales par rapport à la forme de Killing.*

Preuve. – La proposition 5 et le fait que la forme de Killing soit non-dégénérée entraînent que $\left\{ \dfrac{\bar{E}(-\underline{\gamma})}{(\bar{E}(-\underline{\gamma}), \bar{F}_{(-\underline{\gamma})})} | \underline{\gamma} \in \mathcal{P} \right\}$ et $\{\bar{F}(-\underline{\gamma}) | \underline{\gamma} \in \mathcal{P}\}$ sont deux bases duales par rapport à la forme de Killing. Donc il suffit de prouver que $k_{\underline{\gamma}} = (\bar{E}(-\underline{\gamma}), \bar{F}(-\underline{\gamma}))$, ce qui est une conséquence immédiate des lemmes 6, 7, 8 et du théorème 4.4. □

11. La R-matrice: formule multiplicative

Dans ce paragraphe, on recueille les résultats obtenus et on fournit ainsi une formule explicite pour la R-matrice.

Dans ce but, on rappelle le fait suivant:

LEMME 1. – *$\forall r > 0$ $\forall i \in I_0 \setminus \{1\}$ (c'est-à dire $i = 2, \ldots, n$) on a $\bar{c}_i^{(r)} = A'^{(r)}_{i-1,i-1}$; de plus $\forall r > 0$ $\forall j \leq k \in I_0$, $A'^{(r)}_{j,k}$ et $\bar{c}_1^{(r)}$ sont donnés par la liste suivante:*

$$A_n^{(1)}: \qquad \begin{aligned} A'^{(r)}_{j,k} &= [n-k+1]_{q^r} \quad \forall k \geq j \\ \bar{c}_1^{(r)} &= [n+1]_{q^r} \end{aligned}$$

$$B_n^{(1)}: \qquad \begin{aligned} A'^{(r)}_{j,k} &= [n-k+1]_{q^{2r}}[2]_{q^r}^{n-j} \quad \forall k \geq j \\ \bar{c}_1^{(r)} &= [2]_{q^r}^{n-1}[2]_{q^{r(2n-1)}} \end{aligned}$$

$$C_n^{(1)}: \qquad \begin{aligned} A'^{(r)}_{j,k} &= \begin{cases} [n-k+1]_{q^r} & si\ k \geq j > 1\ ou\ k = j = 1 \\ [n-k+1]_{q^r}[2]_{q^r} & si\ k > j = 1 \end{cases} \\ \bar{c}_1^{(r)} &= [2]_{q^r}[2]_{q^{r(n+1)}} \end{aligned}$$

$$D_n^{(1)}: \qquad \begin{aligned} A'^{(r)}_{j,k} &= \begin{cases} [n-k+1]_{q^r} & si\ k \geq j > 1\ ou\ k = j = 1 \\ [n-k+1]_{q^r}[2]_{q^r} & si\ k > j+1 = 2 \\ [n-2]_{q^r} & si\ k = 2,\ j = 1 \end{cases} \\ \bar{c}_1^{(r)} &= [2]_{q^r}[2]_{q^{r(n-1)}} \end{aligned}$$

$$E_n^{(1)}: \qquad \begin{aligned} A'^{(r)}_{j,k} &= \begin{cases} [n-k+1]_{q^r} & si\ k \geq j > 1\ ou\ k = j = 1 \\ [k-1]_{q^r}[n-3]_{q^r} & si\ j = 1 < k < 4 \\ [n-k+1]_{q^r}[3]_{q^r} & si\ j = 1,\ k \geq 4 \end{cases} \\ \bar{c}_1^{(r)} &= \begin{cases} \dfrac{[9-n]_{q^r}[2]_{q^{3(n-4)r}}}{[2]_{q^{2(n-4)r}}} & si\ n = 6, 7 \\ [2]_{q^r}[2]_{q^{7r}} - [3]_{q^r} & si\ n = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$F_4^{(1)}: \qquad \begin{aligned} A'^{(r)}_{j,k} &= \begin{cases} [5-k]_{q^{2r}}[2]_{q^r}^{4-j} & si\ k \geq j > 1 \\ [2]_{q^r}^2[2]_{q^{5r}} & si\ k = j = 1 \\ [5-k]_{q^{2r}}[2]_{q^r}^2 & si\ k > j = 1 \end{cases} \\ \bar{c}_1^{(r)} &= [2]_{q^r}^2 \frac{[2]_{q^{9r}}}{[2]_{q^{3r}}} \end{aligned}$$

$$G_2^{(1)}: \qquad \begin{aligned} A'^{(r)}_{j,k} &= \begin{cases} [3-k]_{q^{3r}}[3]_{q^r} & si\ k \geq j = 1 \\ 1 & si\ k = j = 2 \end{cases} \\ \bar{c}_1^{(r)} &= \frac{[3]_{q^r}[2]_{q^{6r}}}{[2]_{q^{2r}}}. \end{aligned}$$

Preuve. – Cf. [4]. □

THÉORÈME 2. – *Soit $\hat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Kac-Moody de type affine non tordu associée à la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de dimension finie $\mathfrak{g}$; alors la R-matrice de $\hat{\mathfrak{g}}$ est donnée par*

$$R_{\hat{\mathfrak{g}}} = \left(\prod_{\alpha \in \tilde{\Phi}_+} \exp_\alpha((q_\alpha^{-1} - q_\alpha) c_\alpha \bar{E}_\alpha \otimes \bar{F}_\alpha) \right) q^{-t_\infty}$$

où le produit est effectué de manière décroissante pour l'ordre $\prec$, et

$$c_\alpha \doteq \begin{cases} 1 & si\ \alpha \in \Phi_+^{\mathrm{re}} \\ \dfrac{r}{[r]_q [d_i]_q A'^{(r)}_{ii} \bar{c}^{(r)}_i} & si\ \alpha = (r\delta, i)\,. \end{cases}$$

Preuve. – On sait du théorème 3.4 et de la proposition 10.9 que

$$R = \Big(\sum_{\underline{\gamma} \in \mathrm{Par}} \frac{1}{k_{\underline{\gamma}}} \bar{E}(-\underline{\gamma}) \otimes \bar{F}(-\underline{\gamma}) \Big) q^{-t_\infty};$$

mais

$$\frac{1}{k_{\underline{\gamma}}} \bar{E}(-\underline{\gamma}) \otimes \bar{F}(-\underline{\gamma}) = \prod_{\alpha \in \tilde{\Phi}_+} \frac{((q_\alpha^{-1} - q_\alpha) c_\alpha \bar{E}_\alpha \otimes \bar{F}_\alpha)^{\mu^\alpha_{\underline{\gamma}}}}{(\mu^\alpha_{\underline{\gamma}})_\alpha !},$$

d'où l'assertion suit immédiatement. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BECK, *Braid group action and quantum affine algebras*, (*Commun. Math. Phys.*, vol. 165, 1994, p. 555-568).

[2] J. BECK, *Convex bases of PBW type for quantum affine algebras*, (*Commun. Math. Phys.*, vol. 165, 1994, p. 193-199).

[3] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie 4, 5, 6*, Hermann, Paris, 1968.

[4] I. DAMIANI, *The Highest Coefficient of detH_η and the Center of the Specialization at Odd Roots of Unity for Untwisted Affine Quantum Algebras*, (*J. Algebra*, vol. 186, 1996, p. 736-780).

[5] I. DAMIANI et C. DE CONCINI, *Quantum groups and Poisson groups* in (*Baldoni-Picardello, Representations of Lie groups and quantum groups, Longman Scientific and Technical*, 1994, p. 1-45).

[6] C. DE CONCINI, V. G. KAC, *Representations of quantum groups at roots of 1*, (*Progr. in Math.*, vol. 92, 1990, p. 471-506, Birkhäuser).

[7] V. G. DRINFELD, *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, (*Soviet Math. Dokl.*, vol. 36, 1988, n° 2, p. 212-216).

[8] V. G. DRINFELD, *Hopf algebras and quantum Yang-Baxter equation*, (*Soviet Math. Dokl.*, vol. 32, 1985, p. 254-258).

[9] V. G. DRINFELD, *Quantum groups*, (*Proc. ICM, Berkeley*, 1986, p. 798-820).

[10] J. E. HUMPHREYS, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, (Springer-Verlag, USA 1972).

[11] M. JIMBO, *A q-difference analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, (*Lett. Math. Phys.*, vol. 10, 1985, p. 63-69).

[12] V. G. KAC, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, (Birkhäuser Boston, Inc., USA, 1983).

[13] V. G. KAC et D. A. KAZHDAN, *Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras*, (*Adv. Math.*, vol. 34, 1979, p. 97-108).

[14] S. M. KHOROSHKIN et V. N. TOLSTOY, *Universal R-matrix for quantized(super) algebras*, (*Commun. Math. Phys.*, vol. 141, 1991, p. 599-617).

[15] S. M. KHOROSHKIN et V. N. TOLSTOY, *The universal R-matrix for quantum nontwisted affine Lie algebras*, (*Funkz. Analiz i ego pril.*, vol. 26:1, 1992, p. 85-88).

[16] A. N. KIRILLOV et N. RESHETIKHIN, *q-Weyl Group and a Multiplicative Formula for Universal R-Matrices*, (*Commun. Math. Phys.*, vol. 134, 1990, p. 421-431).

[17] S. Z. LEVENDORSKII et Ya. S. SOIBELMAN, *Quantum Weyl group and multiplicative formula for the R-matrix of a simple Lie algebra*, (*Funct. Analysis and its Appl.*, 2 vol. 25, 1991, p. 143-145).

[18] S. Z. LEVENDORSKII et Ya. S. SOIBELMAN, Some applications of quantum Weyl group I, (*J. Geom. Phys.*, vol. 7, 1990, p. 241-254).

[19] S. Z. LEVENDORSKII, Ya. S. SOIBELMAN et V. STUKOPIN, *The Quantum Weyl Group and the Universal Quantum R-Matrix for Affine Lie Algebra $A_1^{(1)}$*, (*Lett. Math. Phys.*, vol. 27, 1993, p. 253-264).

[20] G. LUSZTIG, *Finite-dimensional Hopf algebras arising from quantum groups*, (*J. Amer. Math. Soc.*, vol. 3, 1990, p. 257-296).

[21] G. LUSZTIG, *Introduction to quantum groups*, (Birkhäuser Boston, USA, 1993).
[22] G. LUSZTIG, *Quantum groups at roots of 1*, (*Geom. Ded.*, vol. 35, 1990, p. 89-113).
[23] H. MATSUMOTO, *Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés*, (*C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 258, Série II, 1964, p. 3419-3422).
[24] M. ROSSO, *An Analogue of P.B.W. Theorem and the Universal R-Matrix for $U_h sl(N+1)$*, (*Commun. Math. Phys.*, vol. 124, 1989, p. 307).
[25] M. ROSSO, *Certaines formes bilinéaires sur les groupes quantiques et une conjecture de Schechtman et Varchenko*, (*C. R. Acad. Sci. Paris* , tome 314, Série I, 1992, p. 5-8).
[26] T. TANISAKI, *Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms and universal R-matrices for Quantum Algebras*, in (*Infinite Analysis Part B, Adv. Series in Math. Phys.*, vol. 16, 1992, p. 941-962).

(Manuscrit reçu le 23 juillet 1996;
accepté définitivement,
après révision, le 5 décembre 1997.)

I. DAMIANI
Dipartimento di Matematica,
Università degli Studi di Torino
Via Carlo Alberto, 10,
10123 Torino, Italie.