J. BRIANÇON

Espaces conormaux relatifs. I. Conditions de transversalité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 30, nº 5 (1997), p. 675-692
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1997_4_30_5_675_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 30, 1997, p. 675 à 692.

ESPACES CONORMAUX RELATIFS I : CONDITIONS DE TRANSVERSALITÉ

PAR J. BRIANÇON

RÉSUMÉ. – Soient $f = (f_1, \ldots, f_p)$ une famille de fonctions holomorphes définies dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$, nulles à l'origine, définissant une intersection complète; nous introduisons la condition suivante de transversalité : pour deux familles disjointes extraites de f quelconques, les espaces conormaux relatifs associés ne se rencontrent que suivant la section nulle du fibré cotangent. Nous démontrons que cette condition est équivalente à celles de C. Sabbah : f est sans éclatement en codimension zéro, et son lieu critique est contenu dans la réunion des zéros des fonctions $(f_1, \ldots, f_p)$. Lorsque cette condition est remplie, l'espace conormal relatif à f est la somme fibrée des espaces conormaux relatifs aux fonctions $(f_1, \ldots, f_p)$; cela implique certaines propriétés des modules différentiels associés à f et l'existence d'équations fonctionnelles spéciales réalisées par $f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$.

ABSTRACT. – Let $f = (f_1, \ldots, f_p)$ be a family of holomorphic functions on a neighbourhood of zero in $\mathbf{C}^n$, defining a complete intersection. We introduce the following condition of transversality: for any two disjoint sub-families of f, the relative associated conormal spaces intersect only along the zero section of the cotangent space. We prove the equivalence between this condition and C. Sabbah's one: f has no blowing-up in codimension zero, and the critical locus of f is included in the union of zero locus of the functions $(f_1, \ldots, f_p)$. When this condition is satisfied, the relative conormal space of f is the fiber bundle sum of the conormal spaces of the functions $(f_1, \ldots, f_p)$; this condition also implies some properties for differential modules associated to f, and the existence of particular functional equations satisfied by $f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$.

Introduction

Soient $f = (f_1, \ldots, f_p)$ une famille de fonctions holomorphes définies dans un voisinage X de l'origine de $\mathbf{C}^n$, nulles à l'origine, définissant l'intersection complète $f^{-1}(0)$. L'espace conormal relatif de f, W_f, est l'adhérence dans le fibré cotangent T^*X de la réunion des fibrés conormaux aux fibres lisses de f, $\{(x; \lambda_1 df_1(x) + \cdots + \lambda_p df_p(x))/x \in X; (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{C}^p\}$.

Nous introduisons également le sous espace $W_f^{\#}$ de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ qui est l'adhérence de l'ensemble : $\{(x; \lambda_1 df_1(x) + \cdots + \lambda_p df_p(x); \lambda_1 f_1(x), \ldots, \lambda_p f_p(x))\}$ lorsque x décrit X et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ décrit $\mathbf{C}^p$.

Ces espaces conormaux jouent un rôle essentiel dans l'étude des systèmes différentiels naturellement attachés à l'application f, et dans la recherche d'équations fonctionnelles satisfaites par les puissances de f : W_f est la variété caractéristique de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n} f^s$ comme $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n}$-module et $W_f^{\#}$ celle de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n}[s] f^s$ comme $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n}[s]$-module.

Ils ont été étudiés en particulier par M. Kashiwara et T. Kawai ([K.K]), par C. Sabbah ([Sab 1], [Sab 2], [Sab 3]). A la suite de ces auteurs, nous avons entrepris un travail systématique sur ce sujet dans [BBMM], avec H. Biosca, Ph. Maisonobe et H. Maynadier; je présente ici les résultats purement géométriques obtenus au cours de ce travail. Les liens avec les modules différentiels seront exposés dans : « Espaces conormaux relatifs II : Modules différentiels ».

Présentons maintenant le contenu de cet article.

On dit que l'application f est sans éclatement en codimension zéro lorsque la fibre de son espace conormal relatif au dessus de $f^{-1}(0)$ est de dimension n. On sait alors que cette fibre est Lagrangienne ([H.M.S]). Nous démontrons au cours de cet article que si f est sans éclatement en codimension zéro, et si le sous ensemble réduit $\mid f^{-1}(0) \mid$ est lisse, f est une déformation triviale, par changement de coordonnées à la source, d'une application finie.

Introduisons maintenant les propriétés suivantes :

(F) **Condition de finitude** : la projection naturelle de $W_f^{\#}$ dans W_f est finie.

(LS) **Conditions de F. Loeser et C. Sabbah**:

– f est sans éclatement en codimension zéro

– le lieu critique de f est contenu dans la réunion des hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$ pour $j = 1, \ldots, p$.

(T) **Conditions de transversalité** : pour tous sous-ensembles disjoints $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_l\}$ de $\{1, \ldots, p\}$, l'intersection des espaces conormaux relatifs à $f_I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})$, et à $f_J = (f_{j_1}, \ldots, f_{j_l})$ est égale à la section nulle $T_X^* X$ du fibré cotangent.

Dans [Sab 3], en vue d'obtenir des équations fonctionnelles spéciales, C. Sabbah introduit la condition (LS) et montre qu'elle implique la condition (F); nous reprenons ici sa preuve.

Nous démontrons ensuite que si la condition (T) est satisfaite, W_f est la somme fibrée des espaces conormaux relatifs aux fonctions $f_1, \ldots, f_p$, puis que la condition (LS) est vérifiée.

Dans le cas particulier où l'ensemble réduit des zéros de f est lisse, nous démontrons ensuite le résultat suivant: sous les hypothèses (LS), il existe un système de coordonnées locales dans lequel chacune des fonctions f_j est une puissance de la j-ième coordonnée.

La fin du travail est consacrée à la preuve de (T) sous l'hypothèse (LS) pour avoir finalement l'équivalence entre ces deux conditions. Nous raisonnons par induction à la fois sur n et sur p; en plus du théorème de C. Sabbah, un outil essentiel est un théorème de connexité de A. Grothendieck qui permet d'obtenir la transversalité partout sachant qu'elle est vraie en dehors de l'origine.

La situation géométrique qui résulte de la transversalité semble difficile à décrire en général. Terminons en donnant un exemple fourni par notre dernier résultat : si $f = (f_1, f_2) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^2, 0$ est un germe d'intersection complète à singularité isolée vérifiant $\mathrm{Crit}(f) \subset f_1^{-1}(0) \cup f_2^{-1}(0)$, alors : quitte à renuméroter, $f_1^{-1}(0)$ est lisse, et $f_2^{-1}(0)$ est une déformation à nombre de Milnor constant de $f^{-1}(0)$.

1. Définition des conditions de finitude et de transversalité et énoncé du théorème

1.1. Définitions

Soit $f = (f_1, \cdots, f_p) : \mathbf{C}^n, 0 \rightarrow \mathbf{C}^p, 0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète, et dont le lieu critique, $Crit(f)$, contient l'origine.

Dans la suite, nous confondrons ce germe avec un représentant, en considérant donc f définie sur un voisinage X de 0 dans $\mathbf{C}^n$, voisinage que nous nous permettrons de réduire si necessaire.

Appelons $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection du fibré cotangent à X sur X, et définissons les sous-ensembles analytiques suivants :

W_f, l'espace conormal relatif à f, est l'adhérence dans T^*X de l'ensemble des points $\{(x, \sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(x))\}$ lorsque x parcourt X et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ parcourt $\mathbf{C}^p$.

$W_0(f) = W_f \cap f^{-1}(0)$ sa trace sur l'intersection complète.

$W_f^{\#}$ l'adhérence de l'ensemble des points $\{(x, \sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(x), \lambda_1 f_1(x), \ldots, \lambda_p f_p(x))\}$ lorsque x parcourt X et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ parcourt $\mathbf{C}^p$, adhérence dans $T^*X \times \mathbf{C}^p$.

DÉFINITION 1. – *f est sans éclatement en codimension 0 si le morphisme composé $f \circ \pi$: $W_f \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} \mathbf{C}^p$ est équidimensionnel.*

Remarque. – Cette notion de morphisme sans éclatement en codimension 0 apparaît lorsqu'on veut construire une stratification d'un morphisme f vérifiant la condition (a_f) de Thom ; elle a été introduite et étudiée par H. Hironaka ; J.P.G. Henry, M. Merle et C. Sabbah ([H.M.S]) démontrent, en particulier, le « principe de spécialisation lagrangien » : si f est sans éclatement en codimension 0, $W_0(f)$ est une sous-variété lagrangienne de T^*X.

Pour une partie $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, p\}$, notons $f_I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})$ l'application correspondante, que nous appelons sous-famille de f indexée par I.

Notons que la condition d'être sans éclatement en codimension 0 ne passe pas, en général aux sous-familles : on peut choisir par exemple deux fonctions présentant de l'éclatement (voir l'exemple 1 ci-dessous) et ajouter une troisième fonction de manière à obtenir une singularité isolée à l'origine (donc sans éclatement en codimension 0).

Nous nous proposons d'étudier et de comparer les conditions géométriques impliquant la finitude de la projection naturelle de $W_f^{\#}$ sur W_f.

DÉFINITION 2. – *Définissons les conditions suivantes éventuellement vérifiées par f :*

(F) **Condition de finitude** *: la projection naturelle p de $W_f^{\#}$ dans W_f est finie*

(LS) **Conditions de F. Loeser et C. Sabbah** :

– *$(\alpha) f$ est sans éclatement en codimention zéro*

– *(β) le lieu critique de f est contenu dans la réunion des hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$ pour $j = 1, \ldots, p$.*

(T) **Conditions de transversalité** *: pour tous sous-ensembles disjoints $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_l\}$ de $\{1, \ldots, p\}$, l'intersection des espaces conormaux relatifs à $f_I = (f_i, \ldots, f_{i_k})$, et à $f_J = (f_{j_1}, \ldots, f_{j_l})$ est égale à la section nulle T_X^*X du fibré cotangent.*

Remarquons d'abord que les fibres de $\pi \circ p$ étant coniques, la propriété (F) signifie : $p^{-1}(0,0) = (0,0,0)$ et elle équivaut à p propre, à fibres finies, surjective.

D'autre part, de façon évidente, la condition (F) se transmet aux sous-familles, et il en est de même pour la condition (T); par contre cela est faux en ce qui concerne les conditions (α) et (β) considérées séparément : nous l'avons déjà dit pour (α); pour (β), voir l'exemple 3 ci-dessous.

PROPOSITION 1. – *Si $f = (f_1, \dots, f_p)$ vérifie la condition (F), alors, pour toute partie $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ de $\{1, \dots, p\}$, la sous-famille $f_J = (f_{j_1}, \dots, f_{j_k})$ vérifie la condition de lieu critique :*

$$(\beta) \ : \ \mathrm{Crit}\,(f_J) \subset \cup_{l=1}^{k} f_{j_l}^{-1}(0)$$

Comme la condition (F) passe à la sous-famille f_J, il suffit de démontrer que f elle-même satisfait la condition (β) : $\mathrm{Crit}(f) \subset \cup_{j=1}^{p} f_j^{-1}(0)$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; on peut trouver un germe de chemin analytique $\gamma \ : \mathbf{C}, 0 \to Crit(f)\,, 0$ tel que pour t non nul, $\gamma(t)$ n'appartient pas à la réunion des hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$; il existe alors une relation non triviale $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t) df_j(\gamma(t)) = 0$ avec $\lambda_j(t) \in \mathbf{C}\{t\}$ et $\lambda_j(t) f_j(\gamma(t))$ non tous nuls. On peut donc définir le minimum ω des valuations de ces germes; alors : $(\gamma(t), 0, \frac{1}{t^\omega}\lambda_1(t) f_1(\gamma(t)), \dots, \frac{1}{t^\omega}\lambda_p(t) f_p(\gamma(t)))$ est dans $W_f^{\#}$ et tend vers une limite non nulle de la fibre de $p^{-1}(0,0)$ lorsque t tend vers zéro; cela contredit la finitude de p.

1.2. Exemples

Exemple 1. – La condition (F) n'implique pas la condition (LS); en effet soit

$$f \ : \ \mathbf{C}^3,\, 0 \to \mathbf{C}^2,\, 0$$
$$(x_1,\, x_2,\, x_3) \mapsto (x_1^2 - x_2^2 x_3,\, x_2)$$

Le calcul donne : $\lambda_1 df_1(x) + \lambda_2 df_2(x) = (2\lambda_1 x_1\,,\, -2\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2\,,\, -\lambda_1 x_2^2)$, puis : $p^{-1}((0,0,x_3),(\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = \{(0,0,x_3),(\xi_1,\xi_2,\xi_3),(x_3\xi_3,-2x_3\xi_3)\}$; p est donc bien finie. Par contre f présente de l'éclatement en codimension 0 car la fibre de W_f en tout point $(0,0,x_3)$ contient tout le conormal à ce point.

Exemple 2. – La seule condition (β) sur le lieu critique n'implique pas (F); soit

$$f \ : \ \mathbf{C}^3,\, 0 \to \mathbf{C}^2,\, 0$$
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + (1 + x_2^2) x_2 x_3\,,\, x_2 x_3)$$

La condition de lieu critique est satisfaite, mais p n'est pas finie, comme on peut s'en apercevoir en testant le long du chemin : $(x_1(t) = 0, x_2(t) = t, x_3(t) = t, \lambda_1(t) = \frac{1}{t^2}, \lambda_2 = \frac{-1}{t^2})$.

Exemple 3. – La condition (β) ne passe pas aux sous-familles : soit

$$f \ : \ \mathbf{C}^4,\, 0 \to \mathbf{C}^3,\, 0$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 x_2 + x_3^2 + x_4^2\,,\, x_3 x_4\,,\, x_1)$$

On vérifie facilement que f satisfait la condition (β), mais que ce n'est pas le cas pour l'application définie par les deux premières fonctions.

1.3. Comparaison des conditions

THÉORÈME 1. – *Soit* $f = (f_1, \ldots, f_p) \quad : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$ *un germe d'application analytique définissant une intersection complète ; on a les implications suivantes :*

$$(\mathrm{T}) \Leftrightarrow (\mathrm{LS}) \Rightarrow (\mathrm{F})$$

L'implication (LS) $\Rightarrow$ (F) est un résultat de C. Sabbah que nous démontrons au paragraphe suivant ; nous prouverons ensuite que (T) $\Rightarrow$ (LS) ; puis, dans le dernier paragraphe, nous montrerons la réciproque.

2. Les conditions de F. Loeser et C. Sabbah impliquent la condition de finitude

2.1. Traduction de la condition (F)

Introduisons l'application F de $X \times Y$ (avec $Y = \mathbf{C}^p$) dans $\mathbf{C}^p$ définie par : $F = (e^{y_1} f_1, \ldots, e^{y_p} f_p)$.

Son conormal relatif, W_F est l'adhérence dans $T^*(X \times Y)$ de l'ensemble :

$$\left\{ \left(x, y, \sum_{j=1}^{p} \mu_j e^{y_j} df_j(x), \mu_1 e^{y_1} f_1(x), \ldots, \mu_p e^{y_p} f_p(x) \right) ; x \in X, y \in Y, (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbf{C}^p \right\}$$

On remarque qu'il est égal à $W_f^{\#} \times Y$ lorsqu'on identifie $T^*(X \times Y)$ à $T^*X \times \mathbf{C}^p \times Y$.

De plus, comme $F^{-1}(0) = f^{-1}(0) \times Y$, on a également :

$$W_0(F) = (W_f^{\#} \cap f^{-1}(0)) \times Y.$$

PROPOSITION. – *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est sans éclatement en codimension* 0 *et satisfait* (F)

(ii) F *est sans éclatement en codimension* 0.

De plus, lorsque ces propriétés sont satisfaites on a :

$$p^{-1}(W_0(f)) = W_0(f) \times \{0\}$$

Commençons par montrer : (i)$\Rightarrow$(ii). Comme f est sans éclatement en codimension 0, $W_0(f) = W_f \cap f^{-1}(0)$ est de dimension n, et, p étant finie, $W_f^{\#} \cap f^{-1}(0)$ est aussi de dimension n ; donc le produit par Y, $W_0(F)$, est de dimension $n+p$: c'est la propriété (ii).

Réciproquement, supposons (ii) satisfaite ; par conséquent $W_0(F)$ est de dimension $n + p$ et lagrangien : chacune de ses composantes est le conormal à sa projection sur $X \times Y$; comme $W_0(F)$ est un produit par Y, chacune de ses composantes est de la forme $A \times Y$ avec :

$$A \subset W_f^{\#} \cap f^{-1}(0) \subset T^*X \times \mathbf{C}^p ;$$

donc A est contenu dans $T^*X \times \{0\}$; cela donne la propriété supplémentaire indiquée dans la proposition (propriété non vérifiée dans le premier exemple), et de plus cela nous montre que p est finie, donc surjective. La dimension de $W_f^{\#} \cap f^{-1}(0)$ est n, donc son image par p, $W_0(f)$, également ; cela démontre que f est sans éclatement en codimension 0.

2.2. Preuve d'un théorème de C. Sabbah

Nous nous permettons maintenant de reprendre la preuve du théorème de C. Sabbah ([Sab 3], Théorème A.1.4, page 3) :

THÉORÈME 2. – (C. Sabbah)

Soit $f = (f_1, \dots, f_p) \ : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$ *un germe d'application analytique définissant une intersection complète ; si* f *satisfait* (LS), *alors* f *satisfait* (F).

Considérons le diagramme suivant :

$$Z \xrightarrow{i} \Lambda = X \times Y \times U \xrightarrow{\varphi} Y \times U \xrightarrow{\psi} U$$

dans lequel $Z = \{(x,y,u) \mid u = F(x,y)\}$ est le graphe de $F \ : X \times Y \to U = \mathbf{C}^p$ plongé par i dans $\Lambda = X \times Y \times U$.

φ et ψ sont les projections canoniques ; $g = \varphi \circ i$ et $F = \psi \circ \varphi \circ i$.

Z^o désigne l'ouvert des points de Z où g est lisse ; le lieu critique de g, $Crit(g) = Z - Z^o$, s'identifie à $Crit(f) \times Y$.

Notons :

$$\begin{aligned} W_f' &= T^*_{\varphi|Z}(\Lambda/Y \times U) = \overline{\{(z,\xi,0) \,;\, z \in Z^o, \xi(T_z g^{-1}(g(z))) = 0\}} \\ &= \overline{\left\{\left(z, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j df_j(x), 0\right) ; z = (x,y,u) \in Z, \lambda \in \mathbf{C}^p\right\}} \end{aligned}$$

qui s'identifie à $W_f \times Y$.

On remarque également que l'espace conormal relatif à g, W_g s'identifie à :

$$\overline{\left\{\left(z, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j df_j(x), \mu\right) ; z \in Z, \lambda \in \mathbf{C}^p, \mu \in \mathbf{C}^p\right\}}$$

soit encore à $W_f \times T^*Y$; sa fibre en $(0,y)$ est donc $W_0(f) \times \mathbf{C}^p$, et donc g est sans éclatement en codimension 0, puisque f l'est.

On définit alors la déformation de W_F sur le cône normal à $W_F \cap \{\xi = 0\}$ dans W_F de la façon suivante :

$$D = \overline{\{(z,\xi,\eta,t) \,;\, t \in \mathbf{C}^*, (z, t\xi, \eta) \in W_F\}} \text{ dans } T^*(\Lambda/U) \times \mathbf{C}\,;$$

puis le cône normal à $W_F \cap \{\xi = 0\}$ dans W_F :

$$C = D \cap \{t = 0\} \text{ dans } T^*(\Lambda/U).$$

W_f' et W_F sont irréductibles de même dimension $\dim(\Lambda) = n + 2p$; D est irréductible de dimension $n + 2p + 1$ et donc C est de dimension pure $n + 2p$, bi-homogène par rapport à ξ et η.

Toujours suivant C. Sabbah, notons (C_i) les composantes irréductibles de C, (Z_i) leurs projections dans $\Lambda = X \times Y \times U$. En un point $z \in Z^o$, les différentielles $(df_1(x), \dots, df_p(x))$

sont indépendantes et la fibre de C en ce point est la même que celle de $W_f \times \{0\}$; donc, l'unique composante C_{i_o} de C dont la projection est $Z_{i_o} = Z$ est W_f'.

Comme g est sans éclatement en codimension 0, nous pouvons appliquer la proposition de C. Sabbah ([Sab 2], [[]proposition 2.6, p. 221]) et, en particulier, les égalités obtenues en cours de démonstration : toutes les images par F des Z_i ont la même dimension ; or l'image de $Z_{i_o} = Z$ par F est U, et l'image de chacune des autres composantes Z_i est contenue dans $\{u_1 u_2 \dots u_p = 0\}$ d'après l'hypothèse (β) sur le lieu critique : c'est donc que ces composantes n'existent pas et que $C = C_{i_o} = W_f'$.

En conséquence, si $(z, 0, \eta)$ est un point de $W_F = W_f^{\#} \times Y$, alors $(z, 0, \eta, t) \in D$ pour $t \in \mathbf{C}^*$, d'où $(z, 0, \eta) \in C = W_f'$ et $\eta = 0$. Cela montre la finitude de p : $p^{-1}(x, 0) = (x, 0, 0)$.

Remarque. – Nous aurions pu également utiliser le corollaire 4.3 de C. Sabbah qui suit la proposition déjà citée puisque la seule « image conormale » de g est $g(Z_{i_o}) = Y \times U$ et que $\psi_{|Y \times U}$ est sans éclatement en codimension 0 : il en est donc de même pour $F = \psi \circ g$. On applique alors la proposition 2.

2.3. Condition (LS) et sous-familles

Les conditions (α) et (β) de (LS) considérées de manière séparées peuvent paraître relativement faibles, et ne "passent" pas séparément aux sous-familles comme nous l'avons vu ; en revanche l'union des deux fait la force de (LS) !

PROPOSITION 3. – *Soit $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ vérifiant la condition (LS) ; toute sous-famille $f_J = (f_{j_1}, \dots, f_{j_k})$ vérifie également (LS).*

Il nous suffit, grâce à une récurrence, de montrer que la sous-famille $g = (f_1, \dots, f_{p-1})$ satisfait à la condition (LS). Par le théorème de C. Sabbah et la proposition 1, on sait déjà que g possède la condition de lieu critique (β).

Il nous reste à voir que g est sans éclatement en codimension 0. Imaginons le contraire, et supposons l'existence d'une composante irréductible L de $W_0(g)$ de dimension au moins égale à $n+1$. Notons $K = \pi(L)$ sa projection dans X, évidemment non contenue dans $f_p^{-1}(0)$; pour tout $v \in \mathbf{C}$ assez petit, $W_f \mid K \cap f_p^{-1}(v)$ est de dimension au plus n, et l'on en déduit que L est de dimension exactement $n+1$. En fait, si on regarde les fibres en un point générique x de K on a :

$$(W_f)_x \supset (W_g)_x + \mathbf{C}\, df_p(x) \text{ et } \dim((W_f)_x) = \dim((W_g)_x) = n + 1 - \dim(K)$$

donc : $df_p(x) \in (W_g)_x$ avec $df_p(x)$ non nul puisque $f_p(x) = v$ n'est pas nul. On peut donc trouver une suite de points $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de X n'appartenant pas à $Crit(f)$, tendant vers x, et des suites de scalaires $(\lambda_{j,k})_{k \in \mathbf{N}}$ (pour $j = 1, \dots, p-1$) telles que :

$$df_p(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{j,k} df_j(x_k)$$

or nous savons que la condition de finitude (F) est satisfaite, et donc que p est propre ; alors, quitte à la remplacer par une suite extraite, nous pouvons supposer que la suite de $W_f^{\#}$:

$$\left(x_k, df_p(x_k) - \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{j,k} df_j(x_k), -\lambda_{1,k} f_1(x_k), \ldots, -\lambda_{p-1,k} f_{p-1}(x_k), f_p(x_k)\right)$$

tend vers une limite $(x, 0, \eta) \in p^{-1}(x, 0)$ avec η non nul puisque $f_p(x) = v$ est non nul ; or, la finitude de p implique : $p^{-1}(x, 0) = (x, 0, 0)$; c'est la contradiction cherchée !

Remarque. – Nous venons en fait de démontrer que si la condition de finitude (F) est vérifiée, on a l'inclusion :

$$\{x \mid df_p(x) \in (W_g)_x\} \subset f_p^{-1}(0)$$

ce que nous pouvons énoncer en disant que f_p est transverse à $g = (f_1, \ldots, f_{p-1})$ en dehors de $f_p^{-1}(0)$.

3. Les conditions de F. Loeser et C. Sabbah sont vérifiées sous l'hypothèse de transversalité

LEMME 1. – *La condition de transversalité* (T) *implique la condition de lieu critique* (β) : $Crit(f) \subset \cup_{j=1}^{p} f_j^{-1}(0)$.

Soit $x \in Crit(f)$; il existe deux sous-ensembles disjoints I et J de $\{1, \ldots, p\}$ tels que pour i dans I, $df_i(x)$ est dans le **C**-espace vectoriel engendré par les $(df_j(x))_{j \in J}$.

L'hypothèse de transversalité entraîne alors la nullité des $df_i(x)$, pour i dans I, et par suite celle des $f_i(x)$, chaque f_i étant entier sur l'idéal de ses dérivées (au voisinage de 0). Ainsi, $Crit(f) \subset \cup_{j=1}^{p} df_j^{-1}(0) \subset \cup_{j=1}^{p} f_j^{-1}(0)$.

Établissons maintenant la proposition suivante qui fournit (T) $\Rightarrow$ (α) :

PROPOSITION 4. – *Soient* $g : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^l, 0$ *et* $h : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^m, 0$ *définissant deux intersections complètes sans éclatement en codimension* 0, *« transverses », c'est-à-dire telles que* $W_g \cap W_h \subset T_X^* X$. *Alors* $(g, h) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^{l+m}, 0$ *définit une intersection complète sans éclatement en codimension* 0, *et* $W_{(g,h)} = W_g + W_h$.

Nous laissons tout d'abord au lecteur la preuve des deux lemmes suivants : le premier résultat est élémentaire et le second « classique »; voir par exemple M. Kashiwara ([K], proposition 4.9, p. 47).

LEMME 2. – *Soient A et B deux sous-ensembles analytiques de* $X \times \mathbf{C}^m$, *coniques (dans les fibres de la projection sur* X*), irréductibles, respectivement de dimension* a *et* b. *Si A et B sont « transverses » au sens :* $A \cap B \subset X \times \{0\}$, *alors le morphisme* $\sigma : A \times_X B \to X \times \mathbf{C}^m$, *défini par :* $\sigma(x, a, b) = (x, a + b)$, *est propre à fibres finies.*

Son image, notée A+B, est un sous-ensemble analytique conique de $X \times \mathbf{C}^m$, *de dimension en tout point au moins égale à* $a + b - n$, *où* $n = dim(X)$.

Pour un sous-ensemble irréductible Y de X, $T^*_Y X$ désigne son espace conormal, égal à l'adhérence dans T^*X de l'ensemble des covecteurs nuls sur l'espace tangent à Y en un point lisse.

LEMME 3. – *Soient Y et Z deux sous-ensembles analytiques irréductibles de X. Si Y et Z sont « transverses » au sens :*

$$T^*_Y X \cap T^*_Z X \subset T^*_X X,$$

alors $T^*_Y X + T^*_Z X$ *est lagrangien.*

Démontrons maintenant la proposition 4 :

1) $W_g + W_h$ est fermé, conique, de dimension au moins égale à $n + l + m$ en tout point d'après le lemme 2.

Sur l'ouvert dense $U := X \setminus Crit(g, h)$ (en fait, ici, $Crit(g, h) = Crit(g) \cup Crit(h)$), le conormal relatif au morphisme (g, h) est le fibré vectoriel localement trivial de rang $(l + m)$ engendré par $(dg_1, \ldots, dg_l, dh_1, \ldots, dh_m)$, ce qui donne l'égalité :

$$W_{(g,h)|U} = (W_g + W_h)_{|U},$$

et par suite l'inclusion :

$$W_{(g,h)} \subset W_g + W_h.$$

2) Considérons le morphisme $\varphi = (g, h) \circ \pi$:

$$\begin{aligned} \varphi : W_g + W_h &\to \mathbf{C}^{l+m} \\ (x, \xi) &\mapsto (g(x), h(x)), \end{aligned}$$

de fibre en 0 :

$$\varphi^{-1}(0) = W_0(g) + W_0(h).$$

Par hypothèse, $W_0(g)$ et $W_0(h)$ sont lagrangiens; donc d'après le lemme 3, $\varphi^{-1}(0)$ est lui-même lagrangien.

La dimension des fibres de la restriction de φ à $W_{(g,h)}$ est donc d'une part minorée par n (argument de semi-continuité de la dimension de la fibre), et d'autre part majorée par n, puisque $W_0(g, h)$ est inclus dans $\varphi^{-1}(0)$.

Ainsi (g, h) est sans éclatement en codimension 0.

3) Soit maintenant C une composante irréductible de $W_g + W_h$ (de dimension supérieure ou égale à $n + l + m$ d'après 1).

Alors $\varphi_{|C} : C \to \mathbf{C}^{l+m}$ est localement surjective ([F], corollaire, p. 138-139 dimension formula]). Le morphisme (g, h) étant sans éclatement en codimension 0, son lieu discriminant Δ est un fermé analytique strict de $\mathbf{C}^{l+m}$ (en fait une hypersurface ou le vide : [Loe], proposition 1.3.2, p. 13]).

Il est clair que

$$W_{(g,h)} \cap \varphi^{-1}(\mathbf{C}^{l+m} - \Delta) = (W_g + W_h) \cap \varphi^{-1}(\mathbf{C}^{l+m} - \Delta),$$

et donc

$$(C - \varphi^{-1}(\Delta)) \subset (W_{(g,h)} - \varphi^{-1}(\Delta)).$$

Donc, par passage à l'adhérence dans $W_g + W_h$, C est contenue dans $W_{(g,h)}$. Finalement, C est égale à $W_{(g,h)}$. Ainsi $W_g + W_h$ est irréductible, égal à $W_{(g,h)}$.

4) Il nous reste à voir que (g, h) définit une intersection complète. Si ce n'était pas le cas, la fibre $(g, h)^{-1}(0)$ serait de dimension strictement supérieure à $n - (l + m)$. Or, en considérant la restriction π' de π à $W_0(g, h)$, on a :

$$\dim\ W_0(g,h) \geq \dim\ (g,h)^{-1}(0) + \inf\{\dim_{(x,\xi)}\ \pi'^{-1}(x) \,/\, (x,\xi) \in W_0(g,h)\}.$$

Ce résultat découle du corollaire page 141 de [F], appliqué au morphisme induit par π sur l'espace projectif $\mathbf{P}(W_0(g,h)^*)$, ce qui est licite puisque $W_0(g,h)$ est conique.

La fibre générique de π' étant de dimension au moins $l + m$, cette inégalité donne alors : $\dim\ W_0(g,h) > n$.

On aboutit ainsi à une contradiction, (g, h) étant sans éclatement en codimension 0.

4. Cas particulier où la fibre réduite du morphisme est lisse

4.1. Conséquence de la condition de non éclatement en codimension zéro

Nous supposons dans tout ce paragraphe que la fibre réduite de f en 0, $V := (f^{-1}(0))^{\mathrm{red}}$, est lisse ; nous allons voir les conséquences qu'on peut alors déduire de la seule hypothèse (α) (de non-éclatement en codimension 0) puis de l'hypothèse (LS).

THÉORÈME 3. – *Soit* $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$. *Si l'ensemble réduit des zéros de* f, $V := (f^{-1}(0))^{\mathrm{red}}$, *est lisse de codimension* p, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est sans éclatement en codimension* 0,

(ii) $W_0(f) = T_V^* X$,

(iii) f *est* $\mathcal{R}$*-triviale le long de* V.

Rappelons que $f : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$ est dite $\mathcal{R}$-triviale le long de V s'il existe un automorphisme analytique

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^n, 0$$

avec : $\varphi(V) = \{0\} \times \mathbf{C}^{n-p}$, et $g : \mathbf{C}^p, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$, tels que :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_p(x_1, \ldots, x_n))$$

Plaçons-nous dans un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ adapté à V ; autrement dit, V est défini par l'annulation des p premières coordonnées. Notons $y = (x_1, \ldots, x_p)$, $z = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$, et $\Delta_p = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}$.

1) Commençons par montrer l'équivalence entre (ii) et (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Avec les notations précédentes, il est clair que g définit l'origine de $\mathbf{C}^p$, et donc $W_0(g)$ est égal à $T^*_{\{0\}}\mathbf{C}^p$.

On vérifie alors que, si pr_1 est la projection de $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^{n-p}$ sur le premier facteur, $W_0(g \circ pr_1)$ est le conormal à $\{0\} \times \mathbf{C}^{n-p}$ au voisinage de l'origine ; par conséquent, comme $f = g \circ pr_1 \circ \varphi$: $W_0(f) = T^*_V X$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Remarquons tout d'abord que, $f_1(y,0), \ldots, f_p(y,0)$ définissant l'origine de $\mathbf{C}^p$, la classe de leur jacobien $\Delta_p(y,0)$ engendre le socle de l'algèbre artinienne $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^p,0}/(f_1(y,0), \ldots, f_p(y,0))$ [S.S].

En particulier, Δ_p est non nul dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$.

Considérons maintenant $\mathcal{A}$ la transposée de la matrice jacobienne de f dont les colonnes sont formées par les composantes des formes $df_1, \ldots, df_p$ dans la base $dx_1, \ldots, dx_n$. Notons $\mathcal{B}$ la sous-matrice formée des p premières lignes de $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ la sous-matrice formée des $n-p$ dernières lignes, enfin $\mathcal{B}'$ la transposée de la matrice des cofacteurs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{C}.\mathcal{B}'$.

$$\text{Chaque colonne de la matrice } \mathcal{A}.\mathcal{B}' \text{ est : } \tau_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_p \\ \vdots \\ 0 \\ \xi^j_{p+1} \\ \vdots \\ \xi^j_n \end{pmatrix}$$

où ξ^j_k, pour $k = p+1, \ldots, n$ sont les coefficients de la j-ième colonne de $\mathcal{D}$. Ce covecteur τ_j appartient à $W(f)$; donc, par l'hypothèse (ii), pour tout chemin analytique γ tracé dans X tel que $\gamma(0)$ appartienne à V, $\frac{\tau_j(\gamma(t))}{||\tau_j(\gamma(t))||}$ tend vers

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1 à la j-ième ligne) quand t tend vers 0 ; donc pour tout couple (j,k), ξ^j_k tend plus vite vers 0 que Δ_p le long de γ et on peut écrire : $\mathcal{D} = \Delta_p \mathcal{E}$ avec $\mathcal{E}$ matrice holomorphe de terme général : $\lambda_{k,j}$ où $\xi^j_k = \Delta_p \lambda_{k,j}$.

Considérons alors le système de Pfaff non singulier :

$$\begin{cases} \omega_1 = dx_1 + \lambda_{1,p+1}\, dx_{p+1} + \cdots + \lambda_{1,n}\, dx_n \\ \vdots \\ \omega_p = dx_p + \lambda_{p,p+1}\, dx_{p+1} + \cdots + \lambda_{p,n}\, dx_n \end{cases},$$

Si nous introduisons $\mathcal{F}$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les composantes des formes $\omega_1, \ldots, \omega_p$ dans la base canonique, nous avons : $\mathcal{A}.\mathcal{B}' = \Delta_p \mathcal{F}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{F}.\mathcal{B}$. Il en résulte qu'en dehors du lieu des zéros de Δ_p, les systèmes $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ et $(df_1, \ldots, df_p)$ engendrent les mêmes champs de $n-p$ plans; en particulier le système est intégrable, et le théorème de Frobenius assure l'existence d'une submersion $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \;:\; \mathbf{C}^n, 0 \;\to\; \mathbf{C}^p, 0$, et d'une matrice inversible (g_{ij}) à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$, telles que

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{p} g_{ij}\, d\varphi_i.$$

$df_j \wedge d\varphi_1 \wedge \cdots d\varphi_p$ étant nul, f_j s'écrit comme fonction des seules variables $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, ce qui est le résultat cherché.

2) Il est évident que (ii) implique (i).

3) Montrons enfin que (i) implique (iii).

Considérons l'écriture $\Delta_p = D\,E$, où D est le produit des facteurs irréductibles de Δ_p nuls sur V.

$D \neq 1$ car Δ_p s'annule sur V. En effet, $\Delta_p(0, z_0) \neq 0$ équivaut à : $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}^p,0}/(f_1(y, z_0), \ldots, f_p(y, z_0)) = 1$. Or, la dimension de cet espace vectoriel reste constante quand z varie au voisinage de 0, car $f^{-1}(0)$ est une intersection complète, donc $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}/(f_1, \ldots, f_p)$ est un $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{n-p},0}$-module plat (*via* la projection sur $\{0\} \times \mathbf{C}^{n-p}$).

On conclut en se rappelant que Δ_p est nul à l'origine (puisque 0 est un point critique de f).

Montrons à présent que E est une unité de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$.

A z fixé, la classe de $\Delta_p(y, z)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^p,0}/(f_1(y, z), \ldots, f_p(y, z))$ engendre le socle de cette algèbre, donc pour tout $(0, z)$ dans $V \setminus E^{-1}(0)$, et pour tout $i = 1 \cdots p$, $x_i\, D$ est nul dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^p,0}/(f_1(y, z), \ldots, f_p(y, z))$. $(f_1(y, 0), \ldots, f_p(y, 0))$ étant une suite régulière, on en déduit que $x_i\, D$ appartient à l'idéal $(f_1, \ldots, f_p)$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$.

D'où il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $D(y, 0) = \lambda\, \Delta_p(y, 0)$ moddulo $(f_1(y, 0), \ldots, f_p(y, 0))$.

En remplaçant Δ_p par sa décomposition $\Delta_p(y, 0) = D(y, 0)\, E(y, 0)$, on conclut que E est inversible, puisque $D(y, 0)$ n'appartient pas à l'idéal $(f_1(y, 0), \ldots, f_p(y, 0))$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^p,0}$. Autrement dit, tout facteur irréductible de Δ_p s'annule sur V.

Par hypothèse (i), $W_0(f)$ est lagrangien, et s'écrit donc $W_0(f) = \bigcup_\alpha T^*_{Y_\alpha} X$ où les Y_α sont irréductibles, et l'un d'eux est égal à V.

Par suite, au dessus de l'ouvert U de V égal à V privé des strates Y_α strictement incluses dans V, $W_0(f)$ coïncide avec le conormal à V.

La première partie de la preuve de (ii)$\Rightarrow$(iii) permet alors d'affirmer que $\Delta_{j,k}$ tend plus vite vers 0 que Δ_p le long de tout chemin dont l'origine est dans U, avec en conséquence $\Delta_{j,k} = \lambda_{j,k}\,\Delta_p$, où $\lambda_{j,k}$ est holomorphe sur U. En fait, le lieu des pôles de $\lambda_{j,k}$, s'il est non vide, contient V, ce qui contredit l'holomorphie de $\lambda_{j,k}$ le long de U. Donc $\lambda_{j,k}$ est holomorphe au voisinage de l'origine et s'annule sur V. On conclut : $W_0(f) = T^*_V X$.

4.2. Cas d'un morphisme fini

THÉORÈME 4. – *Soit* $g = (g_1, \ldots, g_n) \;:\; \mathbf{C}^n, 0 \;\rightarrow\; \mathbf{C}^n, 0$ *un germe de morphisme analytique fini. On suppose de plus que* $Crit(g) \subset \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}(0)$. *Alors il existe un automorphisme* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ *de* $\mathbf{C}^n, 0$ *et des entiers* $l_1, \ldots, l_n$ *tels que*

$$g_1 = \psi_1^{l_1}, \ldots, g_n = \psi_n^{l_n}.$$

Si 0 n'est pas point critique de g, c'est clair.

Notons $\Delta = \Delta\,(g_1,\,\ldots,\,g_n)$ le déterminant jacobien de g, et supposons donc qu'il s'annule en 0.

1) si δ est un diviseur irréductible de Δ, alors, d'après les hypothèses, il divise un unique g_i (prenons g_1 pour fixer les idées). La factorisation $g_1 = \delta^m\, u_1$ où u_1 n'est pas divisible par δ, entraîne l'égalité $\Delta = \delta^{m-1}\,\Delta'$, où δ ne divise pas Δ'. En effet,

$$\Delta\,(g_1,\,\ldots,\,g_n) = \delta^{m-1}\,(\delta\Delta\,(u_1,\,g_2,\,\ldots,\,g_n) + mh_1\Delta(\delta,\,g_2,\,\ldots,\,g_n)).$$

$(\delta,\,g_2,\,\ldots,\,g_n)$ étant encore une suite régulière, la classe de $\Delta(\delta,\,g_2,\,\ldots,\,g_n)$ engendre le socle de l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}/(\delta,\,g_2,\,\ldots,\,g_n)$, et par suite, ce jacobien n'est pas multiple de δ.

2) Soit la décomposition $\Delta = \Delta_1 \cdots \Delta_n$, où Δ_i divise g_i; on pose : $g_i = \Delta_i h_i$. Montrons dans un premier temps que $h_1,\,\ldots,\,h_n$ engendrent l'idéal maximal $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$.

Par considération du socle de l'algèbre artinienne $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}/(g_1,\,\ldots,\,g_n)$, il vient

$$\forall j = 1 \cdots n, \quad x_j\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} g_k, \quad a_{j,k} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0},$$

ce qui s'écrit encore :

$$\Delta_1\,(x_j\Delta_2 \cdots \Delta_n - a_{j,1}h_1) = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} g_k.$$

$(\Delta_1,\,g_2,\,\ldots,\,g_n)$ est une suite régulière, et cette relation est triviale, d'où :

$$\forall j = 1 \cdots n, \quad x_j\Delta_2 \cdots \Delta_n = a_{j,1}\,h_1 + \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} g_k, \quad b_{j,k} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}.$$

En procédant ainsi par récurrence, on obtient le résultat annoncé.

3) Enfin, établissons l'existence d'un automorphisme ψ, solution du problème.

– Si Δ_1 n'est pas inversible, sa décompositioon en facteurs irréductibles $\Delta_1 = \rho_1^{m_1} \ldots \rho_k^{m_k}$ donne, d'après 1) :

$$g_1 = \rho_1^{m_1+1} \cdots \rho_k^{m_k+1}\,v_1.$$

En conséquence, $h_1 = \rho_1 \cdots \rho_k v_1$.

Comme h_1 fait partie d'un système minimal de générateurs de l'idéal maximal d'après l'étude précédente, on a $h_1 \notin \mathcal{M}^2$; donc $h_1 = \rho_1 v_1$, et v_1 est une unité.

Par suite, $g_1 = \rho_1^{m_1+1} v_1 = (h_1 u_1)^{m_1+1}$, où u_1 est une unité, ce qui conduit à poser $\psi_1 := h_1 u_1$.

– Si Δ_1 est inversible, il suffit de choisir $\psi_1 := g_1$.

En procédant ainsi pour tous les Δ_i, on construit $\psi_1, \ldots, \psi_n$ qui engendrent encore l'idéal maximal, et forment donc un automorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$.

Remarque. – Il semble possible de donner une preuve plus « transcendante » du théorème précédent en s'inspirant d'un résultat de A. Hirschowitz ([Hir]) qui classifie, à l'aide des variétés de Demazure, les germes d'hypersurfaces à l'origine de $\mathbf{C}^n$, à singularité isolée, admettant un discriminant à croisements normaux.

En réalité, le théorème 4 peut aussi s'obtenir comme corollaire de (LS) $\Rightarrow$ (T) qui sera prouvé au dernier paragraphe.

4.3. Conséquence des conditions (LS)

COROLLAIRE. – *Soit $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète, vérifiant les conditions* (LS). *Si l'ensemble (réduit) des zéros de f est lisse, il existe un automorphisme $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ de $\mathbf{C}^n, 0$ et des entiers $l_1, \ldots, l_p$ tels que*

$$f_1 = \psi_1^{l_1}, \;\ldots,\; f_p = \psi_p^{l_p}.$$

D'après le théorème 3, f est $\mathcal{R}$-triviale le long de l'ensemble de ses zéros, ce qui se traduit par l'existence d'un système de coordonnées $(X_1, \ldots, X_n)$ et d'une application analytique $g : \mathbf{C}^p, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$, tels que

$$\begin{cases} f_1 &= g_1(X_1, \ldots, X_p) \\ \vdots & \\ f_p &= g_p(X_1, \ldots, X_p). \end{cases}$$

$(g_1, \ldots, g_p)$ vérifiant bien les hypothèses du théorème 4, il existe des entiers $l_1, \ldots, l_p$ et un automorphisme ψ de $\mathbf{C}^p, 0$ pour lesquels

$$\begin{cases} g_1 &= \psi_1^{l_1} \\ \vdots & \\ g_p &= \psi_p^{l_p} \end{cases}$$

et alors

$$\begin{cases} f_1 &= \psi_1^{l_1}(X_1, \ldots, X_p) \\ \vdots & \\ f_p &= \psi_p^{l_p}(X_1, \ldots, X_p). \end{cases}$$

$\psi_1, \ldots, \psi_p$ faisant partie d'un système de coordonnées de $\mathbf{C}^n$, ces dernières égalités montrent le corollaire (et en particulier, les conditions de transversalité (T) sont réalisées).

5. Preuve de la transversalité sous les hypothèses de F. Loeser et C. Sabbah

5.1. Lemmes préliminaires

Soit $f = (f_1, \ldots, f_p) \; : \mathbf{C}^n, 0 \;\to\; \mathbf{C}^p, 0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète. Nous considérons un représentant f sur un voisinage X de l'origine.

Donnons d'abord une définition : si I et J sont deux sous-ensembles disjoints de $\{1, \ldots, p\}$, nous dirons que les applications correspondantes f_I et f_J sont transverses en $x \in X$ si les conormaux relatifs W_{f_I} et W_{f_J} ne se rencontrent que suivant la section nulle de T^*X au voisinage de x.

LEMME 4. – *Si f_I et f_J sont transverses en tout point de X privé de l'origine, elles sont transverses à l'origine.*

Notons q ($q \geq 2$) le nombre d'éléments dans la réunion (disjointe) de I et J ; $W_{f_I} \cap W_{f_J}$ s'identifie à $(W_{f_I} \times W_{f_J}) \cap \Delta$ dans $(T^*X)^2$, où Δ est la diagonale définie par $2n$ équations. En vertu d'un théorème de connexité d'A. Grothendieck ([G], exp. XIII, théorème 2.1, p. 177) : $W_{f_I} \cap W_{f_J}$, défini par $2n$ équations dans $W_{f_I} \times W_{f_J}$ irréductible de dimension $2n + q$, est connexe en dimension $q - 1$. Il ne peut donc être déconnecté par un point. Or, par hypothèse, $W_{f_I} \cap W_{f_J}$ est la réunion de la section nulle, $T^*_X X$, et de composante(s) éventuelle(s) contenue(s) dans le conormal à l'origine ; ces composantes n'existent donc pas et le lemme est prouvé.

LEMME 5. – *Soit $f = (f_1, \ldots, f_p) \; : \mathbf{C}^n, 0 \;\to\; \mathbf{C}^p, 0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète, vérifiant les conditions* (LF). *Soit Y une hypersurface lisse définie par $y = 0$, les applications y et f étant transverses en 0 ; alors :*

1) *La restriction $f_{|Y} : Y \to \mathbf{C}^p$ de f à Y vérifie les conditions* (LF) *au voisinage de 0.*

2) $W_0(f, y) = W_0(f) + W_0(y) = W_0(f_{|Y}) + W_0(y)$

3) *Si $f_{|Y}$ vérifie* (T), *f vérifie* (T).

1) Quitte à changer de coordonnées, on suppose Y définie par l'équation $y = x_n = 0$, et on identifie T^*Y et le sous-espace de T^*X défini par $x_n = \xi_n = 0$; c'est grâce à cette identification qu'il faut comprendre l'énoncé du second résultat du lemme. On note $pr. : T^*X_{|Y} \to T^*Y$ la projection parallèlement à l'axe des ξ_n. Par l'hypothèse de transversalité entre f et y la restriction de $pr.$ à $W_f \cap T^*X_{|Y}$ est finie, et son image contient $W_{f_{|Y}}$. Il en résulte, en prenant l'intersection avec $f^{-1}(0)$, que $W_0(f_{|Y})$ est lagrangien, et que $f_{|Y}$ est sans éclatement en codimension 0.

Vérifions maintenant la condition de lieu critique ; soit $\gamma : \mathbf{C}, 0 \to Crit(f_{|Y}), 0$ un « petit » chemin tracé dans le lieu critique de la restriction de f ; il existe une solution non triviale à l'équation : $\sum_{j=1}^{j=p} \lambda_j(t) d(f_{j|Y})(\gamma(t)) = 0$; si $\eta(t) = \sum_{j=1}^{j=p} \lambda_j(t) \frac{df_j}{dy}(\gamma(t))$ était non nul, cela contredirait la transversalité de f et y ; donc $\gamma(t)$ appartient à $Crit(f)$ et, au voisinage de l'origine, $Crit(f_{|Y}) \subset Crit(f) \cap Y \subset \cup f_j^{-1}(0)$. Ainsi $f_{|Y}$ satisfait (LF).

2) Montrons la deuxième assertion par récurrence sur p ; plaçons nous en un point x de Y où $f_p(x)$ est non nul ; d'après la remarque donnée à la fin du second paragraphe, nous savons que f_p et $g = (f_1, \ldots, f_{p-1})$ sont transverses en x. Par la proposition 3, g satisfait

(LS), et par hypothèse de récurrence :

$$(W_g)_x + (W_y)_x = (W_{g_{|Y}})_x + (W_y)_x$$

D'où, par transversalité :

$$\begin{aligned}(W_f)_x + (W_y)_x &= (W_g)_x + (W_{f_p})_x + (W_y)_x\\ &= (W_{g|Y})_x + (W_{f_p|Y})_x + (W_y)_x = (W_{f|Y})_x + (W_y)_x\end{aligned}$$

En échangeant le rôle des fonctions, nous voyons que la condition

$$(W_f)_x + (W_y)_x = (W_{f|Y})_x + (W_y)_x$$

est satisfaite en tout point x de $Y - f^{-1}(0)$. Comme f et y sont sans éclatement en codimension 0 et transverses, par la proposition 4 on a : $W_{(f,y)} = W_f + W_y$ et (f, y) est sans éclatement en codimension 0. Donc $(f, y) \; : W_{(f,y)} \to \mathbf{C}^{p+1}, 0$ est universellement ouvert ([Me], lemme 5.3.3, p. 97); la restriction $f_{|Y} \; : W_{(f,y)} \cap T^*X_{|Y} \to \mathbf{C}^p, 0$ est ouverte, et sa fibre au dessus de 0, $W_0(f, y)$, est dans l'adhérence des fibres voisines; or, par la condition de lieu critique vue avant, la fibre de $W_{(f,y)}$ en un point de Y où f n'est pas nulle coincide avec la fibre de $W_{f_{|Y}} + W_y$. Nous obtenons donc :

$$W_0(f, y) = W_0(f) + W_0(Y) = W_0(f_{|Y}) + W_0(y)$$

3) Il nous reste à prouver la dernière assertion. Soient I et J deux parties disjointes de l'ensemble d'indices; par hypothèse, l'intersection de $W_{f_{I|Y}}$ et $W_{f_{J|Y}}$ est réduite à la section nulle du fibré cotangeant T^*Y ; en faisant jouer à f_I et f_J le rôle de f dans l'égalité ci-dessus nous avons :

$$W_0(f_I, y) = W_0(f_{I|Y}) + W_0(y)$$

$$W_0(f_J, y) = W_0(f_{J|Y}) + W_0(y)$$

Donc l'intersection de $W_0(f_I, y)$ et $W_0(f_J, y)$ est contenue dans $W_0(y) = T^*Y$ et comme la restriction de $pr.$ à $W_0(f_I)$ et à $W_0(f_J)$ est finie, ces deux espaces ne se coupent que suivant la section nulle; ainsi f (et (f, y)) satisfait (T).

5.2. Preuve de (LS) implique (T) (par récurrence sur n et p)

1) f *vérifie* (T) *en dehors de* $f^{-1}(0)$

Nous avons vu (remarque à la fin du second paragraphe) qu'en un point x où f_p n'est pas nulle, f_p et $g = (f_1, \ldots, f_{p-1})$ sont transverses. D'après la proposition 3, g vérifie (LS), donc aussi (T) par hypothèse de récurrence sur p; ainsi, en tout point x de $X - f_p^{-1}(0)$,

$$(W_g)_x = (W_{f_1})_x \oplus \cdots \oplus (W_{f_{p-1}})_x \quad \text{et} \quad (W_f)_x = (W_g)_x \oplus (W_{f_p})_x$$

cela montre que f vérifie (T) en dehors de $f_p^{-1}(0)$.

En échangeant le rôle des fonctions, on en déduit que f vérifie (T) en dehors de $f^{-1}(0)$.

2) *f vérifie* (T) *en dehors de* 0

Comme f est sans éclatement en codimension 0, quitte à diminuer le voisinage X de l'origine sur lequel nous travaillons, nous pouvons supposer que la fibre de $W_0(f)$ en tout point x_o non nul de X n'est pas l'espace conormal à x_o tout entier. Nous pouvons donc trouver une hypersurface lisse Y passant par x_o et transverse à W_f en ce point. D'après le lemme 5, le germe en x_o de la restriction de f à Y vérifie (LS), donc (T) par hypothèse de récurrence sur la dimension ($\dim(Y) = n - 1$). Par la troisième partie du lemme 5, nous pouvons affirmer que f satisfait (T) en x_o.

3) *f vérifie* (T)

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 4 pour conclure.

5.3. Conséquences de la transversalité

En réalité, la transversalité a des conséquences topologiques très fortes...... dont nous n'avons pas encore fait le tour ! Par exemple :

COROLLAIRE 2. – *Soit $f = (f_1, f_2)\ : \mathbf{C}^n, 0 \ \rightarrow\ \mathbf{C}^2, 0$ un germe d'intersection complète à singularité isolée, vérifiant la condition :*

$$Crit(f) \subset f_1^{-1}(0) \cup f_2^{-1}(0)$$

Alors, quitte à réindexer, f_1 est lisse, et $f_2^{-1}(0)$ est une déformation à nombre de Milnor constant, le long de son lieu singulier lisse transverse à $f_1^{-1}(0)$, de l'intersection $f^{-1}(0)$.

L'hypothèse de singularité isolée entraîne que f est sans éclatement en codimension 0; on peut donc appliquer le théorème et $W_{f_1} \cap W_{f_2}$ est réduit à la section nulle. Mais les fonctions analytiques lisses sont caractérisées (parmi les fonctions réduites) par le fait que la fibre à l'origine de leur conormal relatif est de dimension égale à 1.

Si l'on suppose que ni f_1 ni f_2 ne sont lisses, on aboutit a $\dim((W_{f_1})_0 \cap (W_{f_2})_0) \geq 1$, ce qui contredit la transversalité.

Donc f_1, par exemple, est lisse.

Changeons de coordonnées, et prenons $f_1 = x_1$; par la condition de lieu critique, on voit que f_2 s'annule sur le lieu des zéros C des dérivées partielles $\frac{df_2}{dx_2}, \cdots, \frac{df_2}{dx_n}$; comme la section de $f_2^{-1}(0)$ par $x_1 = 0$ est à singularité isolée (par hypothèse), on peut appliquer un théorème de F. Lazzeri ([Laz], Remarque, p. 275) et conclure que C^{red} est lisse au-dessus de l'axe des x_1 et que $f_2^{-1}(0)$ est une déformation à nombre de Milnor constant de sa section par $x_1 = 0$. Bien sûr on adapte sans difficulté au cas $p = n - 1$.

Remarque. – Pour pouvoir de nouveau généraliser au cas $2 < p < n-1$ nous avons besoin d'une hypothèse plus forte sur le lieu critique; par exemple : soit $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbf{C}^n, 0 \rightarrow C^p, 0$ définissant une intersection complète à singularité isolée, et vérifiant : $Crit(f) \subset f_p^{-1}(0)$; alors, si $g = (f_1, \ldots, f_{p-1})$, on peut montrer que $g^{-1}(0)$ est lisse et que $f_p^{-1}(0)$ est une déformation à nombre de Milnor constant de $f^{-1}(0)$.

En guise de conclusion

Pour pouvoir poursuivre la description géométrique des morphismes vérifiant les conditions de transversalité, il me parait indispensable de décrire l'espace $W_0(f_1)$ pour une seule fonction f_1; or, si nous savons que cet espace contient les espaces conormaux à $f_1^{-1}(0)$ et à son lieu singulier, nous ignorons encore ce qui se passe pour les strates plus « profondes » (mis à part le cas où ce lieu singulier est de dimension 0 ou 1)...

BIBLIOGRAPHIE

[BBMM] H. Biosca, J. Briançon, Ph. Maisonobe et H. Maynadier, *Modules différentiels et espaces conormaux associés à un morphisme.* Prépublication n° 451, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice 1996.

[F] G. Fischer, *Complex Anaytic Geometry*, LNM n° 538, Springer 1976.

[G] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.* SGA 2. NorthHolland 1968.

[H.M.S.] J. P. Henry, M. Merle et C. Sabbah, *Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe. Annales Scientifiques* (*E.N.S.*, 4^e^ série, t. 17, 1984, p. 227-268).

[Hir] A. Hirschowitz, *Sur les singularités de Demazure* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, 286, série I, 1978, p. 95-97).

[K] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems* (*Invent. Math.*, t. 38, 1976, p. 33-53).

[K.K.] M. Kashiwara et T. Kawai, *On Holonomic Systems for* $\prod_{l=1}^{N}(f_l + \sqrt{-1}0)^{\lambda_l}$ (*Publ. RIMS*, t. 15, 1979, p. 551-575).

[Laz] F. Lazzeri, *A theorem on the monodromy of isolated singularities,* (*Astérisque*, 7 et 8., SMF, 1973, p. 269-275).

[Loe] F. Loeser, *Fonctions zetas locales d'Igusa à plusieurs variables, intégration dans les fibres et discriminants.* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 1989, p. 435-471).

[Me] M. Merle, *On some points of local analytic geometry. D-modules cohérents et holonomes.* Cours du CIMPA. Travaux en cours n 45, Ed. Hermann, 1993.

[Sab 1] C. Sabbah, *Proximité évanescente I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-module (Compositio Math.,* t. 62, 1987, p. 283-328).

[Sab 2] C. Sabbah, *Proximité évanescente II. Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques.* (*Compositio Math.,* t. 64, 1987, p. 213-241).

[Sab 3] C. Sabbah, *Appendice à Proximité évanescente II.* Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique Palaiseau 1988.

[S.S] G. Scheja et U. Storch, *Ber Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 278/279, 1975, p. 174-190).

(Manuscrit reçu le 6 janvier 1997.)

J. Briançon
Laboratoire J. A. Dieudonné
Université de Nice
Parc Valrose, 06108, Nice Cedex 2, France.
E-mail: Briancon@math.unice.fr