Annales scientifiques de l'É.N.S.

Patrick Polo

Diagrammes de Dynkin et algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie semi-simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 31, nº 5 (1998), p. 631-657
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1998_4_31_5_631_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 31, 1998, p. 631 à 657.

DIAGRAMMES DE DYNKIN ET ALGÈBRES ENVELOPPANTES D'ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

PAR PATRICK POLO

ABSTRACT. – Let $\mathfrak{g}$ be a semi-simple complex Lie algebra, $U = U(\mathfrak{g})$ its enveloping algebra, and A a minimal primitive factor of U, with central character χ. Under the assumption that χ is regular and integral, we prove that the Dynkin diagram of $\mathfrak{g}$ is a Morita invariant of A. Further, a slight refinement implies that the flag variety of $\mathfrak{g}$ is determined, within all generalized flag varieties, by its ring of differential operators.

Then we derive the following consequences. First, if $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}')$, for some Lie algebra $\mathfrak{g}'$, then $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{g}$. Second, any automorphism of U acts on the centre, and on some dense open subset of the primitive spectrum, as a diagram automorphism. We conjecture that this result holds true on the whole primitive spectrum, and give K-theoretic versions of the result and the conjecture. We also improve a key result of [1]. Finally, when χ is only assumed to be regular, we prove, using a result of Soergel, that the Weyl group of $\mathfrak{g}$ is a Morita invariant of A. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $U = U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, et A un quotient primitif minimal de U, de caractère central χ. Sous l'hypothèse que χ soit régulier et entier, nous montrons que le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ est un invariant de Morita de A. Une légère généralisation entraîne que la variété des drapeaux de $\mathfrak{g}$ est déterminée, parmi toutes les variétés de drapeaux généralisées, par son anneau d'opérateurs différentiels. Nous obtenons ensuite les conséquences suivantes. Premièrement, si $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}')$, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$, alors $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{g}$. Deuxièmement, tout automorphisme de U agit sur le centre, et sur un ouvert dense du spectre primitif, comme un automorphisme de diagramme. Nous conjecturons que ce résultat a lieu sur tout le spectre primitif, et nous donnons des variantes en K-théorie du résultat et de la conjecture. Nous améliorons aussi un résultat-clé de [1]. Enfin, lorsque χ est seulement supposé régulier, nous montrons, en utilisant un résultat de Soergel, que le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ est un invariant de Morita de A. © Elsevier, Paris

0. Introduction

0.1. Dans la partie 1 de cet article, nous définissons l'indice de Joseph d'un bimodule, qui jouera un rôle important dans la suite, et montrons que cet indice est conservé par équivalence de Morita. Nous y rappelons (ou établissons) aussi certaines propriétés de l'équivalence de Morita.

0.2. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur k, un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $U = U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, Z le centre de U, et $\mathrm{Prim}(U)$ le spectre primitif de U. On note π l'application $\mathrm{Prim}(U) \to \mathrm{Max}(Z)$, $I \mapsto I \cap Z$. Après avoir rappelé, dans la partie 2, plusieurs résultats importants concernant les idéaux primitifs de U, nous démontrons le théorème suivant dans la partie 3.

THÉORÈME A (voir 3.1). – *Soit I (resp. I') un idéal primitif minimal de $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\mathfrak{g}')$), où $\mathfrak{g}'$ est une seconde k-algèbre de Lie semi-simple. Si U/I a un quotient de dimension finie et est Morita équivalent à U'/I', alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.*

Une légère généralisation permet d'obtenir le résultat suivant. Soient G le groupe algébrique semi-simple, connexe et simplement connexe, associé à $\mathfrak{g}$, et B un sous-groupe de Borel de G. Si X est une variété algébrique, on note $\mathrm{Diff}(X)$ l'algèbre des sections globales du faisceau des opérateurs différentiels sur X. On dit que X est une variété de drapeaux généralisée si c'est une variété complète, homogène sous un groupe algébrique affine.

THÉORÈME A′ (voir 3.3). – *Soit X une variété de drapeaux généralisée. Si $\mathrm{Diff}(X) \cong \mathrm{Diff}(G/B)$ alors $X \cong G/B$.*

0.3. Dans la partie 4, on commence par deux lemmes sur les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie réductives avant de déduire du théorème précédent le résultat suivant.

THÉORÈME B (voir 4.3). – *Soient $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ deux k-algèbres de Lie réductives. Si $U(\mathfrak{r})$ et $U(\mathfrak{r}')$ sont Morita équivalents, alors $\mathfrak{r} \cong \mathfrak{r}'$.*

0.4. Dans la partie 5, nous déduisons du théorème A les théorèmes suivants. Soient $\mathrm{Aut}(U)$ le groupe d'automorphismes de U, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ celui de $\mathfrak{g}$, et $G_0 = G/Z(G)$ le groupe algébrique adjoint de $\mathfrak{g}$. Posons $\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/G_0$. Alors Γ agit naturellement sur Z et sur $\mathrm{Prim}(\mathfrak{g})$.

THÉORÈME C (voir 5.4). – (a) *Soient I, I' deux idéaux primitifs minimaux de U. Si U/I et U/I' sont isomorphes et ont un quotient de dimension finie, alors I et I' sont conjugués par Γ.*

(b) *Pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}(U)$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\phi|_Z = \gamma|_Z$. Par conséquent, l'image de l'application de restriction $\mathrm{Aut}(U) \to \mathrm{Aut}(Z)$ se réduit à Γ.*

THÉORÈME D (voir 5.5). – *Il existe un ouvert dense Ω de $\mathrm{Max}(Z)$, stable par $\mathrm{Aut}(U)$, ayant la propriété suivante: tout automorphisme de U agit sur $\pi^{-1}(\Omega)$ comme un élément de Γ.*

Remarque. – Dans les théorèmes A et C, l'hypothèse d'avoir un quotient de dimension finie est probablement inutile; nous conjecturons qu'elle peut être remplacée par une hypothèse plus faible (voir 3.1, 5.4).

0.5. Dans la partie 6, nous montrons que le théorème D entraîne le résultat ci-dessous.

THÉORÈME E (voir 6.1) . – *Soit I un idéal primitif minimal de U. Supposons que U/I ait un quotient de dimension finie et que le stabilisateur de I dans Γ soit trivial. Alors tout automorphisme de U/I opère trivialement sur $K_0(U/I)$.*

De plus, en utilisant un résultat de Joseph et Stafford [30], nous montrons que le théorème E admet la réciproque suivante.

PROPOSITION F (voir 6.6). – *Soit I un idéal primitif minimal de U et soit $\phi \in \mathrm{Aut}(U/I)$. Si ϕ opère trivialement sur $K_0(U/I)$, alors on a $\phi(J) = J$, pour tout $J \in \mathrm{Spec}(U/I)$.*

0.6. Dans la partie 7, nous améliorons un résultat qui constitue une étape importante dans la démonstration de [1, Th. 1]. Soit χ_0 le caractère central du module trivial et soit $\overline{U} = U/I_{\chi_0}$. Soit $\mathfrak{g}'$ une seconde algèbre de Lie semi-simple sur k et définissons $\overline{U}'$ de façon similaire.

THÉORÈME G (voir 7.1). – *Soit $\mathcal{G}$ un groupe fini d'automorphismes de $\overline{U}$, et supposons que $\overline{U}^{\mathcal{G}} \cong \overline{U}'$. Alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.*

Depuis la circulation de la version initiale de cet article, en 1995, ce théorème a été généralisé par Joseph [28].

0.7. Finalement, nous utilisons dans la section 8 une propriété de l'algèbre des covariants d'un groupe engendré par des pseudo-réflections, ainsi qu'un résultat de Soergel, pour démontrer le théorème suivant. Soient $\mathfrak{g}'$ une seconde k-algèbre de Lie semi-simple, et W, W' les groupes de Weyl de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$.

THÉORÈME H. (voir 8.1) – *Soit I (resp. I') un idéal primitif minimal de $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\mathfrak{g}')$). Si U/I est de dimension homologique globale finie et est Morita équivalent à U'/I', alors $W \cong W'$.*

0.8. Ce travail a débuté à la suite d'une question de Jacques Alev, concernant les invariants de groupes finis. D'autre part, j'ai bénéficié de discussions avec Gadi Perets, qui a porté à ma connaissance les travaux de Tim Hodges [16, 17]. Je remercie Thierry Levasseur pour sa suggestion d'étendre le corollaire 3.2 au cas d'une algèbre de Lie réductive, et Patrice Tauvel, qui m'a suggéré le lemme 4.2, pour son aide dans la démonstration de ce résultat. Je remercie également Jens Carsten Jantzen, qui m'a signalé la référence [10].

0.9. Outre des corrections mineures, cet article diffère de la version initiale qui a circulé en 1995 par les ajouts suivants. Une section sur l'équivalence de Morita a été ajoutée comme Section 1. (L'introduction devenant la Section 0, de sorte que la numérotation des énoncés des Sections 2–7 est inchangée). Dans les théorèmes 3.1 et 4.3 (et aussi dans le corollaire 3.2), l'hypothèse d'isomorphisme a été remplacée par celle d'équivalence de Morita. Ont aussi été ajoutés la Section 8, et les deux paragraphes 3.3, 3.4 consacrés au théorème A'.

1. Indice de Joseph et équivalence de Morita

1.1. Soit A un anneau. Si M est un A-module à gauche (resp. à droite), on convient que $\operatorname{End}_A(M)$ opère à droite (resp. à gauche) sur M. On note $\mathcal{C}_A(0)$ l'ensemble des non-diviseurs de 0 dans A. Si $\mathcal{C}_A(0) := S$ vérifie la condition de Ore, l'anneau $S^{-1}A$ est noté $Q(A)$ et appelé l'anneau des fractions de A. Si M est un A-module à gauche (resp. à droite), on pose $S^{-1}M = Q(A) \otimes_A M$ (resp. $MS^{-1} = M \otimes_A Q(A)$). On dit que M est sans torsion si l'on a $\operatorname{Ann}_A(m) \cap S = \emptyset$, pour tout $m \in M$. Enfin, si A est noethérien à gauche, on désigne par $\operatorname{rg} A$ son rang de Goldie (voir [9, Chap. 2]).

Soient A, B deux anneaux noethériens et M un (A, B)–bimodule fidèle et de type fini à gauche et à droite. On note $j({}_AM_B)$ son indice de Joseph à gauche, défini par la formule

$$j({}_AM_B) = \frac{\operatorname{rg} \operatorname{End}_B(M)}{\operatorname{rg} A}.$$

Ceci est licite car $\operatorname{End}_B(M)$ est un anneau noethérien à gauche.

Remarque. – On définit de façon analogue l'indice de Joseph à droite $j_d({}_AM_B)$.

1.2. Commençons par établir le lemme suivant.

LEMME. – *Soient A_1, A_2, A_3 trois anneaux simples artiniens et soit M (resp. N) un (A_1, A_2) (resp. (A_2, A_3)) bimodule de type fini à gauche et à droite. Alors on a*

$$j({}_{A_1}M_{A_2} \underset{A_2}{\otimes} {}_{A_2}N_{A_3}) = j({}_{A_1}M_{A_2})\, j({}_{A_2}N_{A_3}).$$

Démonstration. – Pour $i = 1, 2, 3$, soient V_i un A_i-module à gauche simple, $D_i = \mathrm{End}_{A_i}(V_i)$, et $V_i^* = \mathrm{Hom}_{A_i}(V_i, A_i)$. Alors V_i est un (A_i, D_i)–bimodule et V_i^* un (D_i, A_i)–bimodule, et l'on a des isomorphismes de bimodules $A_i \cong V_i \otimes_{D_i} V_i^*$ et $V_i^* \otimes_{A_i} V_i \cong D_i$.

Posons $E = V_1^* \otimes_{A_1} M \otimes_{A_2} V_2$. Alors E est de dimension finie comme espace vectoriel à gauche sur D_1, et à droite sur D_2, et l'on a $M \cong V_1 \otimes_{D_1} E \otimes_{D_2} V_2^*$. On en déduit que

$$\mathrm{rg}\,\mathrm{End}_{A_2}(M) = \dim_{D_2}(V_1 \otimes_{D_1} E) = (\dim_{D_1} V_1)\,(\dim_{D_2} E),$$

et donc que $j({}_{A_1}M_{A_2}) = \dim_{D_2} E$. Posant $F = V_2^* \otimes_{A_2} N \otimes_{A_3} V_3$, on a aussi $N \cong V_2 \otimes_{D_2} F \otimes_{D_3} V_3^*$ et

$$M \otimes_{A_2} N \cong V_1 \otimes_{D_1} E \otimes_{D_2} F \otimes_{D_3} V_3^*.$$

Il en résulte que $j({}_{A_1}M_{A_2} \underset{A_2}{\otimes} {}_{A_2}N_{A_3}) = \dim_{D_3}(E \otimes_{D_2} F) = (\dim_{D_2} E)\,(\dim_{D_3} F) = j({}_{A_1}M_{A_2})\, j({}_{A_2}N_{A_3})$. Ceci prouve le lemme. $\square$

1.3. Soit k un corps. Si A est une k-algèbre de type fini et M un A-module (à gauche ou à droite), on note $d(M)$ sa dimension de Gelfand-Kirillov. On dit que M est homogène si $d(N) = d(M)$ pour tout sous-module non nul N. Si plusieurs k-algèbres interviennent, on écrira parfois $d_A(M)$.

Si B est une seconde k-algèbre de type fini et M un (A, B)–bimodule fidèle et de type fini à gauche et à droite alors on a $d(A) = d_A(M) = d_B(M) = d(B)$, d'après [5, Lemmas 2.2, 2.3]. De plus, si M est noethérien à gauche et à droite alors, d'après la démonstration de [5, Lemma 2.4], on a $d(Am) = d_A(AmB) = d_B(AmB) = d(mB)$, pour tout $m \in M$. Par conséquent, ${}_AM$ est homogène si et seulement si M_B l'est.

1.4. On convient, une fois pour toutes, qu'une expression de la forme « soit A une k-algèbre » signifie « soit A une k-algèbre de type fini telle que $d(A) < \infty$ ». Considérons alors la situation suivante. Soient A, B deux k-algèbres noethériennes et soit M un (A, B)–bimodule de type fini, fidèle et homogène à gauche et à droite. Posons $S = \mathcal{C}_A(0)$, $T = \mathcal{C}_B(0)$ et $\mathcal{M} = S^{-1}MT^{-1}$. D'après [30, 2.3], A et B sont homogènes, S (resp. T) est une partie oréenne dans A (resp. B), $Q(A)$, $Q(B)$ sont des anneaux artiniens, M est sans torsion à gauche et à droite et l'on a $\mathcal{M} = S^{-1}M = MT^{-1}$. On pose $A' = \mathrm{End}_B(M)$; c'est un A-module à gauche noethérien et donc un anneau noethérien à gauche. De plus, d'après la démonstration de [23, Th. 4.4] (voir aussi [19, Lemma 11.8]), on a

$$S^{-1}A' \cong \mathrm{End}_{Q(B)}(\mathcal{M}). \tag{1.4.1}$$

On a également la proposition suivante (ce résultat est à rapprocher de [29, Prop. 3.5, Cor. 3.7], mais les hypothèses et la démonstration sont un peu différentes. En particulier, le fait que A' soit semi-premier fait partie de la conclusion et non de l'hypothèse).

PROPOSITION. – *On garde les notations précédentes et on suppose de plus que A et B sont semi-premières. Alors S est une partie oréenne de A' et $S^{-1}A'$ est un anneau semi-simple artinien. Par conséquent, $S^{-1}A' = Q(A')$ et donc A' est semi-premier, et premier si B l'est. Enfin, on a $j({}_AM_B) = j({}_{Q(A)}\mathcal{M}_{Q(B)})$.*

Démonstration. – Commençons par montrer que tout $s \in S$ est non-diviseur de 0 dans A'. Soient $s \in S$ et $\alpha \in A'$. Si $s\alpha = 0$, alors $s\alpha M = 0$, et comme ${}_AM$ est sans torsion, il vient $\alpha M = 0$ et donc $\alpha = 0$. D'autre part, si $\alpha s = 0$, alors, posant $I = \{b \in B \mid Mb \subseteq sM\}$, on a $\alpha MI = 0$. Or, d'après la démonstration de [24, Lemma 2.7.(iv)], I est un idéal à droite essentiel de B. Comme B est semi-premier et noethérien, alors I contient un élément $t \in T$. On a donc $\alpha Mt = 0$ et comme M_B est sans torsion, ceci entraîne $\alpha M = 0$, et donc $\alpha = 0$.

Montrons maintenant que S vérifie la condition de Ore dans A'. Soient $s \in S$, $\alpha \in A'$. Posons $J = \{a \in A \mid a\alpha \in A's\}$ et $K = \{a \in A \mid \alpha a \in sA'\}$. Alors l'application $a \mapsto a\alpha + A's$ induit une injection $A/J \hookrightarrow A'/A's$. Or, comme s est non-diviseur de 0, on a $d(A'/A's) < d(A')$ (voir, par exemple, [5, 1.3]) et, puisque A est homogène, il résulte de [29, Cor. 2.8] que $J \cap S \neq \emptyset$. On montre de même que $K \cap S \neq \emptyset$. Par conséquent, S est une partie oréenne de A'.

De plus, puisque $S^{-1}A' \cong \mathrm{End}_{Q(B)}(\mathcal{M})$, alors $S^{-1}A'$ est, comme $Q(B)$, un anneau semi-simple artinien. Donc, on a $S^{-1}A' = Q(A')$ et, d'après [9, Th. 1.27, 1.28], A' est semi-premier, et premier si B l'est. Enfin, comme $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, Q(A)$ et $\mathrm{rg}\, A' = \mathrm{rg}\, Q(A')$, l'égalité $j({}_AM_B) = j({}_{Q(A)}\mathcal{M}_{Q(B)})$ résulte alors de (1.4.1).

1.5. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. – *Soient A_1, A_2, A_3 trois k-algèbres noethériennes premières et soit M (resp. N) un (A_1, A_2) (resp. (A_2, A_3)) bimodule de type fini, fidèle et homogène à gauche et à droite. Supposons que M ou N soit un A_2-module projectif. Alors*

$$j({}_{A_1}M_{A_2} \bigotimes_{A_2} N_{A_3}) = j({}_{A_1}M_{A_2})\, j({}_{A_2}N_{A_3}).$$

Démonstration. – Pour $i = 1, 2, 3$, soient $S_i = \mathcal{C}_{A_i}(0)$ et $\mathcal{A}_i = S_i^{-1}A_i$. Posons $L = M \otimes_{A_2} N$, $\mathcal{L} = S_1^{-1}LS_3^{-1}$, $\mathcal{M} = S_1^{-1}MS_2^{-1}$, et $\mathcal{N} = S_2^{-1}NS_3^{-1}$. Alors, les hypothèses entraînent facilement que L est un (A_1, A_3)–bimodule de type fini, homogène et fidèle à gauche et à droite. D'après la proposition précédente, on obtient donc $j({}_{A_1}L_{A_3}) = j({}_{\mathcal{A}_1}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_3})$, de même que $j({}_{A_1}M_{A_2}) = j({}_{\mathcal{A}_1}\mathcal{M}_{\mathcal{A}_2})$ et $j({}_{A_2}N_{A_3}) = j({}_{\mathcal{A}_2}\mathcal{N}_{\mathcal{A}_3})$. Or, on déduit aussi des hypothèses que $\mathcal{L} \cong \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}_2} \mathcal{N}$ et l'égalité cherchée découle alors du lemme 1.2. Le théorème est démontré. □

1.6. Équivalence de Morita. – Si A est un anneau on désigne l'ensemble de ses idéaux bilatères par $\mathcal{I}(A)$ et son centre par $Z(A)$. Si A, B sont deux anneaux on utilisera la notation $A \overset{M}{\sim} B$ pour signifier que A et B sont Morita équivalents. A l'exception peut-être de l'assertion (d), dont la démonstration est laissée au lecteur, les faits suivants sont bien connus et se trouvent, par exemple, dans [2, Th. II.3.5] (voir aussi [30, Lemma 4.11.A]).

PROPOSITION. – *Soient A, B deux anneaux Morita équivalents. Alors*

(a) *Il existe un (A, B)–bimodule P, projectif et de type fini à gauche et à droite, tel que $\mathrm{End}_A(P) \cong B$ et $\mathrm{End}_B(P) \cong A$.*

(b) *On a $Z(A) \cong \mathrm{End}_{(A,B)}(P) \cong Z(B)$.*

(c) *Soit* $Q = \mathrm{Hom}_A(P, A)$. *Alors l'application* $\phi : I \mapsto Q \otimes_A I \otimes_A P$ *établit un isomorphisme de treillis* $\mathcal{I}(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(B)$, *dont l'inverse est l'application* $J \mapsto P \otimes_B J \otimes_B Q$. *De plus, quels que soient* $I, I' \in \mathcal{I}(A)$, *on a* $\phi(I\,I') = \phi(I)\,\phi(I')$, *et* ϕ *induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés* $\mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(B)$.
(d) *Pour tout* $I \in \mathcal{I}(A)$, *on a* $P/IP = P/P\phi(I)$ *et ce bimodule établit une équivalence de Morita* $A/I \overset{M}{\sim} B/\phi(I)$.

Notons également le corollaire suivant, qui est une conséquence immédiate de (a) et [5, Lemmas 2.2, 2.3].

COROLLAIRE. – *Soient* A, B *deux* k*-algèbres de type fini. Si* $A \overset{M}{\sim} B$ *alors* $d(A) = d(B)$.

1.7. On obtient aussi le corollaire suivant.

COROLLAIRE. – *Soient* A, B, C, D *quatre* k*-algèbres noethériennes premières et soit* ${}_B M_C$ *un bimodule de type fini et sans torsion à gauche et à droite. Supposons qu'on ait des équivalences de Morita* $A \overset{M}{\sim} B$ *et* $C \overset{M}{\sim} D$, *données par des bimodules* ${}_A P_B$ *et* ${}_C Q_D$. *Alors on a* $j({}_A P_B \underset{B}{\otimes} {}_B M_C \underset{C}{\otimes} {}_C Q_D) = j({}_B M_C)$.

Démonstration. – C'est une conséquence immédiate du théorème 1.5, car on a $\mathrm{End}_B(P) = A$ et donc $j({}_A P_B) = 1$, et de même $j({}_C Q_D) = 1$. $\square$

2. Notations et rappels sur les idéaux primitifs

2.0. Désormais, le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle. Toute algèbre de Lie considérée dans ce travail est de dimension finie sur k.

2.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur k, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel contenant $\mathfrak{h}$. Soient R le système de racines et W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pour $\alpha \in R$, soit $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ la coracine correspondante et soit $s_\alpha \in W$ la réflexion associée. Soient R^+ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{b}$ et Δ la base de R contenue dans R^+.

Pour $\alpha, \beta \in \Delta$, désignons par $m_{\alpha,\beta}$ l'ordre de l'élément $s_\alpha s_\beta$ de W. Rappelons d'abord que le graphe de Coxeter de $\mathfrak{g}$ est le graphe, noté $C(\mathfrak{g})$ ou $C(R)$, ayant Δ comme ensemble de sommets et où $\{\alpha, \beta\}$ est une arête si et seulement si $m_{\alpha,\beta} \geq 3$, auquel cas l'arête $\{\alpha, \beta\}$ porte l'étiquette $m_{\alpha,\beta}$. Il est bien connu que si $m_{\alpha,\beta} \geq 4$ alors on a $\{\alpha(H_\beta), \beta(H_\alpha)\} = \{-1, -m_{\alpha,\beta}/2\}$. Le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$, noté $D(\mathfrak{g})$ ou $D(R)$, peut alors être obtenu en ajoutant, sur chaque arête $\{\alpha, \beta\}$ de $C(\mathfrak{g})$ telle que $m_{\alpha,\beta} \geq 4$, une flèche dirigée vers α si l'on a $\beta(H_\alpha) < -1$.

2.2. Soit $\mathcal{P} \subset \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids entiers. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose

$$R_\lambda = \{\alpha \in R \mid \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad W_\lambda = \{w \in W \mid w\lambda - \lambda \in \mathbb{Z}R\}.$$

D'après [19, 2.5], R_λ est un système de racines dont W_λ est le groupe de Weyl. Soit Δ_λ la base de R_λ contenue dans $R_\lambda^+ := R_\lambda \cap R^+$ et soit $S_\lambda := \{s_\alpha,\ \alpha \in \Delta_\lambda\}$. On définit la longueur $\ell_\lambda(w)$ d'un élément $w \in W_\lambda$ comme étant le plus petit entier $q \geq 0$ tel que w soit un produit de q éléments de S_λ. Soit w_λ l'unique élément de W_λ de longueur maximale. Bien entendu, $R_\lambda, W_\lambda, \Delta_\lambda, w_\lambda$ ne dépendent que de la classe $\Lambda := \lambda + \mathcal{P}$ et on les désignera parfois par $R_\Lambda, W_\Lambda, \Delta_\Lambda, w_\Lambda$. Quand $\lambda \in \mathcal{P}$, on a $R_\lambda = R$, $W_\lambda = W$, $\Delta_\lambda = \Delta$, et on notera w_0 l'élément de W de longueur maximale.

Pour $S \subseteq \Delta_\Lambda$, soit W_S le sous-groupe de W_Λ engendré par les s_α, $\alpha \in S$, soit w_S son élément de longueur maximale, et soient $R_S = R_\Lambda \cap \mathbb{Z}S$ et $R_S^+ = R_S \cap R^+$. (Notons que R_S ne dépend que de R et S. En fait, on peut montrer que $R_S = \{\alpha \in R \mid s_\alpha \in W_S\}$).

Rappelons qu'un poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dit régulier si son stabilisateur dans W est trivial, et singulier sinon. Pour $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\mathcal{P}$, soit $\Lambda^+ = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda(H_\alpha) \geq 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_\lambda\}$ et soit Λ^{++} l'ensemble des poids réguliers dans Λ^+. Posons $\mathfrak{h}^{*+} = \bigcup_{\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\mathcal{P}} \Lambda^+$ et définissons $\mathfrak{h}^{*++}$ de façon analogue.

2.3. Soient $U = U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et Z son centre. On note $\mathrm{Prim}(U)$, ou parfois $\mathrm{Prim}(\mathfrak{g})$, l'ensemble des idéaux primitifs de U, partiellemment ordonné par inclusion. Soit $\mathrm{Car}(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z, k)$ l'ensemble des caractères centraux. Pour $\chi \in \mathrm{Car}(Z)$, soient I_χ l'idéal de U engendré par $\mathrm{Ker}\chi$, et $U_\chi = U/I_\chi$. On note Ξ_χ l'ensemble des idéaux primitifs contenant I_χ. D'après [13, 8.4.4], les I_χ, $\chi \in \mathrm{Car}(Z)$, sont exactement les idéaux primitifs minimaux de U. Par abus de langage, nous dirons, pour tout $\chi \in \mathrm{Car}(Z)$, que U_χ est un quotient primitif minimal de U.

On note ρ la demi-somme des racines positives. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soient $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} k_{\lambda-\rho}$ le module de Verma de plus haut poids $\lambda-\rho$, $L(\lambda)$ son unique quotient simple, et $I(\lambda) = \mathrm{Ann}L(\lambda)$. Soit $\psi : Z \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$ l'isomorphisme de Harish-Chandra; il induit une application surjective $\mathfrak{h}^* \to \mathrm{Car}(Z)$, $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ telle que $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ si et seulement si λ et λ' sont W-conjugués (voir [13, 7.4.5–7.4.7]). On écrira parfois $I_\lambda, U_\lambda, \Xi_\lambda$ au lieu de $I_{\chi_\lambda}, U_{\chi_\lambda}, \Xi_{\chi_\lambda}$.

D'après un théorème de Duflo (voir [19, 7.3-7.4]), on a

$$\Xi_\lambda = \{I \in \mathrm{Spec}(U) \mid I \supseteq I_\lambda\} = \{I(w\lambda),\ w \in W_\lambda\}. \tag{2.3.1}$$

De plus, Ξ_λ possède un unique élément maximal (voir [19, 5.21]), que l'on notera $I_\lambda^{\max}$. Les éléments minimaux de $\Xi_\lambda \setminus \{I_\lambda\}$ sont appelés idéaux premiers quasi-minimaux (au-dessus de I_λ); de même, les éléments maximaux de $\mathcal{X}_\lambda \setminus \{I_\lambda^{\max}\}$ sont appelés idéaux premiers quasi-maximaux.

On dit qu'un caractère central est régulier (resp. entier régulier) s'il correspond à une orbite de poids réguliers (resp. entiers réguliers). En fait, ces notions ne dépendent que de la structure d'algèbre de U, d'après le lemme suivant. On rappelle que l'application $\lambda \mapsto L(\lambda)$ induit une bijection entre $\mathcal{P}^{++}$ et l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) U-modules simples de dimension finie, *c.f.* [13, 7.2.6].

LEMME. – *Soit* $\chi \in \mathrm{Car}(Z)$. *Alors*

(a) χ *est entier régulier si et seulement si* U_χ *possède un quotient de dimension finie.*

(b) χ *est régulier si et seulement si* U_χ *est de dimension globale finie.*

Démonstration. – L'assertion (a) se déduit facilement de [13, §§7.2, 7.4]. D'autre part, si χ est régulier alors U_χ est de dimension globale finie, d'après [18, 3.9] Réciproquement, si χ est singulier alors U_χ est de dimension globale infinie, d'après [30, 4.20] (voir aussi [14]). □

2.4. Soient $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\mathcal{P}$ et $\lambda \in \Lambda^{++}$. Pour $S \subseteq \Delta_\lambda$, désignons par $J_S(\lambda)$ l'idéal $I(w_\Lambda w_S \lambda)/I_\lambda$ de U_λ. Notons que $J_\emptyset(\lambda) = \{0\}$. Quand S est un singleton $\{\alpha\}$, on écrira $J_\alpha(\lambda)$ au lieu de $J_{\{\alpha\}}(\lambda)$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats concernant les idéaux primitifs, dus à Duflo, Gabber–Joseph, Borho, Joseph, et Berline–Duflo, que nous rappelons dans le théorème ci-dessous.

THÉORÈME. – *Soient* $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\mathcal{P}$ *et* $\lambda \in \Lambda^{++}$. *Alors les éléments quasi-minimaux de* $\mathrm{Spec}(U_\lambda)$ *sont exactement les* $J_\alpha(\lambda)$, *pour* $\alpha \in \Delta_\lambda$. *De plus, on a les résultats suivants, pour tout* $S \subseteq \Delta_\lambda$:

$$\sum_{\alpha \in S} J_\alpha(\lambda) = J_S(\lambda); \tag{2.4.1}$$

$$d\big(U_\lambda/J_S(\lambda)\big) = |R \setminus R_S|; \tag{2.4.2}$$

$$\mathrm{rg}\,\big(U_\lambda/J_S(\lambda)\big) = \prod_{\alpha \in R_S^+} \lambda(H_\alpha). \tag{2.4.3}$$

Démonstration. – Une référence commode pour tous ces résultats est le livre de Jantzen [19], auquel nous renvoyons. La première assertion se déduit de 7.3 et 5.20 (6), la formule (2.4.1) se trouve en 7.32.a), tandis que (2.4.2) résulte de 9.15.a) et 10.9. Enfin, la formule (2.4.3) se déduit de 5.17.a), 5.16, 15.23 et 15.21 (2). □

2.5. Soient $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\mathcal{P}$ et $\lambda \in \Lambda^{++}$. Pour $w \in W_\Lambda$, on pose

$$J_w(\lambda) = \mathrm{Ann}_{U_\lambda}\big(M(\lambda)/M(w\lambda)\big) \quad \text{et} \quad \overline{J}_w(\lambda) = J_w(\lambda)/\mathrm{rad}J_w(\lambda),$$

où $\mathrm{rad}J_w(\lambda)$ désigne l'intersection des sous-U-bimodules maximaux de $J_w(\lambda)$. Pour tout $\alpha \in \Delta_\lambda$, on a $J_{s_\alpha}(\lambda) = J_\alpha(\lambda)$, d'après la discussion précédant [19, Satz 7.27].

Étant donnés deux U-modules M, N, on désigne par $\mathcal{L}(M, N)$ l'ensemble des vecteurs $\mathfrak{g}$-finis dans $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ (voir, par exemple, [30, 1.2]). Nous aurons besoin des résultats de Joseph [20] ci-dessous.

PROPOSITION. – *Soient* $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\mathcal{P}$, $\lambda \in \Lambda^{++}$, $w \in W_\Lambda$. *Alors*

(a) $J_w(\lambda) = J_{\alpha_r}(\lambda) \cdots J_{\alpha_1}(\lambda) + I_\lambda$, *pour toute expression réduite* $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$.

(b) *On a* $\overline{J}_w(\lambda) \cong \mathcal{L}(M(\lambda), L(w\lambda))$. *Par conséquent,* $\ell\text{-}\mathrm{Ann}(\overline{J}_w(\lambda)) = I(w\lambda)$ *et* $r\text{-}\mathrm{Ann}(\overline{J}_w(\lambda)) = I(w^{-1}\lambda)$.

Démonstration. – (a) est établi dans [20, Corollary 4.11] (voir aussi [19, 7.27]). D'autre part, d'après la définition de $J_w(\lambda)$, combinée à [19, 7.25, 6.25], on a $J_w(\lambda) \cong \mathcal{L}(M(\lambda), M(w\lambda))$ et $\overline{J}_w(\lambda) \cong \mathcal{L}(M(\lambda), L(w\lambda))$. La dernière assertion de (b) résulte alors de [19, 7.9.(1)]. □

2.6. On conserve les notations précédentes et on désigne par $\mathrm{End}_{-U}(\overline{J}_w(\lambda))$ l'anneau des endomorphismes du U-module à droite $\overline{J}_w(\lambda)$. D'après 2.5 (b) et [23, 3.2], on a $\mathrm{End}_{-U}(\overline{J}_w(\lambda)) \cong \mathcal{L}(L(w\lambda), L(w\lambda))$. De plus, Joseph a démontré que, pour tout $\lambda \in \Lambda^{++}$, le quotient $z_w := \mathrm{rg}\,\mathcal{L}(L(w\lambda), L(w\lambda))/r\,g(U/I(w\lambda))$ est un entier positif, indépendant de λ ([23, 5.12]). Il a aussi remarqué ([24, Remark 3.4]) que les z_w dépendent du système de racines R_Λ et pas seulement du groupe de Weyl W_Λ. (Aussi, les z_w sont étudiés en détail dans [26, §5], [27]). Nous aurons besoin du résultat suivant, qui calcule la valeur de z_w dans un cas particulier.

THÉORÈME. – *Soient* $\lambda \in \mathfrak{h}^{*++}$ *et* $\alpha, \beta \in \Delta_\lambda$ *telles que* $\alpha \neq \beta$ *et* $\beta(H_\alpha) \neq 0$. *Posons* $w = s_\alpha s_\beta w_\Lambda$ *et* $A = U/I(w\lambda)$, $B = U/I(w^{-1}\lambda)$. *Alors* $\overline{J}_w(\lambda)$ *est un* (A, B)*–bimodule fidèle et de type fini à gauche et à droite, et on a*

$$j({}_A\overline{J}_w(\lambda)_B) = -\beta(H_\alpha).$$

Démonstration. – D'après ce qui précède, le résultat se déduit de [22, 9.1.(i), 9.3] (resp. [25, 3.6]) si $\{\alpha, \beta\}$ est de type A_2 ou B_2 (resp. G_2). Pour la commodité du lecteur, nous en donnons une démonstration uniforme.

Tout d'abord, d'après [19, 5.17.a), 5.16], on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha \in \Delta$.

D'après [19, 16.4(b), (c)], on a $I(s_\alpha s_\beta w_\Lambda \lambda) = I(s_\beta w_\Lambda \lambda)$. Posant $\beta^* = -w_\Lambda \beta$, on obtient donc $I(s_\alpha s_\beta w_\Lambda \lambda) = J_{\beta^*}(\lambda)$, d'où, d'après (2.4.3),

$$\operatorname{rg} A = \lambda(H_{\beta^*}). \tag{2.6.1}$$

D'autre part, d'après la proposition 2.5(b), combinée à [19, 6.37], l'on a

$$\operatorname{End}_{-U}(\overline{J}_w(\lambda)) \cong \mathcal{L}\big(L(w\lambda), L(w\lambda)\big). \tag{2.6.2}$$

Soient $\mathfrak{p}_\alpha$ la sous-algèbre parabolique associée à α, V le $\mathfrak{p}_\alpha$-module simple de plus haut poids $w\lambda - \rho$, et $M = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_\alpha)} V$. On déduit de [19, 4.13(8)–(10), 15.3(4)] qu'on a une suite exacte

$$0 \to L(s_\alpha w_\Lambda \lambda) \to M \to L(w\lambda) \to 0.$$

D'autre part, il résulte de [10.9, 15.3(1),(4)] que $d(L(w\lambda)) = d(L(s_\alpha w_\Lambda \lambda)) = d(M) = |R^+| - 1$. Par conséquent, on déduit de [8.1.(iii)], combiné à [15.3(5), 15.21(2)], que

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \mathcal{L}\big(L(w\lambda), L(w\lambda)\big) &= \operatorname{rg} \mathcal{L}(M, M) - \operatorname{rg} \mathcal{L}(L(s_\alpha w_\Lambda \lambda), L(s_\alpha w_\Lambda \lambda)) \\ &= (s_\alpha s_\beta w_\Lambda \lambda)(H_\alpha) - \lambda(H_{\alpha^*}) \\ &= -\beta(H_\alpha)\, \lambda(H_{\beta^*}). \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Le théorème s'obtient alors en combinant (2.6.1), (2.6.2), (2.6.3).

3. Le diagramme de Dynkin est un invariant de Morita

3.1. Soient $\mathfrak{g}'$ une seconde algèbre de Lie semi-simple sur k et $U' = U(\mathfrak{g}')$. Les notations et résultats de la partie 2 s'appliquent aussi à $\mathfrak{g}'$ et U'. En particulier, soient $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$, $R' = R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$, et Δ' une base de R'.

THÉORÈME. – *Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^{*++}$ et $\mu \in \mathfrak{h}'^{*+}$. Supposons que $U_\lambda \overset{M}{\sim} U'_\mu$. Alors on a un isomorphisme de diagrammes de Dynkin $D(R_\lambda) \cong D(R'_\mu)$. Si l'on suppose de plus que $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$ alors $\mu \in \mathcal{P}'^{++}$ et $D(R) \cong D(R')$, d'où $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.*

Démonstration. – D'après la proposition 1.6.(c), l'équivalence de Morita $U_\lambda \overset{M}{\sim} U'_\mu$ induit une bijection ϕ de l'ensemble des éléments minimaux de $\operatorname{Spec}(U_\lambda) \setminus \{0\}$ vers l'ensemble correspondant pour U'_μ. D'autre part, il résulte du lemme 2.3 que μ est régulier, d'où $\mu \in \mathfrak{h}'^{*++}$. On déduit donc de la première assertion du théorème 2.3 que ϕ induit une bijection $\sigma : \Delta_\lambda \xrightarrow{\sim} \Delta'_\mu$ telle que

$$\phi\big(J_\alpha(\lambda)\big) = J'_{\sigma\alpha}(\mu), \qquad \forall\, \alpha \in \Delta_\lambda. \tag{3.1.1}$$

De plus, d'après (2.4.1), on a $\phi\big(J_S(\lambda)\big) = J'_{\sigma S}(\mu)$, pour tout $S \subseteq \Delta_\lambda$. Puisque ϕ préserve la dimension de Gelfand-Kirillov on déduit alors de (2.4.2), appliqué à $\mathfrak{g}$ et à $\mathfrak{g}'$, que

$$(3.1.2) \qquad |R_S| = |R'_{\sigma S}|, \quad \forall\, S \subseteq \Delta_\lambda.$$

En particulier, $|R| = |R'|$ (pour $S = \emptyset$). Or il est bien connu que si $\{a, b\}$ est une base d'un système de racines Σ de rang deux, alors on a $|\Sigma| = 2\, m_{ab}$. (La vérification cas par cas est immédiate; voir aussi [1, Lemma 1.14].) Par conséquent, il résulte de (3.1.2) que l'on a, pour tout $\alpha \neq \beta \in \Delta_\lambda$,

$$(3.1.3) \qquad R = 2\, m_{\alpha,\beta} = |R_{\{\alpha,\beta\}}| = |R'_{\{\sigma\alpha,\sigma\beta\}}| = 2\, m_{\sigma\alpha,\sigma\beta}.$$

Ceci implique que σ induit un isomorphisme de graphes de Coxeter $C(R_\lambda) \xrightarrow{\sim} C(R'_\mu)$.

Par conséquent, σ induit un isomorphisme $W_\lambda \xrightarrow{\sim} W'_\mu$, $w \mapsto w^\sigma$ tel que $s_\alpha^\sigma = s_{\sigma\alpha}$, pour tout $\alpha \in \Delta_\lambda$. D'après (3.1.1) et la proposition 2.5(a), on obtient donc que

$$(3.1.4) \qquad \phi\big(J_w(\lambda)\big) = J'_{w^\sigma}(\mu), \qquad \forall\, w \in W_\lambda.$$

Notons aussi que $w_\lambda^\sigma = w_\mu$. Alors, d'après le théorème 2.6, appliqué à $\mathfrak{g}$ et à $\mathfrak{g}'$, on déduit de (3.1.4) que $\alpha(H_\beta) = (\sigma\alpha)(H_{\sigma\beta})$, pour tout $\alpha \neq \beta \in \Delta_\lambda$. Par conséquent, σ induit un isomorphisme de diagrammes de Dynkin $D(R_\lambda) \xrightarrow{\sim} D(R'_\mu)$.

Enfin, si $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$ alors $\mu \in \mathcal{P}'^{++}$, d'après le Lemme 2.3(a), et donc $R'_\mu = R'$. Par suite, σ induit dans ce cas un isomorphisme $D(R) \xrightarrow{\sim} D(R')$ et donc $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.

On peut reformuler la conclusion du théorème en disant que: si λ est entier régulier, alors U_λ « voit » $\mathfrak{g}$. Nous conjecturons que U_λ voit $\mathfrak{g}$ si λ est régulier:

CONJECTURE 1. – [1] Si λ est régulier et si $U_\lambda \overset{M}{\sim} U'_\mu$, alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.

Remarque. – Le rapporteur nous a signalé que l'isomorphisme de graphes de Coxeter $C(R_\lambda) \xrightarrow{\sim} C(R'_\mu)$ pouvait aussi être extrait de la démonstration de [20, Lemma 4.10]. Toutefois, l'argument donné ici est plus simple. Il s'applique également dans une situation où intervient un groupe fini d'automorphismes, voir [1, 1.14] et la partie 7. Nous appliquerons l'argument de [20, Lemma 4.10] dans une situation où on considère un quotient primitif arbitraire de $U(\mathfrak{g}')$, voir §3.3.

3.2. Le théorème 3.1 entraîne immédiatement le corollaire suivant. Je remercie P. Tauvel pour m'avoir fait remarquer qu'il est inutile d'y supposer $\mathfrak{g}'$ semi-simple. (Ce résultat sera étendu au cas réductif dans la partie suivante.)

COROLLAIRE. – *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux k-algèbres de Lie. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et si $U(\mathfrak{g}') \overset{M}{\sim} U(\mathfrak{g})$ alors on a $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{g}$.*

Démonstration. – Supposons $\mathfrak{g}$ semi-simple et $U(\mathfrak{g}') \overset{M}{\sim} U(\mathfrak{g})$. Alors toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}'$ est semi-simple et donc, d'après [8, I, n° 6.2, Remarque 1], $\mathfrak{g}'$ est semi-simple.

1. Voir la partie 8 pour un résultat partiel

Avec les notations de la proposition 1.6, on a $U(\mathfrak{g})/I \overset{M}{\sim} U(\mathfrak{g}')/\phi(I)$ pour tout $I \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{g})$. De plus, si I est un idéal primitif minimal contenu dans un idéal de codimension finie, alors il en est de même de $\phi(I)$. La conclusion $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$ découle alors du théorème 3.1. $\square$.

Pour la commodité du lecteur, signalons aussi que lorsqu'on s'intéresse à la question d'isomorphisme, le corollaire admet une démonstration plus simple, qui ne nécessite pas le théorème 2.5.

COROLLAIRE. – (I) *Si $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}')$, alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.*

Démonstration. – Soient ϕ un isomorphisme $U \xrightarrow{\sim} U'$, et $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$. Supposons de plus que λ est « générique », c.à.d. que $\lambda(H_\alpha) \neq \lambda(H_\beta)$ lorsque α, β sont deux racines simples distinctes.

D'après la démonstration du th. 3.1, ϕ induit un isomorphisme $U_\lambda \xrightarrow{\sim} U'_\mu$, pour un $\mu \in \mathcal{P}'^{++}$, et un isomorphisme de graphes de Coxeter $\sigma : \Delta \xrightarrow{\sim} \Delta'$ tel que $\phi(J_\alpha(\lambda)) = J'_{\sigma\alpha}(\mu)$, pour tout $\alpha \in \Delta$. Soient $\alpha, \beta \in \Delta$ telles que $\beta(H_\alpha) = -2$. Pour montrer que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$, il suffit de montrer que $\sigma\beta(H_{\sigma\alpha}) = -2$. Supposons que ce ne soit pas le cas; alors $\sigma\beta(H_{\sigma\alpha}) = -1$ et $\sigma\alpha(H_{\sigma\beta}) = -2$. Posons $\lambda_\alpha = \lambda(H_\alpha)$, et définissons de même λ_β et $\mu_{\sigma\alpha}$, $\mu_{\sigma\beta}$. Comme $U_\lambda/J_S(\lambda) \cong U'_\mu/J'_{\sigma S}(\mu)$, pour tout $S \subseteq \Delta$, en appliquant (2.4.3) à $S = \{\alpha\}$ et $S = \{\beta\}$, on obtient que $\lambda_\alpha = \mu_{\sigma\alpha}$ et $\lambda_\beta = \mu_{\sigma\beta}$. De plus, sous l'hypothèse précédente, on tire de (2.4.3), appliqué à $S = \{\alpha, \beta\}$, que

$$\frac{1}{6}\lambda_\alpha\lambda_\beta(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)(\lambda_\alpha + 2\lambda_\beta) = \frac{1}{6}\mu_{\sigma\alpha}\mu_{\sigma\beta}(\mu_{\sigma\alpha} + \mu_{\sigma\beta})(2\mu_{\sigma\alpha} + \mu_{\sigma\beta}).$$

On en déduit que $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, en contradiction avec l'hypothèse que λ est générique. Cette contradiction montre que $\sigma\beta(H_{\sigma\alpha}) = -2$, et il en résulte que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$. $\square$

Remarque. – La démonstration ci-dessus a été obtenue au début de l'année 1993, et exposée lors de séminaires, à Poitiers et à Paris. Ensuite, dans [1], la partie de l'argument concernant le graphe de Coxeter a été étendue à une situation où intervient un groupe fini d'automorphismes de U. Ainsi, le corollaire (I) ci-dessus, bien que paraissant plus tard, est antérieur au théorème 1.1 de [1].

3.3. Le théorème 3.1 admet l'extension suivante. On conserve les notations précédentes.

THÉORÈME. – *Soient $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$ et P' un idéal de U'. On suppose que $U_\lambda \overset{M}{\sim} U'/P'$. Alors $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'_2$, et il existe $\lambda' \in \mathcal{P}^{++}(\mathfrak{g})$ et $\mu'_2 \in \mathcal{P}^{++}(\mathfrak{g}'_2)$, tels que $P' \cong I_{\lambda'} \otimes U(\mathfrak{g}'_2) + U(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g}'_2)} L(\mu'_2)$. Par conséquent,*

$$U(\mathfrak{g}')/P' \cong \mathrm{End}_k(L(\mu'_2)) \otimes U_{\lambda'}.$$

Démonstration. – L'hypothèse entraîne que P' est primitif et de caractère central entier régulier. Donc P' contient un idéal primitif minimal I'_μ, avec $\mu \in \mathcal{P}^{++}(\mathfrak{g}')$. On note $J'_\beta(\mu)$ les idéaux primitifs quasi-minimaux au-dessus de I'_μ.

D'après la proposition 1.6, l'équivalence $U_\lambda \overset{M}{\sim} U'/P'$ induit un isomorphisme de treillis $\psi : \mathcal{I}(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(U'/P')$.

D'après [19, 5.20], les éléments quasi-maximaux de Ξ_λ sont paramétrés par Δ; on les notera $J^\alpha(\lambda)$. Plus précisément, pour tout $P \in \Xi_\lambda$, on pose $\widetilde{\tau}(P) = \{\alpha \in \Delta \mid J_\alpha(\lambda) \subseteq P\}$.

Alors on a $\widetilde{\tau}(J^\alpha(\lambda)) = \Delta \setminus \{\alpha\}$, et $J^\alpha(\lambda)$ est le plus grand élément de Ξ_λ ne contenant pas $J_\alpha(\lambda)$. Par conséquent, pour tout $P \in \Xi_\lambda$, on a $\widetilde{\tau}(P) = \Delta \setminus \{\alpha \in \Delta \mid P \subseteq J^\alpha(\lambda)\}$.

De même, on note $J'^\beta(\mu)$, $\beta \in \Delta'$, les éléments quasi-maximaux de $\mathrm{Spec}(U'_\mu)$, et on définit $\widetilde{\tau}(Q)$ comme plus haut, pour tout $Q \in \mathrm{Spec}(U'_\mu)$. On va démontrer le théorème par étapes.

ASSERTION 1. – *ψ induit une injection $\sigma : \Delta \hookrightarrow \Delta'$ telle que, pour tout $\alpha \in \Delta$, $\psi(J_\alpha(\lambda)) = (J'_{\sigma(\alpha)}(\mu) + P')/P'$. De plus, σ préserve la structure de Coxeter.*

Démonstration. – Pour simplifier, posons $J_\alpha(\lambda) = J_\alpha$ et $J^\alpha(\lambda) = J^\alpha$, et de même $J'_\beta(\mu) = J'_\beta$ et $J'^\beta(\mu) = J'^\beta$. Soit $S = \{\beta \in \Delta' \mid P' \subseteq J'^\beta\} = \Delta' \setminus \widetilde{\tau}(P')$.

Notons $\mathcal{J}_\alpha = \psi(J_\alpha)$ et $\mathcal{J}^\alpha = \psi(J^\alpha)$. Alors les $\mathcal{J}^\alpha$, $\alpha \in \Delta$, sont exactement les idéaux premiers quasi-maximaux contenant P'. Il existe donc une bijection $\sigma : \Delta \xrightarrow{\sim} S$ telle que $\psi(J^\alpha) = J'^{\sigma\alpha}$, pour tout $\alpha \in \Delta$. On en déduit que $\widetilde{\tau}(\mathcal{J}_\alpha) = \widetilde{\tau}(P') \cup \{\sigma\alpha\}$. Montrons que $\mathcal{J}_\alpha = (J'_{\sigma\alpha} + P')/P'$. D'après [20, 4.4–4.5], l'idéal $J_\alpha \cap J^\alpha$ est le plus grand idéal bilatère propre de J_α. Comme ψ est un isomorphisme de treillis, on obtient que $\mathcal{J}_\alpha \cap \mathcal{J}^\alpha$ est le plus grand idéal bilatère propre de $\mathcal{J}_\alpha$. Or $\mathcal{J}_\alpha$ contient l'idéal $(J'_{\sigma\alpha} + P')/P'$, et l'image de ce dernier dans $\mathcal{J}_\alpha/(\mathcal{J}_\alpha \cap \mathcal{J}^\alpha)$ est non-nulle, car $J'_{\sigma\alpha}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{J}^\alpha = J'^{\sigma\alpha}$. On en déduit que $\mathcal{J}_\alpha = (J'_{\sigma\alpha} + P')/P'$.

Montrons que σ préserve la structure de Coxeter, *i.e.* montrons que, pour tout $\alpha, \beta \in \Delta$, on a $m_{\alpha,\beta} = m_{\sigma\alpha,\sigma\beta}$. On déduit de la démonstration du lemme 4.10 de [20], et des propriétés de ψ, que $m_{\alpha,\beta}$ est le plus petit entier r tel qu'on ait l'égalité: $\mathcal{J}_\alpha\mathcal{J}_\beta \cdots = \mathcal{J}_\beta\mathcal{J}_\alpha \cdots$ (r facteurs dans chaque membre), et de même pour $m_{\sigma\alpha,\sigma\beta}$ et $J'_{\sigma\alpha}$, $J'_{\sigma\beta}$. Comme $\mathcal{J}_\alpha = (J'_{\sigma\alpha} + P')/P'$, ceci entraîne aussitôt que $m_{\alpha,\beta} \leq m_{\sigma\alpha,\sigma\beta}$. Pour établir l'égalité, il faut montrer que si

$$P' + J'_{\sigma\alpha}J'_{\sigma\beta} \cdots = P' + J'_{\sigma\beta}J'_{\sigma\alpha} \cdots \ (m_{\alpha,\beta} \text{ facteurs}) \tag{1}$$

alors

$$J'_{\sigma\alpha}J'_{\sigma\beta} \cdots = J'_{\sigma\beta}J'_{\sigma\alpha} \cdots \tag{2}$$

Le membre de gauche est J'_w, où $w = s_{\sigma\alpha}s_{\sigma\beta}\cdots$, et celui de droite est J'_y, où $y = s_{\sigma\beta}s_{\sigma\alpha}\cdots$ ($m_{\alpha,\beta}$ facteurs). Supposons $m_{\alpha,\beta} < m_{\sigma\alpha,\sigma\beta}$. Alors $w < s_{\sigma\beta}w$, et $y < s_{\sigma\alpha}y$. D'après 2.5, J'_w admet un unique quotient simple, noté $\overline{J'_w}$, et l'on a $J'_{\sigma\beta}\overline{J'_w} = 0$, car $J'_{\sigma\beta}J'_w = J'_{s_{\sigma\beta}w}$ est un idéal propre, et $J'_{\sigma\alpha}\overline{J'_w} = \overline{J'_w}$ puisque $J'_{\sigma\alpha}$ est idempotent. De même, $J'_{\sigma\alpha}\overline{J'_y} = 0$ et $J'_{\sigma\beta}\overline{J'_y} = \overline{J'_y}$.

D'autre part, d'après (1) l'on a $J'_w/(J'_w \cap P') \cong J'_y/(J'_y \cap P')$. Or $J'_w \cap P'$ et $J'_y \cap P'$ sont des idéaux propres (car P' est premier et ne contient ni $J'_{\sigma\alpha}$ ni $J'_{\sigma\beta}$); ceci entraîne donc que $\overline{J'_w} \cong \overline{J'_y}$, en contradiction avec le paragraphe précédent. Cette contradiction montre que $m_{\alpha,\beta} = m_{\sigma\alpha,\sigma\beta}$. La proposition est démontrée.

Montrons maintenant l'assertion suivante.

ASSERTION 2. – *$\widetilde{\tau}(P')$ est une réunion de composantes connexes de Δ'.*

Démonstration. – Pour tout $\alpha \in \Delta$, on a $J^\alpha(\lambda) = I(s_\alpha\lambda)$. D'après [19, §16], si α, β sont dans la même composante connexe Γ de Δ, alors s_α, s_β sont dans la même double cellule de W, et $d(U/J^\alpha(\lambda))$ et $d(U/J^\beta(\lambda))$ ont la même valeur $m(\Gamma)$, qui ne dépend que de Γ comme graphe de Coxeter. De plus, $m(\Gamma)$ est l'infimum des dimensions des orbites nilpotentes spéciales dans $\mathfrak{g}_\Gamma \setminus \{0\}$ (voir [19, 17.11], [10, 10.2.2, 10.3.2]). D'après

[7, 4.9], si Γ est de type A, D ou E, alors l'orbite nilpotente minimale est spéciale; sa dimension est bien connue, voir par exemple [10, 4.3.5]. Si $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$ est de type G_2, alors $J^{\alpha}(\lambda) = J_{\beta}(\lambda)$ et réciproquement, d'où $m(\Gamma) = 10$ d'après (2.4.2). D'autre part, en utilisant [10, 5.1.3, 5.2.2, 6.3.7], on voit que pour $\mathfrak{sp}_{2n}$ la plus petite orbite spéciale non-nulle correspond à la partition $(1^{2n-4}, 2^2)$; sa dimension est $4n-2$. Enfin, pour le type F_4, on déduit de la table [10, p. 128] que $m(F_4) = 22$. On obtient donc que $m(\Gamma)$ est donné par la table suivante:

Γ	A_n	$B_n - C_n$	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$m(\Gamma)$	$2n$	$4n-2$	$4n-6$	22	34	58	22	10

Soient maintenant $\alpha \in \Delta$, Γ la composante connexe de Δ contenant α, et Γ' la composante connexe de Δ' contenant $\sigma\alpha$. D'après l'assertion 1, on sait que $\sigma(\Gamma)$ est un sous-graphe de Coxeter de Γ'. D'autre part, comme $U/J^{\alpha}(\lambda) \cong U'/J'^{\sigma\alpha}(\mu)$, il vient $m(\Gamma) = m(\Gamma')$. L'examen de la table précédente montre alors que ceci entraîne $\sigma(\Gamma) = \Gamma'$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \Delta$, on en déduit que $\sigma(\Gamma)$ et son complémentaire, $\widetilde{\tau}(J')$, sont des réunions de composantes connexes de Δ'.

On peut maintenant achever la démonstration du théorème. Comme $\widetilde{\tau}(P')$ est une réunion de composantes connexes, on a

$$P' = I'_{\mu_1} \otimes U(\mathfrak{g}'_2) + U(\mathfrak{g}'_1) \otimes I'^{\max}_{\mu_2},$$

où $\mathfrak{g}'_1$ et $\mathfrak{g}'_2$ sont les idéaux de $\mathfrak{g}'$ correspondants à $\sigma(\Gamma)$ et $\widetilde{\tau}(P')$ respectivement, et où $\mu = \mu'_1 + \mu'_2$ est la décomposition correspondante. Alors $U(\mathfrak{g}'_2)/I'^{\max}_{\mu_2}$ est isomorphe à $\mathrm{End}_k(L(\mu'_2)) \cong M_n(k)$, où $n = \dim_k L(\mu'_2)$, et donc U'/P' est isomorphe à $M_n(U(\mathfrak{g}'_1)/I'_{\mu_1})$. Il en résulte que $U(\mathfrak{g}'_1)/I'_{\mu_1}$ est Morita équivalent à U_{λ}, et d'après le théorème 3.1, ceci entraîne que $\mathfrak{g}'_1 \cong \mathfrak{g}$. Le théorème est démontré.

Mentionnons un cas particulier du théorème, utile pour la suite.

COROLLAIRE. – *On conserve les hypothèses du théorème, et l'on suppose de plus que U'/P' est intègre, et que l'application naturelle $\mathfrak{g}' \to U'/P'$ est injective. Alors $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{g}$.*

Démonstration. – Gardons les notations de la démonstration du théorème. Comme U'/P' est intègre, alors $n = 1$, *i.e.* $I'^{\max}_{\mu_2}$ est l'idéal d'augmentation de $U(\mathfrak{g}'_2)$. Or on suppose que $\mathfrak{g}'$ s'injecte dans U'/P', et ceci entraîne que $\mathfrak{g}'_2 = 0$, *i.e.* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

3.4. Soient G le groupe algébrique semi-simple, connexe et simplement connexe, associé à $\mathfrak{g}$, et $\mathcal{B}$ la variété des drapeaux de G. Pour toute variété algébrique X, on notera $\mathrm{Diff}(X)$ l'algèbre des sections globales du faisceau des opérateurs différentiels sur X. Alors, avec les notations de 2.3, on sait que $\mathrm{Diff}(\mathcal{B})$ est isomorphe à U_{ρ}; voir [3] ou [6, 3.6–3.8].

On dira que X est une variété de drapeaux généralisée si c'est une variété complète et homogène sous un groupe algébrique affine.

THÉORÈME. – *Soit X une variété de drapeaux généralisée. Si* $\mathrm{Diff}(X) \cong \mathrm{Diff}(\mathcal{B})$, *alors $X \cong \mathcal{B}$.*

Démonstration. – D'abord, l'hypothèse entraîne que $\mathrm{Diff}(X)$ est intègre, et donc X connexe. Alors, sans perte de généralité on peut supposer que $X = G'/Q$, où G' est un groupe semi-simple, connexe et simplement connexe, et Q un sous-groupe parabolique de G' ne contenant aucun sous-groupe fermé normal de G' de dimension > 0. Soit

$\mathfrak{g}' = \mathrm{Lie}(G')$. L'hypothèse faite sur Q entraîne que l'application naturelle $\mathfrak{g}' \to \mathrm{Diff}(X)$ est surjective (son noyau étant l'intersection des conjugués de $\mathrm{Lie}(Q)$, un idéal de $\mathfrak{g}'$ contenu dans $\mathrm{Lie}(Q)$). De plus, d'après [6, 3.6–3.8] et [4, 2.3], on a $\mathrm{Diff}(X) \cong U(\mathfrak{g}')/P'$, où P' est l'annulateur d'un certain module induit, et l'on a $d(\mathrm{Diff}(X)) = 2\dim G'/Q$. Alors, d'après le corollaire précédent, l'hypothèse $\mathrm{Diff}(\mathcal{B}) \cong \mathrm{Diff}(X)$ entraîne que $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{g}$, d'où aussi $G' \cong G$. Enfin, de $d(\mathrm{Diff}(X)) = d(\mathrm{Diff}(\mathcal{B}))$ on tire $\dim Q = \dim B$. Donc Q est un Borel de G', et $X \cong \mathcal{B}$. □

4. Équivalence de Morita pour les algèbres de Lie réductives

4.1. Pour toute k-algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{k}$, on désigne par $\mathcal{R}(U(\mathfrak{k}))$ l'intersection des idéaux maximaux de codimension finie de $U(\mathfrak{k})$. Rappelons le lemme suivant, qui est probablement bien connu.

LEMME. – *Soient $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{a}$ deux k-algèbres de Lie. On suppose $\mathfrak{a}$ abélienne. Alors l'application* $\Phi : \mathrm{Prim}(\mathfrak{k}) \times \mathrm{Max}(U(\mathfrak{a})) \to \mathrm{Prim}(\mathfrak{k} \times \mathfrak{a})$, $(I, \mathfrak{m}) \mapsto I \otimes U(\mathfrak{a}) + U(\mathfrak{k}) \otimes \mathfrak{m}$ *est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés. En particulier, on a*

$$\mathcal{R}(U(\mathfrak{k} \times \mathfrak{a})) \cong \mathcal{R}(U(\mathfrak{k})) \otimes U(\mathfrak{a}). \tag{4.1.1}$$

Démonstration. – Soit $J \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{k} \times \mathfrak{a})$. Alors J contient un idéal maximal de $U(\mathfrak{a})$, d'après [13, Prop. 2.6.8], et il en résulte que $U(\mathfrak{k} \times \mathfrak{a})/J \cong U(\mathfrak{k})/(U(\mathfrak{k}) \cap J)$. Posant $\Psi(J) = (U(\mathfrak{k}) \cap J, U(\mathfrak{a}) \cap J)$, on en déduit que Φ et Ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre. De plus, il est clair qu'elles préservent les relations d'inclusion. Ceci prouve la première assertion, et la seconde en découle facilement. □

4.2. On désigne par $n(\mathfrak{k})$ le radical nilpotent d'une algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, c'est-à-dire l'intersection des noyaux des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{k}$. C'est un idéal de $\mathfrak{k}$ et donc $U(\mathfrak{k})n(\mathfrak{k})$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{k})$.

Rappelons que $\mathfrak{k}$ est dite réductive si $n(\mathfrak{k}) = \{0\}$ ou, de façon équivalente, si $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est abélienne et $\mathfrak{g}$ semi-simple; de plus, $\mathfrak{k}/n(\mathfrak{k})$ est réductive (voir, par exemple, [13, 1.7.3-1.7.4] et [8, I, n° 6.4, Prop. 6, Cor.]).

LEMME. – *On a $\mathcal{R}(U(\mathfrak{k})) = U(\mathfrak{k})n(\mathfrak{k})$ et donc $U(\mathfrak{k})/\mathcal{R}(U(\mathfrak{k})) \cong U(\mathfrak{k}/n(\mathfrak{k}))$. En particulier, $\mathfrak{k}$ est réductive si et seulement si $\mathcal{R}(U(\mathfrak{k})) = \{0\}$.*

Démonstration. – D'abord, si $\mathfrak{k}$ est réductive alors $\mathcal{R}(U(\mathfrak{k})) = \{0\}$, d'après (4.1.1), combiné avec [13, 1.6.3, 2.5.7]. Pour $\mathfrak{k}$ arbitraire, il est clair que $U(\mathfrak{k})n(\mathfrak{k}) \subseteq \mathcal{R}(U(\mathfrak{k}))$ et que $U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})n(\mathfrak{k}) \cong U(\mathfrak{k}/n(\mathfrak{k}))$. Par conséquent, $\mathcal{R}(U(\mathfrak{k}))/U(\mathfrak{k})n(\mathfrak{k})$ est isomorphe à $\mathcal{R}(U(\mathfrak{k}/n(\mathfrak{k})))$. Or ce dernier est nul, puisque $\mathfrak{k}/n(\mathfrak{k})$ est réductive. Le lemme en découle. □

4.3. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. – *Soient $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}'$ deux k-algèbres de Lie telles que $U(\mathfrak{k}) \overset{M}{\sim} U(\mathfrak{k}')$. Alors on a* $\mathfrak{k}/n(\mathfrak{k}) \cong \mathfrak{k}'/n(\mathfrak{k}')$ *et* $\dim n(\mathfrak{k}) = \dim n(\mathfrak{k}')$.

Démonstration. – Posons $\mathfrak{r} = \mathfrak{k}/n(\mathfrak{k})$ et $\mathfrak{r}' = \mathfrak{k}'/n(\mathfrak{k}')$. Ce sont des algèbres de Lie réductives. Supposons que $U(\mathfrak{k}) \overset{M}{\sim} U(\mathfrak{k}')$ et désignons par ϕ l'isomorphisme de treillis $\mathcal{I}(U(\mathfrak{k})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(U(\mathfrak{k}'))$ qui en résulte. Alors ϕ envoie $\mathcal{R}(U(\mathfrak{k}))$ sur $\mathcal{R}(U(\mathfrak{k}'))$ et induit donc, d'après la proposition 1.6 et le lemme 4.2, une équivalence $U(\mathfrak{r}) \overset{M}{\sim} U(\mathfrak{r}')$. D'autre part, on sait que $d(U(L)) = \dim_k L$, pour toute k-algèbre de Lie de dimension finie L (voir [31, 6.9]). Par conséquent, d'après le corollaire 1.6, on obtient

$$(4.3.1) \qquad \dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{k}', \quad \dim \mathfrak{r} = \dim \mathfrak{r}', \quad \text{et donc} \quad \dim n(\mathfrak{k}) = \dim n(\mathfrak{k}').$$

De plus, on a $\mathfrak{r} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{r}' \cong \mathfrak{g}' \times \mathfrak{a}'$, où $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ sont semi-simples et $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ abéliennes. Appliquant à $\mathfrak{g}$ les notations de 2.3–3.1, soient $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$ et I_λ l'idéal primitif minimal de $U(\mathfrak{g})$ correspondant. Soit I un idéal primitif minimal de $U(\mathfrak{r})$ tel que $I \cap U(\mathfrak{g}) = I_\lambda$ (de tels idéaux existent, d'après le lemme 4.1). Alors ϕ envoie I sur un idéal primitif minimal I' de $U(\mathfrak{r}')$ et donc, par le lemme 4.1, à nouveau, $I' \cap U(\mathfrak{g}')$ est un idéal primitif minimal I'_μ de $U(\mathfrak{g}')$. Comme $U(\mathfrak{r})/I \cong U(\mathfrak{g})/I_\lambda$ et $U(\mathfrak{r}')/I' \cong U(\mathfrak{g}')/I'_\mu$, alors on obtient une équivalence $U(\mathfrak{g})/I_\lambda \overset{M}{\sim} U(\mathfrak{g}')/I'_\mu$ et il en résulte que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$, d'après le théorème 3.1. De plus, comme $\dim \mathfrak{r} = \dim \mathfrak{r}'$, d'après (4.3.1), on obtient aussi que $\mathfrak{r} \cong \mathfrak{r}'$. Le théorème est démontré. □

5. Automorphismes de $U(\mathfrak{g})$ et automorphismes de diagramme

5.1. Soient $\mathrm{Aut}(U)$ le groupe d'automorphismes de U et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ celui de $\mathfrak{g}$. Le second est de façon naturelle un sous-groupe du premier. Soit G_0 le groupe algébrique adjoint de $\mathfrak{g}$; c'est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ qui agit trivialement sur Z et laisse stable tout idéal bilatère de U. Par conséquent, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/G_0$ agit de façon naturelle sur Z (et donc aussi sur $\mathrm{Car}(Z)$) et sur $\mathrm{Prim}(U)$. Afin de décrire cette action de façon canonique, il est utile de définir le diagramme de Dynkin et le groupe d'automorphismes de diagramme de $\mathfrak{g}$ de façon canonique.

5.2. Dans ce paragraphe, on oublie les notations introduites en 2.1. Soient r le rang de $\mathfrak{g}$ et K la forme de Killing. Pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, soit $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, soit $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ l'ensemble des bases de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, et soit $\widetilde{\mathcal{B}}(\mathfrak{h})$ l'ensemble des paires (Δ, α), où $\Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ et $\alpha \in \Delta$. De plus, soit $\mathcal{H}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{H}}$) l'ensemble des paires $(\mathfrak{h}, x)$, où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et où $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ (resp. $\widetilde{\mathcal{B}}(\mathfrak{h})$). Notons que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ opère de façon naturelle sur $\widetilde{\mathcal{H}}$ et sur $\Theta := G_0 \backslash \widetilde{\mathcal{H}}$, l'ensemble des G_0-orbites dans $\widetilde{\mathcal{H}}$. Par conséquent, il existe un homomorphisme de groupes $\Psi : \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Sym}(\Theta)$, où $\mathrm{Sym}(\Theta)$ désigne le groupe des permutations de Θ. Pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ on a, d'après [8, VII, n° 3.2, Th. 1; VIII, n° 5.2; Prop. 4], une bijection

$$G_0 \backslash \widetilde{\mathcal{H}} \xrightarrow{\sim} N_{G_0}(\mathfrak{h}) \backslash \widetilde{\mathcal{B}}(\mathfrak{h}),$$

où $N_{G_0}(\mathfrak{h})$ désigne le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G_0. On déduit donc de [8, VI, n° 1.5, Th. 2, Remarques 4,7] que Θ a r éléments et définit, pour tout $(\mathfrak{h}, \Delta) \in \mathcal{H}$, une indexation canonique de Δ. En effet, pour $\theta \in \Theta$ et $(\mathfrak{h}, \Delta) \in \mathcal{H}$, il existe un unique élément α_θ de Δ tel que $(\mathfrak{h}, (\Delta, \alpha_\theta))$ appartienne à θ, et l'on a $\Delta = \{\alpha_\theta\}_{\theta \in \Theta}$.

Soient $\theta \neq \theta' \in \Theta$. Pour tout $(\mathfrak{h}, \Delta) \in \mathcal{H}$, soit h_θ l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que $K(h_\theta, -) = \alpha_\theta$ et définissons de même $h_{\theta'}$. Posons $n_{\theta\theta'} := 2K(h_\theta, h_{\theta'})/K(h_{\theta'}, h_{\theta'})$. (C'est un entier négatif ou nul). Puisque K est G_0-invariante, alors $n_{\theta\theta'}$ ne dépend que de θ et θ'.

DÉFINITION 5.2.1. – *Le diagramme de Dynkin de* $\mathfrak{g}$ *est le diagramme* $D = D(\mathfrak{g})$ *ayant* Θ *pour ensemble de sommets et où deux sommets distincts* θ, θ' *sont reliés par* $n_{\theta\theta'} n_{\theta'\theta}$ *arêtes; de plus ces arêtes portent une flèche dirigée vers* θ' *lorsque* $n_{\theta'\theta} > n_{\theta\theta'}$.

DÉFINITION 5.2.2. – *Le groupe d'automorphismes de diagramme de* $\mathfrak{g}$ *est le groupe* $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{g})$ *d'automorphismes de* D*, c'est-à-dire le sous-groupe de* $\mathrm{Sym}(\Theta)$ *formé des permutations* σ *telles que* $n_{\sigma(\theta)\sigma(\theta')} = n_{\theta\theta'}$*, quels que soient* $\theta, \theta' \in \Theta$.

Puisque K est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-invariante, on a alors $\Psi(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \subseteq \Gamma(\mathfrak{g})$. De plus, d'après [8, VII, n° 5.3, Cor. 1] et (la démonstration de) [8, VI, n° 4.2, Cor.], on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION. – Ψ *induit un isomorphisme* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/G_0 \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{g})$.

5.3. Reprenons maintenant les notations de 2.1. En particulier, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et une base Δ de $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sont fixées. Posons

$$A(R) = \{g \in GL(\mathfrak{h}^*) \mid g(R) = R\} \quad \text{et} \quad A(R, \Delta) = \{g \in A(R) \mid g(\Delta) = \Delta\}.$$

Posons aussi $R^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in R\}$ et $\Delta^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, et définissons $A(R^\vee)$, $A(R^\vee, \Delta^\vee)$ de façon analogue. D'après 5.2, Δ est en bijection naturelle avec Θ et Γ opère donc sur Δ. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $\tau(\gamma)$ (resp. $\tau^\vee(\gamma)$) l'élément de $GL(\mathfrak{h}^*)$ (resp. $GL(\mathfrak{h})$) défini par $\tau(\gamma)(\alpha) = \gamma(\alpha)$ (resp. $\tau^\vee(\gamma)(H_\alpha) = H_{\gamma(\alpha)}$), pour tout $\alpha \in \Delta$. D'après [8, VI, n° 4.2, Prop. 1], τ et $\tau^\vee$ induisent des isomorphismes $\Gamma \xrightarrow{\sim} A(R, \Delta)$ et $\Gamma \xrightarrow{\sim} A(R^\vee, \Delta^\vee)$. L'action naturelle de Γ sur Z et sur $\mathrm{Prim}(U)$ peut alors être décrite de la façon suivante.

PROPOSITION. – *Soit* $\gamma \in \Gamma$*. Pour tout* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$*, on a* $\gamma(\chi_\lambda) = \chi_{\tau(\gamma)\lambda}$, $\gamma(I_\lambda) = I_{\tau(\gamma)\lambda}$, *et* $\gamma(I(\lambda)) = I(\tau(\gamma)\lambda)$*. Donc, en particulier, l'isomorphisme de Harish-Chandra* $Z \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$ *est* Γ*-équivariant.*

Démonstration. – Pour tout $\alpha \in \Delta$, fixons un vecteur non-nul $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. D'après [8, VIII, §5, n° 1], l'homomorphisme $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \to \Gamma$ admet une section κ telle que $\kappa(\gamma)_{|\mathfrak{h}} = \tau^\vee(\gamma)$ et $\kappa(\gamma)(X_\alpha) = X_{\gamma(\alpha)}$, quels que soient $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \in \Delta$. Notons que $\kappa(\Gamma)$ laisse stables $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}$, et que ρ est fixé par $\tau(\Gamma)$.

Par suite, quels que soient $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\gamma \in \Gamma$, on a $\mathrm{Ker}(\tau(\gamma)\lambda - \rho) = \tau^\vee(\gamma)(\mathrm{Ker}(\lambda - \rho))$ $= \kappa(\gamma)(\mathrm{Ker}(\lambda - \rho))$. Comme $M(\lambda) \cong U/K(\lambda)$, où $K(\lambda)$ désigne l'idéal à gauche engendré par $\{x - (\lambda - \rho)(x) \mid x \in \mathfrak{b}\}$, il en résulte que $\kappa(\gamma)$ induit un isomorphisme semi-linéaire $\varphi_\gamma : M(\lambda) \xrightarrow{\sim} M(\tau(\gamma)\lambda)$ tel que $\varphi_\gamma(ux) = \kappa(\gamma)(u)\,\varphi_\gamma(x)$, pour $u \in U$, $x \in M(\lambda)$. A son tour, φ_γ induit un isomorphisme semi-linéaire $L(\lambda) \xrightarrow{\sim} L(\tau(\gamma)(\lambda))$. On en déduit que $\kappa(\gamma)(I_\lambda) = I_{\tau(\gamma)(\lambda)}$ et $\kappa(\gamma)(I(\lambda)) = I(\tau(\gamma)\lambda)$, et aussi que $\gamma(\chi_\lambda) = \chi_{\tau(\gamma)\lambda}$. Ceci prouve la proposition. $\square$

5.4. On obtient alors le résultat suivant.

THÉORÈME. – (a) *Soient* $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$ *et* $\mu \in \mathfrak{h}^*$*. Supposons que* $U_\lambda \cong U_\mu$*. Alors il existe* $\gamma \in A(R)$ *tel que* $\mu = \gamma\lambda$.

(b) *Pour tout* $\phi \in \mathrm{Aut}(U)$*, il existe* $\gamma \in \Gamma$ *tel que* $\phi|_Z = \gamma|_Z$*. Par conséquent, l'image de l'application de restriction* $\mathrm{Aut}(U) \to \mathrm{Aut}(Z)$ *est égale à* Γ.

Démonstration. – Soient $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$ et $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\varphi : U_\lambda \xrightarrow{\sim} U_\mu$. D'après le lemme 2.3, μ est un poids entier régulier et donc, quitte à le remplacer par un W-conjugué, on peut supposer $\mu \in \mathcal{P}^{++}$. De plus, d'après le théorème 3.1, il existe $\sigma \in \Gamma$ tel que

$$\varphi(J_\alpha(\lambda)) = J_{\sigma\alpha}(\mu), \qquad \forall\, \alpha \in \Delta. \tag{5.4.1}$$

Or, d'après (2.4.3), l'on a $rg(U/J_\alpha(\lambda)) = \lambda(H_\alpha)$ et, de même, $rg(U/J_{\sigma\alpha}(\mu)) = \mu(H_{\sigma\alpha}) = (\sigma^{-1}\mu)(H_\alpha)$. Comme les H_α, $\alpha \in \Delta$, engendrent $\mathfrak{h}$, il résulte de (5.4.1) que $\mu = \sigma\lambda$. Ceci prouve l'assertion (a).

Démontrons l'assertion (b). Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(U)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, posons $\mathcal{P}_\gamma^{++} = \{\lambda \in \mathcal{P}^{++} \mid \phi(I_\lambda) = \gamma(I_\lambda)\}$. D'après ce qui précède, on a $\mathcal{P}^{++} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{P}_\gamma^{++}$. Comme $\mathcal{P}^{++}$ est Zariski dense dans $\mathfrak{h}^*$, qui est irréductible, et comme $|\Gamma| < \infty$, on en déduit qu'il existe $\sigma \in \Gamma$ tel que $\mathcal{P}_\sigma^{++}$ soit Zariski dense. Désignons par θ l'application $\mathfrak{h}^* \to \mathrm{Max}Z$, $\lambda \mapsto \mathrm{Ker}\chi_\lambda$. Alors les applications régulières $\phi \circ \theta$ et $\sigma \circ \theta$ sont égales puisqu'elles coïncident sur le sous-ensemble dense $\mathcal{P}_\sigma^{++}$. Par conséquent, on a $\phi|_Z = \sigma|_Z$.

Ceci montre que $\mathrm{Aut}(U)$ et Γ ont même image dans $\mathrm{Aut}(Z)$. Enfin, il est facile de voir, en utilisant le fait que l'isomorphisme $Z \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$ est Γ-équivariant, que Γ opère fidèlement sur Z. Ceci termine la démonstration du théorème.

Au vu du résultat connu pour $\mathfrak{sl}_2$ ([12], [17]) et du théorème 5.4, il paraît raisonnable de formuler la conjecture suivante. (Il est fait allusion à une telle conjecture dans [17, p. 178].)

CONJECTURE 2. – *Soient $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Si $U_\lambda \cong U_\mu$, alors λ et μ sont conjugués par $A(R)$.*

5.5. On aimerait démontrer que l'application naturelle $\mathrm{Aut}(U) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Prim}(U))$ a aussi pour image Γ.

CONJECTURE 3. – *Pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}(U)$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\phi(I) = \gamma(I)$, pour tout $I \in \mathrm{Prim}(U)$.*

Le mieux que nous ayons pu faire dans cette direction est le résultat suivant. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $\Gamma(R_\lambda)$ le groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin $D(R_\lambda)$. Désignons par $\mathfrak{h}^*_{\text{A-rég}}$ l'ensemble des poids réguliers λ qui vérifient la condition suivante:

$$\forall\sigma \in \Gamma(R_\lambda) \setminus \{\mathrm{id}\}, \quad \exists\alpha \in \Delta_\lambda \text{ tel que } \lambda(H_\alpha) \neq \lambda(H_{\sigma\alpha}). \tag{5.5.1}$$

(Notons que $\mathcal{P}_{\text{A-rég}} := \mathcal{P} \cap \mathfrak{h}^*_{\text{A-rég}}$ n'est autre que l'ensemble des poids entiers dont le stabilisateur dans $A(R)$ est trivial.) Posons $\mathfrak{h}^{*++}_{\text{A-rég}} := \mathfrak{h}^{*++} \cap \mathfrak{h}^*_{\text{A-rég}}$ et notons Ω son image dans $\mathrm{Max}Z$. Il résulte du théorème 3.1 que Ω est stable par $\mathrm{Aut}(U)$. Observons aussi que Ω contient un ouvert de Zariski non-vide de $\mathrm{Max}Z$. En effet, si on désigne par z_0 l'élément de Z correspondant à l'élément

$$\prod_{\substack{\alpha,\beta\in R\\ \alpha\neq\beta}} (H_\alpha - H_\beta)$$

de $S(\mathfrak{h})^W$, alors on vérifie aisément que Ω contient le complémentaire du lieu des zéros de z_0.

THÉORÈME. – (a) *Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^{*++}_{\text{A-rég}}$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}(U_\lambda)$. Alors $\varphi(I) = I$, pour tout $I \in \mathrm{Spec}(U_\lambda)$.*

(b) *Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(U)$. Il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\phi(I) = \gamma(I)$, pour tout $I \in \pi^{-1}(\Omega)$.*

Démonstration. – Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^{*++}_{\text{A-rég}}$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}(U_\lambda)$. D'après le théorème 3.1, il existe $\sigma \in \Gamma(R_\lambda)$ tel que $\varphi(J_\alpha(\lambda)) = J_{\sigma\alpha}(\lambda)$, quel que soit $\alpha \in \Delta_\lambda$. D'après (2.4.3), on en déduit que $\lambda(H_\alpha) = \lambda(H_{\sigma\alpha})$, pour tout $\alpha \in \Delta_\lambda$, et alors la condition (5.5.1) entraîne que $\sigma = \mathrm{id}$.

Ainsi, les $J_\alpha(\lambda)$, $\alpha \in \Delta$, sont φ-invariants et donc, d'après la proposition 2.5, $J_w(\lambda)$ et $I(w\lambda)$ le sont aussi, pour tout $w \in W_\lambda$. Compte-tenu de (2.3.1), ceci prouve l'assertion (a).

Soit maintenant $\phi \in \mathrm{Aut}(U)$. D'après le théorème 5.4(b), il existe $\gamma \in \Gamma(R)$ tel que $\phi|_Z = \gamma|_Z$. On déduit alors de (a) que $\gamma^{-1}\phi$ laisse stable chaque élément de $\pi^{-1}(\Omega)$. Ceci prouve l'assertion (b). $\square$

6. Une approche en *K*-théorie

6.1. Si A est un anneau, on note $K_0(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules à droite projectifs et de type fini. De plus, si A est noethérien on désigne par $G_0(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules à droite de type fini.

THÉORÈME. – *Soit* $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$ *tel que* $\mathrm{Stab}_\Gamma(\lambda) = \{1\}$. *Alors tout automorphisme de* U_λ *agit trivialement sur* $K_0(U_\lambda)$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin des notations suivantes.

6.2. Soit G le groupe algébrique semi-simple, connexe et simplement connexe, tel que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Soient $T \subseteq B$ les sous-groupes correspondant à $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b}$. Le groupe des caractères de T s'identifie à $\mathcal{P}$. Soit $\mathbb{Z}\mathcal{P}$ l'anneau de groupe de $\mathcal{P}$. On note $\{e^\nu,\, \nu \in \mathcal{P}\}$ sa base naturelle. Rappelons que $K_0(G/B)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $|W|$, isomorphe à $\mathbb{Z}\mathcal{P}/\mathcal{I}_W$, où $\mathcal{I}_W$ désigne l'idéal engendré par les W-invariants dans l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}\mathcal{P}$. Pour $\nu \in \mathcal{P}$, on désignera encore par e^ν l'image de e^ν dans $K_0(G/B)$.

Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$. D'après le lemme 2.3, U_λ est de dimension globale finie et donc $K_0(U_\lambda)$ s'identifie à $G_0(U_\lambda)$. Pour tout U_λ-module de type fini M, on désigne par $[M]$ son image dans $G_0(U_\lambda)$. D'autre part, d'après [16, Th. 2] et [36, Th. 6, Prop. 8], on a un isomorphisme $\psi : K_0(G/B) \xrightarrow{\sim} G_0(U_\lambda)$ tel que

$$\psi(e^\nu) = [L(M(\lambda), M(\lambda+\nu))], \qquad \forall\, \nu \in \mathcal{P}. \tag{6.2.1}$$

De plus, on a $J_w(\lambda) \cong L(M(\lambda), M(w\lambda))$, d'après la proposition 2.5(b), et il en résulte que

$$[J_w(\lambda)] = \psi(e^{w\lambda-\lambda}), \qquad \forall\, w \in W. \tag{6.2.2}$$

6.3. Nous aurons besoin du résultat suivant (qui est peut-être connu).

PROPOSITION. – *Pour tout* $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$, *les éléments* $e^{w\lambda}$, $w \in W$ *forment une base de* $K_0(G/B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Démonstration. – Notons $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement naturel $\mathbb{Z}\mathcal{P} \times S(\mathfrak{h}) \to k$, défini par $\langle e^\nu, P\rangle = P(\nu)$, pour $\nu \in \mathcal{P}$, $P \in S(\mathfrak{h})$. Soit $\mathcal{H} := \{\mathcal{P} \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \mid \langle \mathcal{I}, \mathcal{P}\rangle = 0\}$ l'ensemble des polynômes harmoniques. Alors, pour tout $P \in \mathcal{H}$, l'application $\mathbb{Z}\mathcal{P} \to k$, $e^\nu \mapsto P(\nu)$ se factorise à travers $K_0(G/B)$. Par conséquent, pour montrer que les $e^{w\lambda}$, $w \in W$, sont linéairement indépendants, il suffit de trouver des éléments $P_w, w \in W$, de $\mathcal{H}$ tels que le déterminant de la matrice $(P_x(y\lambda))_{x,y\in W}$ soit non-nul.

Ma démonstration initiale reposait sur un choix particulier des P_w, obtenus en utilisant les opérateurs de Demazure. Je remercie le rapporteur d'avoir suggéré la démonstration plus simple suivante.

Soit I l'idéal de $S(\mathfrak{h})$ engendré par les polynômes W-invariants sans terme constant. Il est bien connu que $\mathcal{H}$ est un supplémentaire gradué de I, et admet une base $\{P_x,\, x \in W\}$, où chaque P_x est de degré $\ell(x)$. De plus, d'après un théorème de Chevalley, les P_x

forment une base de $S(\mathfrak{h})$ sur l'algèbre des invariants $S(\mathfrak{h})^W$ (cf [15, §III.3]). Considérons le déterminant $\Psi := \text{dét}\,(y^{-1}P_x)_{x,y\in W}$; s'il est non nul c'est un polynôme homogène sur $\mathfrak{h}^*$ de degré $D = \sum_{x\in W} \ell(x)$. Pour tout $\alpha \in R^+$, W est la réunion disjointe des paires $\{y, ys_\alpha\}$, et, pour tout x, le polynôme $s_\alpha y^{-1}P_x - y^{-1}P_x$ est divisible par α. Donc Ψ est divisible par le polynôme $\Phi := (\prod_{\alpha\in R^+} \alpha)^{|W|/2}$. Or on sait que $|W| \cdot |R^+| = 2D$: ceci se déduit de l'égalité

$$\sum_{x\in W} t^{\ell(x)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-t^{d_i}}{1-t},$$

où les d_i sont les exposants de W; voir par exemple [15, IV.1.11, III.2.10]. Il reste à montrer que $\Psi \neq 0$. Alors on aura $\Psi = c\Phi$, avec $c \in k^*$, et donc $\Psi(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ régulier.

6.4. Comme les P_x sont linéairement indépendants sur $S(\mathfrak{h})^W$, le fait que $\Psi \neq 0$ découle du lemme suivant.

LEMME. – *Soient A un anneau commutatif intègre, W un groupe fini d'automorphismes de A, et P_x, $x \in W$, des éléments de A linéairement indépendants sur A^W. Alors le déterminant $\Psi := \text{dét}\,(y^{-1}P_x)_{x,y\in W}$ est non-nul.*

Démonstration. – Posons $n = |W|$. Soient L le corps des fractions de A, $K = L^W$, et V le sous-espace de L^n formé des éléments $(\xi_x)_{x\in W}$ tels que $\sum_{y\in W}(y^{-1}P_x)\xi_x = 0$ pour tout $y \in W$. Comme ce système linéaire est invariant par W, alors V est W-stable donc muni d'une K-structure. Si on avait $\Psi = 0$, alors V serait non-trivial et contiendrait donc un élément non-trivial de K^n, en contradiction avec le fait que les P_x sont linéairement indépendants sur A^W. Le lemme est démontré, ainsi que la proposition 6.3. □

6.5. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 6.1. Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$ tel que $\mathrm{Stab}_\Gamma(\lambda) = \{1\}$, et soit $\phi \in \mathrm{Aut}(U_\lambda)$. Alors, d'après la démonstration du théorème 5.5(a), on a $\phi(J_w(\lambda)) = J_w(\lambda)$, pour tout $w \in W$. Par conséquent, d'après (6.2.2) et la proposition 6.3, ϕ laisse fixe une base de $K_0(U_\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et, comme $K_0(U_\lambda)$ est sans torsion, il en résulte que ϕ opère trivialement sur $K_0(U_\lambda)$. □

6.6. Nous venons de voir que le théorème 6.1 se déduisait du théorème 5.5. Ceci admet la réciproque suivante.

PROPOSITION. – *Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\phi \in \mathrm{Aut}(U_\lambda)$. Supposons que ϕ opère trivialement sur $K_0(U_\lambda)$. Alors on a $\phi(I) = I$, pour tout $I \in \mathrm{Spec}(U_\lambda)$.*

Démonstration. – Posons $A = U_\lambda$ et rappelons que A est de longueur finie comme A-bimodule (voir, par exemple [6.9(8), 6.31]). Pour tout $I \in \mathrm{Spec}A$, on désigne par $\widehat{I}$ le plus petit idéal contenant strictement I, et par $\theta(I)$ le plus petit idéal de A tel que $\theta(I)\widehat{I} = \widehat{I}$. Il est clair que $\theta(I)$ est idempotent. D'après la démonstration de [30, Prop. 4.16], l'application $I \mapsto \theta(I)$ est injective.

On note $\mathrm{Tr}P$ l'idéal de trace d'un A-module à droite projectif P (voir, par exemple, [30, 4.4]). Soit $I \in \mathrm{Spec}A$. D'après [30, 4.12], il existe un A-module projectif $P(I)$ tel que $\mathrm{Tr}P(I) = \theta(I)$. On désigne par $P(I)^\phi$ l'espace vectoriel $P(I)$ muni de la structure de A-module définie par $m{\cdot}u = m\phi^{-1}(u)$, pour $m \in P(I)^\phi$, $u \in A$. Notons que $\mathrm{Tr}P(I)^\phi = \phi(\mathrm{Tr}P(I)) = \phi(\theta(I))$. D'autre part, il résulte de la définition que $\phi(\theta(I)) = \theta(\phi(I))$.

Comme ϕ opère trivialement $K_0(A)$, il existe $m, n \in \mathbb{N}^+$ tels que

$$P(I) \oplus A^m \cong P(I)^\phi \oplus A^n. \tag{6.6.1}$$

De plus, comme $P(I)$ et $P(I)^\phi$ ont le même rang, on a $m = n$. Soit J un idéal premier minimal au-dessus de $\theta(I)$. Alors $P(I)J = P(I)$ et, en tensorisant (6.6.1) par A/J, on obtient que

$$(A/J)^n \cong P(I)^\phi / P(I)^\phi J \oplus (A/J)^n. \tag{6.6.2}$$

Il en résulte que $P(I)^\phi/P(I)^\phi J = 0$ et donc $J \supseteq \theta(\phi(I))$. On en déduit que Rad $\theta(I) \supseteq \theta(\phi(I))$, où Rad $\theta(I)$ désigne le nilradical de $\theta(I)$. Puisque $(\text{Rad}\ \theta(I))^r \subseteq \theta(I)$, pour $r \gg 0$, et puisque $\theta(\phi(I))$ est idempotent, il en résulte que $\theta(\phi(I)) \subseteq \theta(I)$. Par symétrie, on obtient que $\theta(I) = \theta(\phi(I))$, et comme θ est injective ceci entraîne que $I = \phi(I)$. □

6.7. Pour terminer cette partie, il paraît raisonnable de faire la conjecture suivante qui implique, d'après la proposition 6.6, la conjecture 3.

CONJECTURE 4. – *Soit ϕ un automorphisme de U tel que $\phi|_Z$ = id. Alors ϕ opère trivialement sur $K_0(U_\lambda)$, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

7. Invariants de groupes finis

7.1. Dans cette partie, nous revenons sur un résultat utilisé dans [1]. Pour toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, on désigne par $\overline{U}(\mathfrak{g})$ le quotient de $U(\mathfrak{g})$ par l'idéal primitif minimal correspondant à la représentation triviale.

THÉORÈME. – *Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ deux k-algèbres de Lie semi-simples et soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe fini de* $\mathrm{Aut}(\overline{U}(\mathfrak{g}))$. *Supposons que $\overline{U}(\mathfrak{g})^{\mathcal{G}}$ soit isomorphe à un quotient primitif minimal A de $U(\mathfrak{g}')$. Alors $A = \overline{U}(\mathfrak{g}')$ et $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{g}$.*

Remarque. – 1) Je ne sais pas si cette situation peut se produire lorsque $\mathcal{G}$ n'est pas trivial (cf [1, Th. 1]).

2) Comme l'a signalé le rapporteur, ce résultat est en défaut pour certains quotients primitifs non minimaux. Par exemple, il est prouvé dans [31, V.4.3], (resp. [38], [34]) que si $\mathfrak{g}$ est de type A_{2n-1} (resp. G_2, D_4) il existe un idéal primitif J, non-minimal, et une action du groupe fini $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, S_3) sur $U(\mathfrak{g})/J$, dont l'anneau des invariants est isomorphe à un quotient primitif de $U(\mathfrak{g}')$, avec $\mathfrak{g}'$ de type C_n (resp. A_2, G_2).

3) Depuis la circulation de la version initiale de cet article, ce théorème a été généralisé par A. Joseph [28].

Démonstration. – Il résulte de l'hypothèse que A a un quotient de dimension un et ceci entraîne que $A = \overline{U}(\mathfrak{g}')$. Posons $\overline{U} = \overline{U}(\mathfrak{g})$ et $\overline{U}' = \overline{U}(\mathfrak{g}')$; nous identifions le second à $\overline{U}^{\mathcal{G}}$. Observons que $\overline{U}$ est un $\overline{U}'$-module à gauche de type fini, d'après [34, 5.9]. (Ce résultat interviendra plusieurs fois dans la suite.)

Appliquons à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les notations de la partie 2. En particulier, notons J_α, $\alpha \in \Delta$, (resp. $J'_{\alpha'}$, $\alpha' \in \Delta'$) les éléments minimaux de $\mathrm{Spec}(\overline{U}) \setminus \{0\}$ (resp. $\mathrm{Spec}(\overline{U}') \setminus \{0\}$).

Pour $I \in \mathrm{Spec}(\overline{U})$, on pose $\psi(I) = I \cap \overline{U}'$. Etant donnés $I, J \in \mathrm{Spec}(\overline{U}')$, on écrit $I \sim J$ s'ils sont tous deux des idéaux premiers minimaux au-dessus d'un certain $\psi(P)$, où $P \in \mathrm{Spec}(\overline{U})$. D'après [34, 3.6, 4.2], ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathrm{Spec}(\overline{U}')$ et l'application qui associe à un élément $P \in \mathrm{Spec}(\overline{U})$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux au-dessus de $\psi(P)$ induit une correspondance bijective, respectant les relations d'inclusion, entre les $\mathcal{G}$-orbites dans $\mathrm{Spec}(\overline{U})$ et les classes d'équivalence de $\sim$ dans $\mathrm{Spec}(\overline{U}')$.

Comme les J_α, $\alpha \in \Delta$, sont complètement premiers, d'après (2.4.3), alors il en est de même des $\psi(J_\alpha)$ et donc il résulte du résultat précité de Montgomery que ψ induit une surjection $\sigma : \Delta \to \Delta'$ telle que

$$\psi(J_\alpha) = J'_{\sigma\alpha}, \qquad \forall\, \alpha \in \Delta. \tag{7.1.1}$$

Démontrons que σ est bijective. Posons $\widehat{J}_{\alpha'} = \bigcap_{\gamma \in \sigma^{-1}(\alpha')} J_\gamma$, pour $\alpha' \in \Delta'$, et posons aussi $\widehat{J}_{\Delta'} = \sum_{\alpha' \in \Delta'} \widehat{J}_{\alpha'}$. Alors chaque $\widehat{J}_{\alpha'}$ est $\mathcal{G}$-stable et l'on a, par conséquent,

$$\widehat{J}_{\Delta'} \cap \overline{U}' = \sum_{\alpha' \in \Delta'} J'_{\alpha'} = J'_{\Delta'}. \tag{7.1.2}$$

Il en résulte que $\overline{U}/\widehat{J}_{\Delta'}$ est un module à gauche de type fini sur $\overline{U}'/J'_{\Delta'} = k$, et on en déduit que $\widehat{J}_{\Delta'} = J_\Delta$, puisque ce dernier est l'unique idéal de $\overline{U}$ de codimension finie. Ceci entraîne que σ est injective. En effet, si on avait $\sigma\alpha = \sigma\beta$, pour $\alpha \neq \beta$, alors $J_\Delta = \widehat{J}_{\Delta'}$ serait contenu, par exemple, dans $J_{\Delta \setminus \{\beta\}}$, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, σ est injective et donc bijective. De plus, comme $\psi(gJ_\alpha) = \psi(J_\alpha)$, pour $g \in \mathcal{G}$, $\alpha \in \Delta$, il en résulte que chaque J_α est $\mathcal{G}$-invariant. On obtient alors, exactement comme dans la démonstration de [1, Prop. 1.14], que σ induit un isomorphisme de graphes de Coxeter $C(R) \xrightarrow{\sim} C(R')$ et donc un isomorphisme $W \xrightarrow{\sim} W'$, $w \mapsto w^\sigma$ tel que $s_\alpha^\sigma = s_{\sigma\alpha}$, pour tout $\alpha \in \Delta$.

Donc, afin de démontrer que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$, il reste seulement à démontrer que si $\mathcal{C}$ est une composante connexe de Δ de type B_n ou C_n, avec $n \geq 3$, alors $\sigma(\mathcal{C})$ est également de type B_n ou C_n, respectivement. Nous aurons besoin d'une proposition auxilliaire.

7.2. Supposons que $\mathcal{C}$ soit une composante connexe de Δ de type B_n ou C_n, avec $n \geq 3$. Posons $[n] = \{1, \ldots, n\}$ et choisissons une numérotation $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des racines simples de $\mathcal{C}$ telle que $m_{\alpha_1, \alpha_2} = 4$ et $m_{\alpha_{i-1}, \alpha_i} = 3$, pour $i = 3, \ldots, n$. Notons que w_0 centralise $W_{\mathcal{C}}$, puisque $w_0(\alpha) = -\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$. Posons $s_i = s_{\alpha_i}$ et $\lambda_i = \lambda(H_{\alpha_i})$, pour $i \in [n]$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Pour $i_1, \ldots, i_r \in [n]$, nous écrirons parfois $s_{i_1 \cdots i_r}$ au lieu de $s_{i_1} \cdots s_{i_r}$.

Pour $w \in W$, on pose $\tau(w) = \{\alpha \in \Delta \mid \ell(ws_\alpha) < \ell(w)\}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^{*++}$. Pour $P \in \mathrm{Spec}(U_\lambda)$, on pose $\widetilde{\tau}(P) = \{\alpha \in \Delta_\lambda \mid J_\alpha(\lambda) \subseteq P\}$. D'après [2.6(5)(8), 5.7, 5.20(7)], on a

$$\widetilde{\tau}(I(w_0 w \lambda)) = \tau(w). \tag{7.2.1}$$

PROPOSITION. – *Soit* $\lambda \in \mathcal{P}^{++}$. *Alors, avec les notations précédentes, il existe un unique* $P \in \operatorname{Spec}(U_\lambda)$ *tel que*

$$\widetilde{\tau}(P) = \{\alpha_1, \alpha_3\} \quad et \quad d(U_\lambda/P) = d(U_\lambda) - 6. \tag{7.2.2}$$

De plus, on a

$$\operatorname{rg}(U_\lambda/P) = \begin{cases} (1/2)\,\lambda_1\lambda_3(\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \lambda_3) & si\ \mathcal{C}\ \ est\ de\ type\ \ B_n; \\ \lambda_1\lambda_3(2\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \lambda_3) & si\ \mathcal{C}\ \ est\ de\ type\ C_n. \end{cases} \tag{7.2.3}$$

Démonstration. – Démontrons d'abord l'existence. Pour $w \in W$, posons $\mathcal{P}^+_w := \{\mu \in \mathcal{P}^+ \mid \Delta^0_\mu \subseteq \tau(w)\}$. D'après Joseph ([23, 5.12]), il existe un polynôme $p_w \in S(\mathfrak{h})$ et un entier positif c_w tel qu'on ait, pour tout $\mu \in \mathcal{P}^+_w$,

$$p_w(\mu) = \operatorname{rg}(U/I(w\mu)) \quad \text{et} \quad c_w\, p_w(\mu) = \operatorname{rg}\mathcal{L}(L(w\mu), L(w\mu)). \tag{7.2.4}$$

En particulier, on a $p_w(\mu) \in \mathbb{N}^+$ pour tout $\mu \in \mathcal{P}^+_w$.

Soit $\mathfrak{p}_{\{2,3\}}$ la sous-algèbre parabolique (contenant $\mathfrak{b}$) associée à $\{\alpha_2, \alpha_3\}$. Pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\mu(H_{\alpha_1}), \mu(H_{\alpha_2}) \in \mathbb{N}^+$, on désigne par $\widehat{L}(\mu)$ le $\mathfrak{p}_{\{2,3\}}$-module simple de plus haut poids $\mu - \rho$ et on pose $M_{\{2,3\}}(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_{\{2,3\}})} \widehat{L}_{\{2,3\}}(\mu)$. Rappelons que

$$M_{\{2,3\}}(\mu) \cong M(\mu)/\big(M(s_2\mu) + M(s_3\mu)\big) \tag{7.2.5}$$

(voir, par exemple, le premier paragraphe de [19, 15.15]).

Soit $v = w_0 s_{3231}$. D'après (7.2.1), on a $\widetilde{\tau}(I(v\lambda)) = \tau(s_{3231}) = \{\alpha_1, \alpha_3\}$. Soit $\lambda \in \mathcal{P}^+_v$. Observons que $v = s_{3231} w_0$. Donc, d'après (7.2.5) et [19, 4.13(8)–(10), 15.3(4)], on a une suite exacte

$$0 \to L(vs_1\lambda) \to M_{\{2,3\}}(v\lambda) \to L(v\lambda) \to 0. \tag{7.2.6}$$

On renvoie à [19, 8.3] pour la définition de la multiplicité $e(M)$ d'un U-module de type fini M. Alors, d'après [19, 15.3(1)], on a $d(M_{\{2,3\}}(\lambda)) = d(L(vs_1\lambda)) = |R^+| - 3$ et

$$\begin{aligned} e(M_{\{2,3\}}(\lambda)) - e(L(vs_1\lambda)) &= \dim \widehat{L}_{\{2,3\}}(v\lambda) - \dim \widehat{L}_{\{2,3\}}(vs_1\lambda) \\ &= \frac{t}{2}\,\lambda_1\lambda_3(t\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \lambda_3) > 0, \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

où l'on a posé $t = -\alpha_1(H_{\alpha_2})$. Combiné avec [19, 8.6, 10.9], ceci entraîne que

$$d(L(v\lambda)) = d(M_{\{2,3\}}(\lambda)) \quad \text{et} \quad d(U_\lambda/I(v\lambda)) = d(U_\lambda) - 6. \tag{7.2.8}$$

Par conséquent, $I(v\lambda)$ vérifie la condition (7.2.2). De plus, on déduit de [22, 8.1.(iii)] et [19, 15.3(5), 15.21.(b)] que

$$\begin{aligned} c_v p_v(\lambda) &= \operatorname{rg}\mathcal{L}(M_{\{2,3\}}(\lambda), M_{\{2,3\}}(\lambda)) - \operatorname{rg}\mathcal{L}(L(vs_1\lambda), L(vs_1\lambda)) \\ &= \dim \widehat{L}_{\{2,3\}}(v\lambda) - \dim \widehat{L}_{\{2,3\}}(vs_1\lambda) \\ &= \frac{t}{2}\,\lambda_1\lambda_3(t\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \lambda_3). \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

Si $\mathcal{C}$ est de type B_n on obtient aussitôt que $c_v = 1$, en appliquant (7.2.9) à $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Si $\mathcal{C}$ est de type C_n alors l'équation (7.2.9), appliquée à $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 0$ puis à $\lambda_1 = \lambda_3 = 1 = \lambda_2$, entraîne que c_v divise 3 et 5, et donc $c_v = 1$ dans ce cas aussi. Ceci montre que l'idéal $I(v\lambda)$ vérifie la condition (7.2.3).

Démontrons maintenant l'unicité. Pour $x, y \in W$ on pose $y \leq_L x$ si $I(w_0 y\lambda) \subseteq I(w_0 x\lambda)$, et $y \preceq_L x$ s'il existe $z \in W$ tel que $x = zy$ et $\ell(x) = \ell(y) + \ell(z)$. D'après [19, 2.6(7), 5.19], on a $y \preceq_L x \implies y \leq_L x$.

Soit w un élément de W tel que $I(w_0 w\lambda)$ vérifie (7.2.2). Démontrons que $I(w_0 w\lambda) = I(v\lambda)$. D'abord, on a $\tau(w) = \{\alpha_1, \alpha_3\}$, d'après (7.2.1), et donc $w = w' s_3 s_1$, où w' vérifie $\ell(w') = \ell(w) - 2$ et $\tau(w' s_3) \subseteq \{\alpha_2, \alpha_3\}$, $\tau(w' s_1) \subseteq \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Donc, en particulier, $w \in W_{\mathcal{C}}$.

Supposons temporairement que $w' \in W_{\mathcal{C}\setminus\{\alpha_2\}}$. Dans ce cas, l'hypothèse $\tau(w' s_3) \subseteq \{\alpha_2, \alpha_3\}$ entraîne que $w' s_3$ appartient à l'ensemble

$$\left\{x \in W_{\{3,\dots,n\}} \mid \ell(x) < \ell(x s_i), \quad \text{pour } i = 4, \dots, n\right\} = \left\{s_3,\ s_4 s_3,\ \dots,\ s_n \cdots s_4 s_3\right\}.$$

Donc $w = s_r \cdots s_3\, s_1$, pour un $r \in \{3, \dots, n\}$. Il résulte alors de [19, 16.4] que $I(w_0 w\lambda) = I(w_0 s_3 s_1 \lambda)$. Mais, d'après [19, 9.15.a), 10.9], on a $d(U_\lambda / I(w_0 s_3 s_1 \lambda)) = d(U_\lambda) - 4$, en contradiction avec (7.2.2).

Par conséquent, $w' \notin W_{\mathcal{C}\setminus\{\alpha_2\}}$ et on en déduit que $w = u s_2 s_3 s_1$, où u vérifie $\ell(u) = \ell(w) - 3$ et $\tau(u s_2 s_3) \subseteq \{\alpha_2, \alpha_3\}$, $\tau(u s_2 s_1) \subseteq \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Il y a alors deux cas à considérer.

1) Supposons que $u \in W_{\mathcal{C}\setminus\{\alpha_3\}}$. Alors, en raisonnant comme plus haut, on obtient que $w = x\, s_r \cdots s_3$, où $r \geq 3$ et $x \in \{s_{2121},\ s_{121},\ s_{21}\}$. On déduit alors de [19, 16.4] que $I(w_0 w\lambda) = I(w_0 x s_3 \lambda)$ et que

$$I(w_0 s_{1213} \lambda) = I(w_0 s_{213} \lambda) = I(w_0 s_{13} \lambda); \tag{7.2.10}$$

$$I(w_0 s_{21213} \lambda) = I(w_0 s_{2321213} \lambda) \supseteq I(v\lambda). \tag{7.2.11}$$

(Il est utile de considérer aussi [21, Figure 2, p. 59].)

Puisque $d(I(w_0 s_{13} \lambda)) = d(U_\lambda) - 4$, on a nécessairement $x = s_{2121}$. Il en résulte que $I(w_0 w\lambda) \supseteq I(v\lambda)$ et, comme $d(U_\lambda / I(w_0 w\lambda)) = d(U_\lambda) - 6 = d(U_\lambda / I(v\lambda))$, il vient $I(w_0 w\lambda) = I(v\lambda)$.

2) Si $u \notin W_{\mathcal{C}\setminus\{\alpha_3\}}$, alors on a $w \succeq_L s_{3231}$ ou $w \succeq_L s_{34231}$ et donc $I(w_0 w\lambda)$ contient $I(v\lambda)$ ou $I(w_0 s_{34231} \lambda)$. Or, puisque

$$s_2 y < y = s_{3231} < s_{34321} = z < s_2 z,$$

on a $s_{3231} \leq_L s_{34321}$, d'après [19, 16.4(c)], et donc $I(w_0 s_{34231} \lambda) \supseteq I(v\lambda)$. Il en résulte que $I(w_0 w\lambda) \supseteq I(v\lambda)$ et comme plus haut on obtient alors $I(w_0 w\lambda) = I(v\lambda)$. Ceci prouve l'unicité. □

7.3. Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 7.1. Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de Δ de type B_n ou bien C_n, avec $n \geq 3$. Posons $\mathcal{C}' = \sigma(\mathcal{C})$. Les notations et résultats de 7.2 se transposent de façon évidente à $\mathfrak{g}'$ et $\mathcal{C}'$. En particulier, on a $\sigma\alpha_i = \alpha'_i$, pour $i \in [n]$. Soit P l'unique élément de $\mathrm{Spec}(\overline{U})$ vérifiant (7.2.2) et soit $Q \in \mathrm{Spec}(\overline{U}')$ un idéal premier minimal au-dessus de $P \cap \overline{U}'$. Puisque $J_\alpha \cap \overline{U}' = J'_{\alpha'}$, pour tout $\alpha \in \Delta$, et puisque la correspondance définie dans [35, 3.4–3.6, 4.2] préserve les relations d'inclusion, alors, pour tout $\alpha \in \Delta$, on a $Q \supseteq J'_{\alpha'} \Leftrightarrow P \supseteq J_\alpha$. Comme $\widetilde{\tau}(P) = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ il vient $\widetilde{\tau}'(Q) = \{\alpha'_1, \alpha'_3\}$. De plus, puisque $\overline{U}$ est un $\overline{U}'$-module à gauche de type fini, alors, d'après [5, 7.2.(4)], l'on a $d(\overline{U}'/Q) = d(\overline{U}/P) = N - 6$, où $N = d(\overline{U}) = d(\overline{U}')$. Or, d'après la proposition 7.2 appliquée à $\mathfrak{g}'$, il n'existe qu'un seul $P' \in \mathrm{Spec}(\overline{U}')$ ayant ces propriétés. On en déduit que $P \cap \overline{U}' = P'$. Par conséquent, d'après [5, 7.2.(5)], $\mathrm{rg}\,(\overline{U}'/P')$ divise $\mathrm{rg}\,(\overline{U}/P)$. Or, d'après (7.2.3), on a

$$\mathrm{rg}\,(\overline{U}/P) \text{ resp. } \mathrm{rg}\,(\overline{U}'/P') = \begin{cases} 2 & \text{si } \mathcal{C} \text{ resp. } \mathcal{C}' \text{ est de type } B_n; \\ 5 & \text{si } \mathcal{C} \text{ resp. } \mathcal{C}' \text{ est de type } C_n. \end{cases}$$

Il en résulte que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ doivent être du même type. Le théorème 7.1 est démontré. $\square$

8. Cohomologie de Hochschild et groupes de Weyl

Dans cette section on suppose, pour simplifier, que le corps de base est $\mathbb{C}$.

8.1. On va établir le théorème suivant, qui répond partiellement à la conjecture 1. On conserve les notations de 3.1. Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\mu \in \mathfrak{h}'^*$.

THÉORÈME. – *On suppose λ régulier et $U_\lambda \overset{M}{\sim} U'_\mu$. Alors μ aussi est régulier, et les groupes de Weyl W et W' sont isomorphes.*

Démonstration. – Pour commencer, μ est régulier, d'après le lemme 2.3.b. D'autre part, il est bien connu que l'algèbre de cohomologie $H^\bullet(G/B, \mathbb{C})$ est isomorphe à l'algèbre des covariants de W dans $S(\mathfrak{h}^*)$. La démonstration repose alors sur les deux résultats qui suivent.

8.2. Dans ce paragraphe, on oublie toutes les notations précédentes. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des pseudo-réflections, $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans des réflections de G. Pour tout $H \in \mathcal{H}$, soit m_H l'ordre du groupe cyclique G_H, le stabilisateur de H dans G, et soit $\ell_H \in V^*$ une équation de H. On notera $A(V) = S(V)/I$ l'algèbre des covariants, où $S(V)$ est l'algèbre symétrique de V et I l'idéal engendré par les G-invariants homogènes de degré > 0.

PROPOSITION. – *G est déterminé par la structure d'algèbre graduée de $A(V)$.*

Démonstration. – Quitte à remplacer V par V/V^G, on peut supposer que $V^G = 0$. On rappelle le lemme bien connu suivant. Pour tout $H \in \mathcal{H}$, on pose $\mathcal{G}(\mathcal{H}, H, m_H) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid g\mathcal{H} = \mathcal{H},\ g|_H = \mathrm{id},\ \text{et } g^{m_H} = \mathrm{id}\}$.

LEMME 8.2.1. – *On suppose $V^G = 0$. Alors, pour tout $H \in \mathcal{H}$, on a $\mathcal{G}(\mathcal{H}, H, m_H) = G_H$. En particulier, G est le groupe engendré par les $\mathcal{G}(\mathcal{H}, H, m_H)$, pour $H \in \mathcal{H}$.*

Démonstration. – Soient $H \in \mathcal{H}$ et ξ une racine primitive de l'unité d'ordre m_H. Il existe une réflection $s \in G$, d'hyperplan H et ayant ξ pour valeur propre. Il suffit de montrer que s est l'unique élément de $\mathcal{G}(\mathcal{H}, H, m_H)$ ayant ces propriétés. Soit s' un élément ayant ces propriétés. Alors $u := s's^{-1}$ stabilise H et vérifie dét $(u) = 1$, donc est unipotent. D'autre part, u stabilise $\mathcal{H}$ et donc l'ensemble fini des droites $\mathbb{C}\ell_H$ dans V^*. Comme ces droites engendrent V^* (puisque $V^G = 0$), il en résulte que u est d'ordre fini. Donc $u = 1$, et $s' = s$. Le lemme est démontré. $\square$

Soit $N = \sum_{H\in\mathcal{H}}(m_H - 1)$, le nombre de réflections dans G. Notons A_i les composantes homogènes de $A = A(V)$. On sait que $A_i = 0$ pour $i > N$, et que $\dim A_N = 1$ (voir, par exemple, [15, §§II.3–4]). Soit x_0 un générateur de A_N. Prenant des coordonnées par rapport à une base de $A_1 = V$, on voit que pour tout $v \in A_1$ l'on a $v^N = \phi(v)x_0$, où ϕ est un polynôme homogène de degré N, uniquement déterminé à un multiple scalaire non-nul près.

LEMME 8.2.2. – *On a* $\phi = \prod_{H\in\mathcal{H}} \ell_H^{m_H-1}$. *Par conséquent, la structure d'algèbre graduée de* $A(V)$ *détermine l'ensemble* $\{(H, m_H), H \in \mathcal{H}\}$.

Démonstration. – On sait que G agit sur A_N par le caractère $g \mapsto$ dét (g), et que dans $S(V^*)$ le sous-G-module des semi-invariants pour le caractère $\chi : g \mapsto$ dét (g^{-1}) est un module libre sur $S(V^*)^G$, engendré par l'élément $\Psi = \prod_{H\in\mathcal{H}} \ell_H^{m_H-1}$ (voir, par exemple, [15, §§II.3–4]). Pour tout $v \in A_1$, on a

$$\phi(g\cdot v)\,x_0 = (g\cdot v)^N = g\cdot v^N = \phi(v)\,g\cdot x_0 = \phi(v)\,\text{dét}\;(g)\,x_0,$$

et ceci montre que ϕ est un semi-invariant de poids χ. Comme $\deg\phi = N$, il en résulte que $\phi = \Psi$. Le lemme est démontré. $\square$

La proposition découle alors des lemmes 1 et 2. $\square$

Remarques. – 1) Je remercie T. Levasseur pour avoir suggéré que ma démonstration, formulée initialement pour un groupe de Weyl, devait s'étendre aux groupes de réflections complexes.

2) B. Kostant m'a aimablement informé que le fait que l'ensemble $\{x \in H^2(G/B) \mid x^N = 0\}$ s'identifie à la réunion des hyperplans de réflection dans $\mathfrak{h}^*$ était connu de lui depuis longtemps, avec une démonstration totalement différente.

8.3. Enfin, W. Soergel a démontré le théorème suivant, suite à une question de ma part. On reprend les notations de 3.1.

THÉORÈME. – (Soergel, [37]) *Soit* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *régulier. Alors l'algèbre de cohomologie de Hochschild* $\mathrm{Ext}^\bullet_{D_\lambda\otimes D_\lambda^{op}}(D_\lambda, D_\lambda)$ *est isomorphe à l'algèbre de cohomologie* $H^\bullet(G/B, \mathbb{C})$.

Combiné avec la proposition 8.2, ceci entraîne le théorème 8.1. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ALEV et P. POLO, *A rigidity theorem for finite group actions on enveloping algebras of semisimple Lie algebras* (*Adv. in Math.*, Vol. 111, 1995, pp. 208-226).

[2] H. BASS, *Algebraic K-theory*, Benjamin, London Amsterdam, 1968.

[3] A. BEILINSON et J. BERNSTEIN, *Localisation de* $\mathfrak{g}$*-modules*, (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 292, 1981, pp. 15-18).

[4] W. BORHO, *Berechnung der Gelfand-Kirillov Dimension bei induzierte Darstellungen* (*Math. Annalen*, Vol. 225, 1977, pp. 179-194).

[5] W. BORHO, *On the Joseph-Small additivity principle for Goldie ranks* (*Compositio Math.*, Vol. 47, 1982, pp. 3-29).

[6] W. BORHO et J. L. BRYLINSKI, *Differential Operators on Homogeneous Spaces. I* (*Invent. math.*, Vol. 69, 1982, pp. 437-476).

[7] W. Borho et J. C. Jantzen, *Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfacher Lie-Algebra* (*Invent. math.*, Vol. 39, 1977, pp. 1-53).

[8] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chap. I, IV–VI, VII–VIII*, Hermann, Paris, 1971, 1968, 1975.

[9] A. W. Chatters et C. R. Hajarnavis, *Rings with chain conditions*, Research Notes in Math., Vol. 44, Pitman, Boston London Melbourne, 1980.

[10] D.H. Collingwood et W. M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.

[11] M. Demazure, *Automorphismes et déformations des variétés de Borel* (*Inventiones math.*, Vol. 39, 1977, pp. 179-186).

[12] J. Dixmier, *Quotients simples de l'algèbre enveloppante de* $\mathfrak{sl}_2$ (*J. Algebra*, Vol. 24, 1973, pp. 551-564).

[13] J. Dixmier, *Algèbres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris Bruxelles Montréal, 1974.

[14] H. Hecht et D. Miličić, *On the cohomological dimension of the localization functor* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 108, 1990, pp. 249-254).

[15] H. Hiller, *Geometry of Coxeter groups*, Research Notes in Maths, Vol. 54, Pitman, Boston London Melbourne, 1982.

[16] T. J. Hodges, *K-Theory of D-modules and primitive factors of enveloping algebras of semisimple Lie algebras* (*Bull. Sc. math.*, T. 113, 1989, pp. 85-88).

[17] T. J. Hodges, *Morita Equivalence of Primitive factors of* $U(\mathfrak{sl}(2))$, pp. 175-179 in: *Kazhdan–Lusztig theories and related topics* (ed. V. Deodhar), Contemporary Maths, Vol. 139, 1992.

[18] T. J. Hodges et S. P. Smith, *On the global dimension of certain primitive factors of the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra* (*J. London Math. Soc.*, Vol. 32, 1985, pp. 411-418).

[19] J. C. Jantzen, *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie Algebren*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983.

[20] A. Joseph, *On the annihilators of the simple subquotients of the principal series* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 10, 1977, pp. 419-440).

[21] A. Joseph, *Gelfand-Kirillov dimension for the annihilators of simple quotients of Verma modules* (*J. London Math. Soc.*, Vol. 18, 1978, pp. 50-60).

[22] A. Joseph, *Kostant's Problem, Goldie Rank and the Gelfand-Kirillov Conjecture* (*Invent. Math.*, Vol. 56, 1980, pp. 191-213).

[23] A. Joseph, *Goldie Rank in the Enveloping Algebra of a Semisimple Lie Algebra, I* (*J. Algebra*, Vol. 65, 1980, pp. 284-306).

[24] A. Joseph, *Goldie Rank in the Enveloping Algebra of a Semisimple Lie Algebra, III* (*J. Algebra*, Vol. 73, 1981, pp. 295-326).

[25] A. Joseph, *Kostant's problem and Goldie rank*, pp. 249-266 in: *Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups* (éds. J. Carmona, M. Vergne), Lecture Notes in Math., Vol. 880, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981.

[26] A. Joseph, *On the Cyclicity of Vectors Associated with Duflo Involutions*, pp. 144-188 in: *Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups* (éds. J. Carmona, P. Delorme, M. Vergne), Lecture Notes in Math., Vol. 1243, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987.

[27] A. Joseph, *A Sum Rule for Scale Factors in the Goldie Rank Polynomials* (*J. Algebra*, Vol. 118, 1988, pp. 276-311).

[28] A. Joseph, *Coxeter structure and finite group action*, pp. 185-219 in : *Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants* (éds. J. Alev, G. Cauchon), Soc. Math. France, 1997.

[29] A. Joseph et L. W. Small, *An additivity principle for Goldie rank* (*Israel J. Math.*, Vol. 31, 1978, pp. 105-114).

[30] A. Joseph et J. T. Stafford, *Modules of* $\mathfrak{k}$*-finite vectors over semisimple Lie algebras* (*Proc. London Math. Soc.*, Vol. 49, 1984, pp. 361-384).

[31] G. R. Krause et T. H. Lenagan, *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, Research Notes in Math., Vol. 116, Pitman, Boston London Melbourne, 1985.

[32] T. Levasseur et J. T. Stafford, *Rings of differential operators on classical rings of invariants* (*Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 412, 1989).

[33] W. M. McGovern, *Dixmier Algebras and the Orbit Method*, pp. 397-416 in: *Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory* (eds. A. Connes et al.), Progress in Math., Vol. 92, Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1990.

[34] S. Montgomery, *Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings*, Lecture Notes in Math., Vol. 818, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[35] S. Montgomery, *Prime ideals in fixed rings* (*Comm. in Algebra*, Vol. 9, 1981, pp. 423-449).

[36] W. SOERGEL, *The prime spectrum of the enveloping algebra of a reductive Lie algebra* (*Math. Z.*, Vol. 204, 1990, pp. 559-581).

[37] W. SOERGEL, *Hochschild cohomology of regular maximal primitive quotients of enveloping algebras of semisimple Lie algebras* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 29, 1996, pp. 535-538).

[38] A. ZAHID, *Les endomorphismes* $\mathfrak{k}$*-finis des modules de Whittaker* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 117, 1989, pp. 451-477).

(Manuscript received January 22, 1998)

P. POLO
UMR 7586 du CNRS,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
BP 191, 4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail address: polo@math.jussieu.fr