Annales scientifiques de l'É.N.S.

Joseph Tapia

K-théorie algébrique négative et K-théorie topologique de l'algèbre de Fréchet des opérateurs régularisants

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 30, nº 2 (1997), p. 241-277

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1997_4_30_2_241_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 30, 1997, p. 241 à 277.

K-THÉORIE ALGÉBRIQUE NÉGATIVE ET K-THÉORIE TOPOLOGIQUE DE L'ALGÈBRE DE FRÉCHET DES OPÉRATEURS RÉGULARISANTS

PAR JOSEPH TAPIA

ABSTRACT. – We prove that the algebra of smoothing operators with coefficients in a Fréchet algebra is K_0-regular. Consequently the same result is true for Schatten ideals. They are new examples of K_0-Regular Algebras of functional analysis type after those of J. Rosenberg. As a consequence, negative algebraic K-theory is equal to topological K-theory for smoothing operators and for trace operators ideal with coefficients in a Fréchet algebra stable by holomorphic functional calculus. This results extend those of M. Karoubi about Schatten ideals of dimension $>$ 1.

0. Introduction

Dans ce papier nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. – *Soit $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$ l'algèbre de Fréchet des matrices à décroissance rapide à coefficients dans une algèbre de Fréchet complexe A, stable par le calcul fonctionnel holomorphe. Pour tout $i \leq 0$ les morphismes canoniques $K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ reliant la K-théorie algébrique à la K-théorie topologique sont des isomorphismes*

L'algèbre $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$ est elle même stable par le calcul fonctionnel holomorphe, et il est bien connu que la K-théorie topologique des algèbres de Banach s'étend par les méthodes de Karoubi-Villamayor sans changement notable à ce type d'algèbres de Fréchet [3]. Notons d'autre part qu'avec plus de travail on peut aussi étendre la K-théorie topologique aux algèbres de Fréchet multiplicativement convexes [22]. Nous n'utiliserons pas cette théorie dans ce qui suit. Rappelons enfin que l'injection naturelle $A \longrightarrow \mathcal{K}_{-\infty}(A)$ induit un isomorphisme $K_i^{top}(A) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

En nous appuyant sur le théorème ci-dessus nous montrerons comment étendre la K-théorie topologique à toutes les algèbres de Fréchet.

En fait ce théorème complète à certains égards ceux de Karoubi sur la K-théorie des idéaux de Schatten [16], [17]. En effet si $\mathcal{L}^p$ désigne l'idéal de Schatten de "dimension" p [24] et $\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A$ le produit tensoriel topologique projectif, Karoubi montre entre autres que

Ce travail a été réalisé lors d'un détachement de l'auteur au CNRS. Il remercie cet organisme pour son accueil.

lorsque $p > 1$, les morphismes $K_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)$ sont des isomorphismes pour tout $i \leq 0$. Il obtient aussi des résultats sur la K- théorie algébrique de bas degré positif qui viennent d'être en partie élucidés par M. Wodzicki pour tout degré positif.

La méthode de Karoubi consiste à se ramener aux cas $i = 0$ et $i = -1$ après avoir montré que les groupes $K_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}A)$ sont périodiques de période 2 lorsque $p > 1$ et $i \leq 0$. Pour cela il s'appuie sur l'existence en K-théorie négative d'un cup-produit [16]. Un point essentiel de sa démarche est que le morphisme $K_{-2}(\mathcal{L}^p) \longrightarrow K_{-2}^{top}(\mathcal{L}^p)$ est surjectif pour tout $p \geq 1$. Ce dernier point reste valable aussi lorsque l'on remplace $\mathcal{L}^p$ par $\mathcal{K}_{-\infty} := \mathcal{K}_{-\infty}(\mathbf{C})$. Par contre le morphisme $K_2(\mathcal{L}^p) \longrightarrow K_2^{top}(\mathcal{L}^p)$ n'est surjectif que pour $p > 1$ et est en fait nul pour l'idéal $\mathcal{L}^1$ des opérateurs à trace ainsi que pour la sous-algèbre $\mathcal{K}_{-\infty}$ (qui rappelons-le n'est pas un idéal). C'est là la raison pour laquelle cette méthode échoue pour cette dernière valeur de p ainsi que pour l'algèbre $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$ qui nous occupe principalement ici.

Notre point de vue est qu'en introduisant la K-théorie homotopique de C. Weibel [31], les énoncés du type précédant se décomposent en deux niveaux, dont l'un est purement algébrique.

En effet pour tout $i \in \mathbf{Z}$ on a la factorisation

$$\begin{tikzcd} K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[dr] & KH_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \arrow[d, "\tau_i"] \\ & K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \end{tikzcd}$$

où KH désigne la K-théorie homotopique.

Par exemple nous avons pour les idéaux de Schatten $\mathcal{L}^p$ le théorème suivant qui porte sur la flèche η_i.

THÉORÈME 6. – *Soient A une algèbre de Fréchet complexe stable par calcul fonctionnel holomorphe et R une $\mathbf{C}$-algèbre commutative. L'algèbre $(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A) \otimes R$ est K_0-régulière pour tout $p \geq 1$.*

Rappelons que la K_n-régularité entraine la K_i-régularité pour tout $i \leq n$ [8]. Il suit de là, que *les groupes de K-théorie homotopique $KH_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)$ coïncident avec les groupes $K_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)$ de Bass* [2], *lorsque $i \leq 0$, et avec les groupes $KV_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)$ de K-théorie de Karoubi-Villamayor lorsque $i > 0$.*

La situation se simplifie en K-théorie homotopique pour les idéaux de Schatten de dimension $p > 1$:

THÉORÈME 7. – *Soit A une algèbre de Fréchet complexe stable par calcul fonctionnel holomorphe.*

i) *Les morphismes canoniques $KH_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)$ reliant la K-théorie homotopique à la K-théorie topologique sont des isomorphismes pour tout $i \in \mathbf{Z}$ pour tout $p > 1$.*

ii) *Les morphismes canoniques* $K_i(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A)\longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A)$ *reliant la* K*-théorie algébrique à la* K*-théorie topologique sont des isomorphismes pour tout* $i \leq 0$.

Ces énoncés montrent que la raison pour laquelle les groupes de K-théorie algébrique ne coïncident pas avec ceux de K-théorie topologique en codimension grande pour les idéaux de $Schatten$, se situe en fait entre la K-théorie algébrique et la K-théorie de Karoubi-Villlamayor.

La clé de ces deux théorèmes est le théorème ci-dessous qui concerne le morphisme η^* dans le cas de l'algèbre $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$.

THÉORÈME 2. – *Si* A *est une algèbre de Fréchet complexe et* R *une* $\mathbf{C}$*-algèbre unifère commutative, alors l'algèbre* $\mathcal{K}_{-\infty}(A)\otimes R$ *est* K_0*-régulière. En particulier* $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$ *et* $\mathcal{K}_{-\infty}\otimes R$ *sont* K_0*-régulières.*

Il suit de là, comme pour les idéaux de Schatten, que *les groupes de* K*-théorie homotopique* $KH_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ *coïncident avec les groupes* $K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ *de Bass* [2], *lorsque* $i \leq 0$, *et avec les groupes* $KV_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ *de* K*-théorie de Karoubi-Villamayor lorsque* $i > 0$.

Le théorème 1 est compte tenu de cela, un corollaire du théorème suivant qui porte sur la flèche τ^*.

THÉORÈME 3. – *Soit* $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$ *l'algèbre de Fréchet des matrices à décroissance rapide à coefficients dans une algèbre de Fréchet complexe* A*, stable par le calcul fonctionnel holomorphe. Pour tout* $i \leq 0$ *les morphismes canoniques* $KH_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A))\longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ *reliant la* K*-théorie algébrique homotopique à la* K*-théorie topologique sont des isomorphismes*

La théorie du déterminant de Fredholm montre que $KH_1(\mathcal{K}_{-\infty})$ tout comme $KH_1(\mathcal{L}^1)$, contient le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$ en facteur direct. Ceci empêche $KH_2(\mathcal{K}_{-\infty})$ de contenir un élément de Bott. On peut même prouver que la flèche $KH_2(\mathcal{K}_{-\infty})\longrightarrow K_2^{top}(\mathcal{K}_{-\infty})$ est nulle, montrant par là, que l'on ne peut espérer un résultat aussi simple que pour les idéaux de Schatten de dimension > 1.

Le principe de la démonstration du théorème 1 est le suivant.

On commence par prouver le théorème 2. Sa démonstration est basée sur le cas $i = 0$ de la Proposition 4 ci-dessous.

PROPOSITION 4. – *Soient* A *une algèbre de Fréchet complexe,* R *une* $\mathbf{C}$*-algèbre commutative unifère,* Γ *un groupe abélien libre de type fini et* H *un sous-groupe de* Γ *d'indice fini* N*. Alors l'inclusion d'algèbres de groupes*

$$j : \mathcal{K}_{-\infty}(A)\otimes R[H]\longrightarrow \mathcal{K}_{-\infty}(A)\otimes R[\Gamma]$$

induit un isomorphisme :

$$j^* : K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A)\otimes R[H])\left[\frac{1}{N}\right]\longrightarrow K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A)\otimes R[\Gamma])\left[\frac{1}{N}\right]$$

pour $i \leq 0$.

La démonstration du théorème 2 est basée sur le théorème des noyaux de Schwartz via la construction de Connes et Moscovici exposée dans [7], qui interprète essentiellement $K_0(\mathcal{K}_{-\infty}(A)[\Gamma])$ comme K_0 de l'algèbre de convolution d'un groupoïde.

Une fois la K_0-régularité obtenue, au sens universel énoncé par le théorème 2, on peut travailler avec le spectre KH. Il s'agit alors de prouver que les groupes de K-théorie négative de l'algèbre $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$ sont périodiques, et que cette périodicité est obtenue par cup produit avec un élément de Bott $\beta_{-2} \in K_{-2}(\mathcal{K}_{-\infty})$ [17].

L'idée de base est de considérer l'algèbre des polynômes de Laurent $\mathcal{K}_{-\infty}(A)[T,T^{-1}]$ non pas comme algèbre de groupe comme dans la démonstration de la proposition 4, mais bien comme une algèbre paramétrée par la variété affine $X = Spec(\mathbf{C}[T,T^{-1}])$. Le cadre permettant de mener à bien cela est celui des hypercohomologies à coefficient dans des spectres pour le site étale de X, à condition de travailler avec des coefficients rationnels. L'introduction de ces hypercohomologies, a ici l'intéret d'être un subtitut commode dans le cas du projectif $X = \mathbf{P^1}(\mathbf{C})$ à la K-théorie algébrique du projectif non-commutatif de [23]. Les techniques de localisation (3.3.3) permettent ainsi de comparer plus aisément cette hypercohomologie à la K-théorie topologique (3.4.4). Il en résulte par induction sur i, les isomorphismes pour $i \leq 0$,

$$K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \otimes \mathbf{Q}.$$

On se débarrasse des coefficients rationnels par un simple argument de carré arithmétique compte tenu des résultats antérieurs de Karoubi en K-théorie à coefficients finis.

Faisons pour terminer quelques commentaires. Nous savons que $K_1(\mathcal{K}_{-\infty}) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus V$ où V est est un $\mathbf{Q}$-vectoriel non nul. D'autre part bien que non unifère, l'algèbre $\mathcal{K}_{-\infty}$ vérifie le théorème de Whitehead [25]. Ainsi le sous-groupe des commutateurs $E(\mathcal{K}_{-\infty})$, est un "petit" sous-groupe. Le même commentaire peut être appliqué à la composante neutre polynômiale de $GL(\mathcal{K}_{-\infty})$, ou ce qui revient au même le sous-groupe engendré par les matrices unipotentes. La situation est qualitativement la même pour l'idéal des opérateurs à trace.

Ce résultat énonce une propriété de nature algébrique subtile des algèbres $\mathcal{K}_{-\infty}$ et $\mathcal{L}^1$. En effet d'après [13], [16], [25] le sous-groupe des commutateurs et la composante neutre polynomiale du groupe linéaire occupent tous deux tout le groupe linéaire dans le cas de l'algèbre des opérateurs compacts ou d'un idéal de Schatten $\mathcal{L}^p$ de dimension $p > 1$.

En s'apuyant sur [25] et la caractérisation des foncteurs additifs de la catégorie des C^*-algèbres dans les groupes abéliens qui sont des invariants d'homotopie continue [13], on peut aisément montrer (Proposition 5) que l'algèbre $\mathcal{K}\widehat{\otimes}_\pi A$ est K_n-régulière pour tout $n \in \mathbf{Z}$. *On s'attend à ce que l'ordre de K-régularité de l'idéal de Schatten $\mathcal{L}^p$ soit une fonction positive croissante de p.*

Dans le paragraphe qui suit nous rappelons succintement la construction de Connes-Moscovici et établissons la Proposition 4 dans le cas $i = 0$. Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration du théorème 2 , et à la fin de celle de la Proposition 4. Le paragraphe 3 introduit la technique de localisation et établit la périodicitée des groupes $KH_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \otimes \mathbf{Q}$ pour $i \leq 0$. Le paragraphe 4 est consacré à la fin de la démonstration des théorèmes 3 et 1. Dans le dernier paragraphe on démontre la K_n-régularité de l'algèbre des opérateurs compacts et les théorèmes 6 et 7 ci-dessus. Enfin dans un appendice nous regroupons quelque lemmes techniques de K-théorie topologique. La justification de cet appendice est la suivante. Travaillant avec des préfaisceaux de spectres, les fonctorialitées exigées doivent être strictes et non seulement à homotopie près, à moins de s'engager dans un travail de fondement hors de proportion avec le but poursuivi ici. C'est l'absence de références bibliographiques satifaisantes en ce qui concerne cette question pour la K-théorie topologique, qui est à l'origine de ce dernier paragraphe. Le foncteur G^{top} introduit n'est qu'un outil technique qui ne vise nulement à jouer le rôle d'une K-théorie topologique pour les algèbres de Fréchet. Cette question sera traitée ailleurs.

Je remercie le referee, qui m'a signalé une erreur dans la première version de la démonstration du lemme crucial (3.2.3). Ses remarques constructives m'ont permi d'améliorer le texte initial.

Tout le long, algèbre signifie *algèbre associative*. Si M est un $\mathbf{Z}$-module, $M[\frac{1}{N}]$ désigne le localisé $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$ obtenu en rendant l'entier N inversible.

1. Le cas $i = 0$ de la proposition 4

1.1. Construction auxiliaire

Si M est une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte de dimension > 0, nous désignerons par $\mathcal{R}_M$ l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels régularisants (opérateurs régularisants pour abréger) sur M. Rappelons que le choix d'une mesure lebesguienne sur M suffit à définir une structure d'algèbre de Fréchet sur $\mathcal{R}_M$, et que l'algèbre topologique ainsi définie est en fait indépendante de ce choix (seules les seminormes en dépendent). L'espace vectoriel topologique sous jacent à $\mathcal{R}_M$ est nucléaire [11]. Ceci permet d'interpréter $\mathcal{R}_M \widehat{\otimes}_\pi A$ comme l'algèbre de Fréchet $\mathcal{R}_M(A)$ des opérateurs régularisants sur $\mathcal{C}^\infty(M, A) = \mathcal{C}^\infty(M)\widehat{\otimes}_\pi A$. De même l'espace vectoriel topologique complet $L^2(M)$ est défini à isomorphisme unique près. Le choix d'une mesure lebesguienne dm sur M détermine sur lui une stucture d'espace de Hilbert $L^2(M, dm)$. Lorsque cette mesure provient d'une stucture riemannienne g sur M, nous noterons $L^2(M, g)$ ou même $L^2(M)$ cet espace de Hilbert. Dans ce dernier cas considérons de plus un opérateur elliptique P autoadjoint d'ordre > 0, par exemple le laplacien. On dispose alors sur le Hilbert $L^2(M)$ d'une base hilbertienne de vecteurs propres. Celle-ci détermine des isomorphismes d'algèbres de Fréchet $\mathcal{R}_M(A) \otimes R[\Gamma] \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[\Gamma]$, Γ étant un groupe et R une $\mathbf{C}$−algèbre.

Dans toute la suite le mot variété signifie : *variété localement compacte dénombrable à l'infini. On suppose que Γ est un groupe dénombrable, opérant librement et proprement par difféomorphismes sur une variété M de dimension > 0, et que le quotient M/Γ est une variété compacte B. Nous supposons B munie d'une structure riemannienne et désignerons par db la mesure lebesguienne associée.* Pour l'instant et jusqu'au 1.5. exclu, on ne suppose pas Γ abélien. Soit H un sous-groupe normal, d'indice fini N.

1.2. Désignons par $p : M \longrightarrow B$ ce revêtement galoisien de groupe Γ. On muni M de la stucture riemannienne relevée et noterons dz la mesure associée. Soit $C_c^\infty(M \times_\Gamma M)$ l'algèbre de convolution des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \times M$ invariantes par l'action diagonale de Γ et à support compact sur le quotient $M \times_\Gamma M$. Si $\pi : M \times M \longrightarrow M \times_\Gamma M$ désigne l'application de passage au quotient, le produit est donné par l'expression,

$$F * G(\pi(x,y)) = \int_M F(\pi(x,z))G(\pi(z,y))dz.$$

Autrement dit $M \times_\Gamma M$ est un groupoïde différentiable de base B et $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M)$ est son algèbre de convolution.

Rappelons la construction de Connes et Moscovici [7]. Soient $(U_i)_{1 \leq i \leq r}$ un recouvrement ouvert, fini, trivilisant de p, $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unitée subordonnée à ce recouvrement, de sorte que les $\varphi_i^{1/2}$ soient encore des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Soit pour chaque i une section β_i au dessus de U_i. On définit une isométrie Γ-équivariante $U : L^2(M, dz) \longrightarrow L^2(B \times \{1, \dots, r\} \times \Gamma)$ par l'expression :

$$U\xi.(b,i,g) = \varphi_i(b)^{1/2}\xi(g\beta_i(b))$$

Son adjoint est donné par :

$$U^*\eta.x = \sum_i \varphi_i(b)^{1/2}\eta(p(x), i, x/\beta_i(p(x)))$$

Soit F un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M)$ vu comme opérateur sur $L^2(M)$. L'expression $\theta(F) = UFU^*$ définit un opérateur à noyau $\mathcal{C}^\infty$ sur $B \times \{1, \dots, r\} \times \Gamma$. Celui-ci est explicitement donné par

$$\theta(F)(b,i,g;b',i',g') = \varphi_i(b)^{1/2}\varphi_{i'}(b')^{1/2}F(g\beta_i(b), g'\beta_{i'}(b')).$$

Posant $(\theta_g(F))_{ii'}(b,b') = \varphi_i(b)^{1/2}\varphi_{i'}(b')^{1/2}F(\beta_i(b), g\beta_{i'}(b'))$, $\theta(F)$ s'identifie, via la représentation régulière, à l'élément

$$\sum_{g \in \Gamma} \theta_g(F) \otimes g$$

de $M_r(\mathcal{R}_B)[\Gamma]$ [7]. On montre que θ est un morphisme d'algèbres et que le morphisme $\theta^* : K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M)) \longrightarrow K_0(\mathcal{R}_B[\Gamma])$ qu'il induit sur le K_0 ne dépend pas des choix faits.

Ce rappel étant, soit A une algèbre de Fréchet stable par le calcul fonctionnel holomorphe. L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A)$ est stable pour la multiplication dans l'algèbre de Fréchet $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M)\widehat{\otimes}_\pi A$. On munira l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A)$ de la structure d'algèbre induite par $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M)\widehat{\otimes}_\pi A$. De plus $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M) \otimes A$ est une sous-algèbre dense de $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A)$. Cette dernière remarque nous permet de calculer sur $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A)$ comme dans le cas où $A = \mathbf{C}$. On établit de même un morphisme d'algèbres

$$\theta : \mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \longrightarrow M_r(\mathcal{R}_B(A))[\Gamma]$$

induisant un morphisme canonique

$$\theta^* : K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A)) \longrightarrow K_0(\mathcal{R}_B(A)[\Gamma]).$$

Plus généralement encore si R est une algèbre sur $\mathbf{C}$, tout ce qui précède reste de mise si on remplace $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A)$ par $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R$, et $\mathcal{R}_B(A)[\Gamma]$ par $\mathcal{R}_B(A) \otimes R[\Gamma]$.

1.3. Soit H un sous-groupe normal de Γ d'indice fini N, et soit $q : M \longrightarrow B'$ l'application quotient sur M/H. Désignons par f l'application naturelle de B' sur B. C'est un revêtement fini de degré N. Désignons par $p' : M' \longrightarrow B'$ le revêtement principal image réciproque de p par f. On muni M' et B' des mesures relevées. Soit $\sigma : M \longrightarrow M'$ l'inclusion canonique $x \mapsto (\overline{x}, x)$ où $\overline{x}$ désigne la classe sous l'action de H du point x de M. Elle identifie q à un sous-revêtement principal de p', de groupe H et de base B'. En particulier M est ouverte et fermée dans M'. Désignons par

$$\sigma : \mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(M' \times_\Gamma M', A) \otimes R$$

le prolongement. Ce dernier est défini comme suit :

si F est dans $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R$, on pose

$$\sigma(F)((\overline{z}, x), (\overline{t}, y)) = \begin{cases} F(gx, gy) & \text{s'il existe un } g \in \Gamma \text{ tel que } gx \in \overline{z} \text{ et } gy \in \overline{t} \\ & 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

où nous avons noté $\overline{z}$, $\overline{t}$ la $H-$classe de z, t. Le deuxième membre est bien défini car F est H-invariant.

Vérifions que c'est un morphisme d'algèbres.

Soient F et G deux éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R$, et $(\overline{z}, x), (\overline{t}, y)$ deux points dans $M' \times_\Gamma M'$. Notons tout d'abord que le support de la fonction

$$(\overline{\zeta}, \xi) \mapsto F((\overline{z}, x), (\overline{\zeta}, \xi))G((\overline{\zeta}, \xi), (\overline{t}, y))$$

est contenu dans $M \times_H M$ identifiée à une sous-variété de $M' \times_\Gamma M'$.

En effet si $(\overline{\zeta}, \xi)$ est dans ce support, les points $((\overline{z}, x), (\overline{\zeta}, \xi))$ $((\overline{\zeta}, \xi), (\overline{t}, y))$ sont dans l'orbite sous Γ de points de $M \times M$. Cela signifie qu'il existe g et h dans Γ tels que les relations suivantes soient vérifiées au besoin en changeant les représentants des H-classes $\overline{z}$, $\overline{\zeta}$, $\overline{t}$:

$$gx = z, \quad g\xi = \zeta, \quad h\xi = k\zeta, \quad hy = t$$

où $k \in H$. D'où l'on tire la relation $hx = kz$, qui montre que $(\overline{z}, hx)$,et $(\overline{t}, hy)$ sont tous deux des points de M.

D'autre part, la fonction $\sigma(F) * \sigma(G)$ est Γ-invariante, et en vertu de ce que nous venons d'établir on peut supposer que $z = x$ et $t = y$ lorsque ce support est non vide. Mais il existe $g \in \Gamma$ tel que $gx = kx$, et $g\xi = \zeta$. Ainsi g est en fait dans H, ce qui prouve que $(\overline{\zeta}, \xi)$ est un point de M. Ainsi $\sigma(F) * \sigma(G)$ et $\sigma(F * G)$ sont donnés par la même expression lorsque

$$(\overline{\zeta}, \xi) \mapsto F((\overline{z}, x), (\overline{\zeta}, \xi))G((\overline{\zeta}, \xi), (\overline{t}, y))$$

a un support non vide. Ce qui achève la démonstration.

Posons $K = \Gamma/H$. Si g et h sont deux éléments de Γ, et F un élément de

$\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_H M', A) \otimes R$, l'application $(x,y) \mapsto F((g\overline{x}, x), (g\overline{y}, y))$ est un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R$ ne dépendant que des classes $\overline{g}$ et $\overline{h}$ de g et h dans K. On définit ainsi une matrice $\tau(F)$ dans $M_K(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)$.

Montrons que $\tau : \mathcal{C}_c^\infty(M' \times_H M', A) \otimes R \longrightarrow M_K(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)$ est un isomorhisme d'algèbres.

Soient F et G deux éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_H M', A) \otimes R$, x et y des points de M, et $\overline{g}$ et $\overline{h}$ deux éléments de K.

$$\begin{aligned}(\tau(F) * \tau(G))_{\overline{g}\overline{h}}(x,y) &= \sum_{\overline{k} \in K} \int_M F((\overline{gx}, x), (\overline{k\xi}, \xi)) G((\overline{k\xi}, \xi), (\overline{hy}, y)) d\xi \\ &= \int_{M'} F((\overline{gx}, x), \lambda) G(\lambda, (\overline{hy}, y)) d\lambda = (\tau(F * G)_{\overline{g}\overline{h}})(x,y)\end{aligned}$$

Soit F une matrice de $M_K(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)$ et $(\overline{z}, x)$,$(\overline{t}, y)$ deux points de $M' \times M'$. Il existe un couple unique $(\overline{g}, \overline{h})$ dans $K \times K$ tel que $gx \in \overline{z}$, et $hy \in \overline{t}$. Comme l'application $((\overline{z}, x), (\overline{t}, y)) \mapsto (\overline{g}, \overline{h})$ est localement constante, on définit une fonction H-invariante G, en posant $G((\overline{z}, x), (\overline{t}, y)) = F_{\overline{g}\overline{h}}(x,y)$. L'application $F \mapsto G$ est l'inverse de τ. Ce qui prouve l'assertion.

Désignons par $i : \mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R$, et

$i' : \mathcal{C}_c^\infty(M' \times_\Gamma M', A) \otimes R \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(M' \times_H M', A) \otimes R$ les inclusions canoniques. En désignant par δ le morphisme diagonal, on a un diagramme commutatif d'algèbres,

(1.3.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"'] & M_K(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R) \arrow[ddd, "M_K(i)"] \\
\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R \arrow[d, "\sigma"'] & \\
\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_\Gamma M', A) \otimes R \arrow[d, "i'"'] & \\
\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_H M', A) \otimes R \arrow[r, "\tau"] & M_K(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)
\end{tikzcd}$$

Montrons le :

$$(\tau(\sigma(F)))_{\overline{g}\overline{h}}(x,y) = \sigma(F)((\overline{gx}, x), (\overline{hy}, y)).$$

Cette expression est nulle si $\overline{g} \neq \overline{h}$. Si $\overline{g} = \overline{h}$, on peut toujours supposer $g = h$, et on a

$$(\tau(\sigma(F)))_{\overline{g}\overline{h}}(x,y) = F(gx, gy)$$

Ce qui prouve notre assertion car F est $\Gamma-$ invariant.

Toutes les algèbres précédentes peuvent être décrites comme sous-algèbres de $M_K(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)$.

En effet remarquons que K opère sur $M \times_H M$ par $\overline{s}(x,y) = (s^{-1}x, s^{-1}y)$. Les algèbres $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R$ et $M_K(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)$ sont aussi munies d'une action du groupe K par les formules

$$(\overline{s}.F)(x,y) = F(s^{-1}x, s^{-1}y)$$

et

$$(\overline{s}.F)_{\overline{g}\overline{h}}(x,y) = F_{\overline{gs}\overline{hs}}(s^{-1}x, s^{-1}y)$$

respectivement.

On montre aisément que :

– l'image de $\tau \circ i'$ est la sous-algèbre des invariants de $M_K(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)$ sous cette action.

– l'image de $\tau \circ i' \circ \sigma$ est la sous-algèbre des invariants qui de plus sont des matrices diagonales.

– l'image de $\tau \circ i' \circ \sigma \circ i$ est la sous-algèbre de la précédente où toutes les matrices sont scalaires.

Le diagramme (1.3.1) donne en K-théorie le diagramme commutatif

(1.3.2)
$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R) \arrow[r, "N.id"] \arrow[d, "i^*"'] & K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R) \arrow[ddd, "i^*"] \\
K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R) \arrow[d, "\sigma^*"'] & \\
K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_\Gamma M', A) \otimes R) \arrow[d, "i'^*"'] & \\
K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_H M', A) \otimes R) \arrow[r, "\tau^*"] & K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)
\end{tikzcd}$$

autrement dit on a la relation

(1.3.3) $$\tau^* i'^* \sigma^* i^* = N i^*.$$

1.4. La construction précédente admet une contre partie algébrique qui en est un cas particulier. *Prenons pour revêtement galoisien particulier* $p : M \longrightarrow B$ *de groupe* Γ, *le* *revêtement trivial de base B. Dans toute la suite cette hypothèse restera en vigueur* . Dans ce cas l'algèbre $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R$ s'identifie canoniquement à l'algèbre de groupe $\mathcal{R}_B(A)[\Gamma] \otimes R$. On peut regarder cet isomorphisme comme le morphisme de Connes-Moscovici correspondant au choix de la section globale $\beta(b) = (b, e)$.

Soit G le groupoïde $\Gamma \times_H \Gamma$ obtenu par action diagonale de H sur $\Gamma \times \Gamma$. Celui-ci admet la description suivante.

Son ensemble d'objets est $K := \Gamma/H$. Les flèches sont les couples $(\overline{s}, g)$ où $\overline{s} \in K$ et $g \in \Gamma$. La source, (resp. le but) de $(\overline{s}, g)$ est $\overline{s}$ (resp. $\overline{gs}$). La composition est donnée par l'expression $(\overline{s}, g)(\overline{t}, h) = (\overline{s}, gh)$ lorsque $\overline{t} = \overline{gs}$.

Un calcul élémentaire montre que la multiplication dans $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R$ est donnée par l'expression

$$PQ(\overline{s}, g) = \sum_{h \in \Gamma} P(\overline{s}, h) Q(\overline{hs}, h^{-1}g) \tag{1.4.1}$$

la somme du deuxième membre étant finie, et les éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R$ étant identifiés à des fonctions P à support fini de G dans $\mathcal{R}_B(A) \otimes R$. Autrement dit, l'algèbre $\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R$ s'identifie canoniquement à l'algèbre de groupoïde

$$(\mathcal{R}_B(A) \otimes R)[G] = \mathcal{R}_B(A) \otimes R[G].$$

1.5. A partir d'ici le groupe Γ est abélien libre de rang fini.

Par excision du K_0 on peut supposer A unifère, ce que nous fairons désormais. Enfin nous nous plaçons sous les hypothèses du **1.4**, et adoptons les mêmes notations.

(1.5.1) LEMME. – *Les morphismes i et i' induisent des monomorphismes*

$$i^* : K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R)\left[\frac{1}{N}\right] \longrightarrow K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)\left[\frac{1}{N}\right]$$

$$i'^* : K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_\Gamma M', A) \otimes R)\left[\frac{1}{N}\right] \longrightarrow K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_H M', A) \otimes R)\left[\frac{1}{N}\right]$$

Preuve. – Démontrons le pour le morphisme i, le cas de i' étant similaire puisque le revêtement $p' : M' \longrightarrow B'$ est lui aussi trivial.

Compte tenu du 1.4, il s'agit de voir que le morphisme $i : \mathcal{R}_B(A) \otimes R[\Gamma] \longrightarrow \mathcal{R}_B(A) \otimes R[G]$ induit un monomophisme en K-théorie lorsque l'on rend l'entier N inversible.

Le groupe K agit sur $\mathcal{R}_B(A) \otimes R[G]$ (resp. $R[G]$) par

$$(\overline{s}P)(\overline{t}, g) = P(\overline{s}\overline{t}, g).$$

L'inclusion d'algèbres $i : \mathcal{R}_B(A) \otimes R[\Gamma] \longrightarrow \mathcal{R}_B(A) \otimes R[G]$ identifie $\mathcal{R}_B(A) \otimes R[\Gamma]$ à la sous-algèbre des invariants de $\mathcal{R}_B(A) \otimes R[G]$ sous cette action.

On voit dans (1.4.1), que comme $R[\Gamma]$-module à droite, $R[G]$ s'identifie au module libre $(R[\Gamma])^{(K)}$.

Explicitons une base du $R[\Gamma]$-module à droite $R[G]$.

Pour tout $\overline{s}$ désignons par $\varepsilon_{\overline{s}}$ l'élément de $R[G]$ définit par

$$\varepsilon_{\overline{s}}(\overline{t}, g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{t} = \overline{s} \text{ et } g = e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les $\varepsilon_{\overline{s}}$ forment une famille orthogonale d'idempotents de l'anneau $R[G]$, autrement dit on a :

$$\varepsilon_{\overline{s}}\varepsilon_{\overline{t}} = \delta_{\overline{s},\overline{t}}\varepsilon_{\overline{s}}$$

Si pour $P \in R[G]$ et $\overline{s} \in K$, on note $P_{\overline{s}}$ l'élément de $R[\Gamma]$ tel que

$$P_{\overline{s}}(\overline{t}, g) = P(\overline{s}, g)$$

pour tout $\overline{t} \in K$ et tout $g \in \Gamma$, on a la relation

$$P = \sum_{\overline{s} \in K} \varepsilon_{\overline{s}} P_{\overline{s}}.$$

Remarquons maintenant que $R[G]$ est aussi un $R[\Gamma]$-module libre à gauche de rang N avec la même base $(\varepsilon_{\overline{s}})$. En effet si on note pour $Q \in R[G]$ et $\overline{s} \in K$, $Q'_{\overline{s}}$ l'élément de $R[\Gamma]$ tel que

$$Q'_{\overline{s}}(\overline{t}, g) = Q(\overline{sg^{-1}}, g)$$

pour tout $\overline{t} \in K$ et tout $g \in \Gamma$, on a la relation

$$Q = \sum_{\overline{s} \in K} Q'_{\overline{s}} \varepsilon_{\overline{s}}.$$

De plus $R[H]$ opère de façon centrale sur $R[G]$. Le morphisme de $R[\Gamma] - R[\Gamma]$-bimodules

$$R[G] \otimes_{R[H]} R[G] \longrightarrow (R[\Gamma])^{(K \times K)}$$

défini par

$$\sum_{\overline{s} \in K} \lambda_{\overline{s}} \varepsilon_{\overline{s}} \otimes \sum_{\overline{t} \in K} \varepsilon_{\overline{t}} \mu_{\overline{t}} \mapsto (\lambda_{\overline{s}} \mu_{\overline{t}})$$

est un isomorphisme.

Soit M un $\mathcal{R}_B(A)^+ \otimes R[\Gamma]$-module à droite. On a donc un isomorphisme de $R[\Gamma]$-modules à droite

$$(M \otimes_{R[\Gamma]} R[G]) \otimes_{R[H]} R[G] \xrightarrow{\sim} M^{(K \times K)}.$$

Notons $f : \mathcal{R}_B(A)^+ \otimes R[H] \longrightarrow \mathcal{R}_B(A)^+ \otimes R[G]$ le morphisme canonique d'algèbres. Avec ces notations l'isomorphisme précédent s'interprète au niveau des classes

$$i_* f^* f_* i^*(x) = N^2 x$$

pour tout $x \in K_0(\mathcal{R}_B(A)^+ \otimes R[\Gamma])$. Ceci prouve que $i^* : K_0(\mathcal{R}_B(A)^+ \otimes R[\Gamma])[\frac{1}{N}] \longrightarrow K_0(\mathcal{R}_B(A)^+ \otimes R[G])[\frac{1}{N}]$ est injective. Ceci prouve (1.5.1).

(1.5.2) LEMME. – *Le morphisme σ induit un épimorphisme*

$$\sigma^* : K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)\left[\frac{1}{N}\right] \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_\Gamma M, A) \otimes R)\left[\frac{1}{N}\right]$$

Preuve. – Le revêtement $M \longrightarrow B$ étant trivial, on vérifie aisément que $\tau i' = M_K(i)$. On a donc en vertu de (1.3.3) $i^*\sigma^*i^* = Ni^*$. Comme i^* est un monomorphisme on a le lemme.

Donnons nous sur B' des données, relatives au revêtement galoisien $M \longrightarrow B'$ de groupe H, permettant de construire un morphisme de Connes-Moscovici

$$\theta' : \mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R \longrightarrow M_r(\mathcal{R}_{B'}(A)) \otimes R[H].$$

Le revêtement $M \longrightarrow B'$ étant identifié à un sous-revêtement de $M' \longrightarrow B'$, choisissons ces mêmes données pour le revêtement galoisien $M' \longrightarrow B'$ de groupe Γ. Appliquant à ces deux revêtements, avec ces données, la construction de Connes et Moscovici rappelée ci-dessus, on obtient un diagramme commutatif d'algèbres.

$$\text{(1.5.3)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R & \xrightarrow{\theta'} & M_r(\mathcal{R}_{B'}(A)) \otimes R[H] \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & {\scriptstyle j}\downarrow \\ \mathcal{C}_c^\infty(M' \times_\Gamma M', A) \otimes R & \xrightarrow{\theta''} & M_r(\mathcal{R}_{B'}(A)) \otimes R[\Gamma] \end{array}$$

où j désigne l'inclusion canonique. D'où un diagramme commutatif en K-théorie

$$\text{(1.5.4)} \qquad \begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M \times_H M, A) \otimes R)[\frac{1}{N}] & \xrightarrow{\theta'^*} & K_0(\mathcal{R}_{B'}(A) \otimes R[H])[\frac{1}{N}] \\ {\scriptstyle\sigma^*}\downarrow & & {\scriptstyle j^*}\downarrow \\ K_0(\mathcal{C}_c^\infty(M' \times_\Gamma M', A) \otimes R)[\frac{1}{N}] & \xrightarrow{\theta''^*} & K_0(\mathcal{R}_{B'}(A) \otimes R[\Gamma])[\frac{1}{N}] \end{array}$$

D'autre part le revêtement $M' \longrightarrow B'$ est trivilisable, on dispose donc comme au 1.4, d'un morphisme de Connes-Moscovici $\theta : \mathcal{C}_c^\infty(M' \times_\Gamma M', A) \otimes R \longrightarrow \mathcal{R}_{B'}(A)[\Gamma] \otimes R$ qui est un isomorphisme d'algèbres. Ainsi comme $\theta''^* = \theta^*$ d'après [7], le morphisme θ''^* dans le diagramme (1.5.3) est aussi un isomorphisme. On en déduit dans ce même diagramme en vertu du lemme (1.5.2), que le morphisme

$$j^* : K_0(\mathcal{R}_{B'}(A) \otimes R[H])\left[\frac{1}{N}\right] \longrightarrow K_0(\mathcal{R}_{B'}(A) \otimes R[\Gamma])\left[\frac{1}{N}\right]$$

est surjectif.

Remarque. – Le revêtement galoisien $q : M \longrightarrow B'$ n'est pas trivialisable en général et de ce fait, la construction de Connes-Moscovici est indispensable dans l'établissement de la commutativité du diagramme (1.5.4) avec $\theta''^* = \theta^*$. C'est uniquement ici qu'intervient pour la première fois la spécificité de l'algèbre des opérateurs régularisants.

Il reste à établir le lemme :

(1.5.5) LEMME. – *L'inclusion j induit une injection*

$$j^* : K_0(\mathcal{R}_{B'}(A)) \otimes R[H])\left[\frac{1}{N}\right] \longrightarrow K_0(\mathcal{R}_{B'}(A))) \otimes R[\Gamma])\left[\frac{1}{N}\right].$$

Preuve. – Ce lemme est immédiat par la formule de projection qui est ici valable [19]. Ceci achève la démonstration.

Dans le paragraphe suivant seul le cas où K est cyclique est exploité.

2. Preuve du théorème 2 et de la proposition 4

(2.1.1) Soient A et R comme dans le théorème 2, et fixons un entier $N > 1$. Il est clair que A, $R[T]$, $\Gamma = \mathbf{Z}^{n+1}$, $H = \mathbf{Z}^n \times N\mathbf{Z}$ vérifient les hypothèses de la proposition 4.

Posons pour abréger

$B = (\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)^+[t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}]$, où $(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)^+$ désigne l'unitarisée sur $\mathbf{C}$. On a une identification canonique

$B[t_{n+1}, t_{n+1}^{-1}] = (\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)^+[\mathbf{Z}^{n+1}]$. Le morphisme d'anneaux

$B[t_{n+1}, t_{n+1}^{-1}] \longrightarrow B[t_{n+1}, t_{n+1}^{-1}]$ défini par $t_{n+1} \mapsto t_{n+1}^N$ s'identifie à l'inclusion

$$(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)^+[H] \hookrightarrow (\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)^+[\Gamma].$$

Pour établir le théorème 2 il suffit en changeant de notations, d'établir le lemme suivant

(2.1.2) LEMME. – *Si R est un anneau tel que pour tout $m \geq 0$ le morphisme*

$$R[t_1, \ldots, t_m, t_1^{-1}, \ldots, t_m^{-1}] \longrightarrow R[t_1, \ldots, t_m, t_1^{-1}, \ldots, t_m^{-1}]$$

défini par $t_m \mapsto t_m^N$ induise un isomorphisme

$$K_0(R[t_1, \ldots, t_m, t_1^{-1}, \ldots, t_m^{-1}])\left[\frac{1}{N}\right] \xrightarrow{\sim} K_0(R[t_1, \ldots, t_m, t_1^{-1}, \ldots, t_m^{-1}])\left[\frac{1}{N}\right]$$

alors pour tout $n \geq 0$ le morphisme

$$K_0(R[t_1, \ldots, t_n])\left[\frac{1}{N}\right] \longrightarrow K_0(R)\left[\frac{1}{N}\right]$$

est un isomorphisme.

En effet, appliquons ce lemme et reprenons les notations du Théorème 2. Le foncteur K_0 étant excisif, et l'anneau $\mathbf{C}$ régulier, l'algèbre $(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)^+$ vérifie l'hypothèse du lemme ci-dessus en vertu du paragraphe précédent et de (2.1.1). D'autre part, comme c'est une $\mathbf{C}$-algèbre, les groupes $N^m K_0(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)$ sont des $\mathbf{C}$-vectoriels [29]. D'où

$$N^m K_0(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R) = N^m K_0(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)\left[\frac{1}{N}\right] = 0.$$

Démontrons le lemme (2.1.2). Les hypothèses de celui-ci sont stables par passage à l'anneau des polynômes de Laurent. Pour montrer que $N_m K_0(R)[\frac{1}{N}] = 0$, il suffit donc de prouver simplement $NK_0(R)[\frac{1}{N}] = 0$.

Tout élément de $NK_0(R)$ est annulé par une puissance de l'endomorphisme V_N [29,3.1]. Mais le morphisme V_N n'est autre que celui induit par $t \mapsto t^N$ [29], qui précisément est un isomorphisme sur $K_0(R[t, t^{-1}])[\frac{1}{N}]$, il induit donc un isomorphisme sur le facteur $NK_0(R)[\frac{1}{N}]$ de $K_0(R[t, t^{-1}])[\frac{1}{N}]$. Ceci prouve (2.1.2).

(2.2.1) Reste à prouver la proposition 4. D'après le Théorème 2 les algèbres $\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[H]$ et $\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[\Gamma]$ sont K_0-régulières, on a donc des scindages fonctoriels

$$K_i((\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[H])[t, t^{-1}]) = K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[H]) \oplus K_{i-1}(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[H])$$

et

$$K_i((\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[\Gamma])[t, t^{-1}]) = K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[\Gamma]) \oplus K_{i-1}(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[\Gamma])$$

pour tout $i \leq 0$. Par induction sur i on est amené à traiter seulement le cas où $i = 0$, ce qui a été fait au théorème 2. Ceci achève la démonstration.

(2.3.1) COROLLAIRE. – *Si A est une algèbre de Fréchet complexe stable par le calcul fonctionnel holomorphe, R une $\mathbf{C}$-algèbre commutative unifère, alors les groupes $KH_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)$ de K-théorie homotopique sont canoniquement isomorphes aux groupes $K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)$ de K-théorie algébrique pour $i \leq 0$, et aux groupes $KV_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)$ de K-théorie de Karoubi-Villamayor pour $i > 0$.*

3. Localisation

Dans les deux paragraphes qui suivent nous montrons que si B est une $\mathbf{C}$-algèbre de Fréchet stable par le calcul fonctionnel holomorphe et $\mathcal{K}_{-\infty}$-stable au sens de Karoubi [17], alors sa K-théorie négative rationnelle est périodique de période 2. Remarquons que ces algèbres sont *universellement K_0-régulières, i.e. pour toute $\mathbf{C}$-algèbre commutative R, $B \otimes R$ est K_0-régulière* . Nos exemples principaux de telles algèbres sont $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$, $\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A$ avec $p \geq 1$, $\mathcal{K} \widehat{\otimes}_\pi A$, où A est une algèbre de Fréchet stable par calcul fonctionnel holomorphe. Il faut ajouter pour une C^*-algèbre A, l'algèbre $\mathcal{K} \widetilde{\otimes} A$, où $\widetilde{\otimes}$ désigne le produit tensoriel minimal.

La démonstration qui suit est écrite avec l'algèbre stable $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$. Le lecteur vérifiera sans peine que c'est la seule propriété de celle ci utilisée dans ces deux paragraphes.

Dans les deux paragraphes qui suivent nous utilisons les hypercohomologies sur des sites à coefficients dans des préfaisceaux de spectres. Notre référence générale pour cette théorie est [28].

(3.1.1) Dans ce qui suit $KH(-)$ désigne le spectre fibrant cannoniquement associé au spectre de la K-théorie homotopique. On désigne par $KH(-)\langle n\rangle$ le n-ème étage de sa décomposition fonctorielle de Postnikov [28, 5.51]. Si F est un spectre $F \otimes \mathbf{Q}$ désigne son localisé sur $\mathbf{Q}$ [5].

(3.1.2) Soit $\mathcal{O}^h$ *le henselisé de l'anneau localisé* $\mathcal{O}$ *à l'origine* $(t_1, \ldots, t_n)$ *de l'espace affine* $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$. Rappelons que $\mathcal{O}^h$ *est la clôture intégrale de* $\mathcal{O}$ *dans l'anneau* $\mathbf{C}[[t_1, \ldots, t_n]]$ *des séries formelles.* C'est une sous-algèbre de l'algèbre des séries convergentes à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Rappelons aussi que c'est la limite inductive des algèbres $\mathcal{O}(U)$ où U décrit un système fondamental de voisinages du point $(t_1, \ldots, t_n)$ pour la topologie étale sur $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$. Plus généralement si $\mathcal{O}$ est excellent [12], son hensélisé $\mathcal{O}^h$ est formé des éléments de son complété $\widehat{\mathcal{O}}$ qui sont algébriques sur $\mathcal{O}$, et non seulement des éléments entiers.

(3.1.3) Désignons par $\mathbf{Var}_{/\mathbf{C}}$ la catégorie des schémas séparés réduits nœthériens de type fini sur $\mathbf{C}$ que l'on identifiera à des variétés algébriques sur $\mathbf{C}$. Si X est un tel schéma, on désignera par X^{an} l'espace analytique complexe associé et par $\mathcal{O}^{an}(X)$ son anneau des fonctions analytiques. Désignons par $\mathbf{Aff}_{/\mathbf{C}}$ la sous catégorie pleine des variétés affines. Soit le préfaisceau suivant sur la catégorie $\mathbf{Aff}_{/\mathbf{C}}$ à valeurs dans celle des spectres fibrants :

$$F : U \mapsto KH(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes \mathcal{O}(U)).$$

Pour une courbe X sur $\mathbf{C}$, tout ouvert $U \neq X$ étant un ouvert affine, le préfaisceau F s'étend en un préfaisceau sur le site étale de la courbe X, y compris si X n'est pas affine.

Lorsque R est une $\mathbf{C}$-algèbre commutative, on notera par abus $F(R)$ en place de $KH(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R)$. Enfin signalons que les produit tensoriels sont tous sur $\mathbf{C}$ sauf mention du contraire. Ainsi $F(\mathbf{C})$ n'est autre que $KH(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$

On dispose d'un morphisme d'augmentation

$$F(X) \longrightarrow \mathbf{H}^{\bullet}_{et}(X, F)$$

(3.2.1) LEMME. – *On suppose que* X *est une courbe affine lisse sur* $\mathbf{C}$. *La flèche*

$$F(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{H}^{\bullet}_{et}(X, F(-) \otimes \mathbf{Q})$$

est une équivalence faible.

Preuve. – Nous allons appliquer le critère de R. Thomason [28, prop 2.8] au schéma régulier X et au préfaisceau $F(-) \otimes \mathbf{Q}$ sur le site étale de X. Remarquons tout d'abord que si $\lambda : R \longrightarrow S$ est un morphisme d'anneaux commutatifs pour lequel S est un R-module libre de rang fini n, R et S identifiés à $1 \otimes R$ et $1 \otimes S$ étant centraux dans $(\mathcal{K}_{-\infty}(A))^+ \otimes R$ et $(\mathcal{K}_{-\infty}(A))^+ \otimes S$ respectivement, on dispose d'un morphisme de transfert $\lambda_* : K_0((\mathcal{K}_{-\infty}(A))^+ \otimes S) \longrightarrow K_0((\mathcal{K}_{-\infty}(A))^+ \otimes R)$ et de plus le morphisme $\lambda_* \lambda^*$

est la multiplication par n dans $K_0((\mathcal{K}_{-\infty}(A))^+ \otimes R)$ [19]. On vérifie immédiatement que λ_* est compatible aux scindages

$$K_0((\mathcal{K}_{-\infty}(A))^+ \otimes R) = \pi_0 F(R) \oplus K_0(R)$$

et

$$K_0((\mathcal{K}_{-\infty}(A))^+ \otimes S) = \pi_0 F(R) \oplus K_0(S).$$

Ainsi on a une formule de projection pour $\pi_0 F(-)$. Par suspension de $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$, on étant la formule de projection aux $\pi_q F(-)$ pour $q \leq 0$. D'autre part par K_0 régularité universelle de $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$ les $\pi_q F(-)$, pour $q \geq 0$ se ramènent au $\pi_0 F(-)$ par le foncteur lacets de Karoubi. Ceci permet d'étendre le transfert à toute la K-théorie homotopique. Autrement dit on dispose dans la catégorie homotopique stable, d'un transfert

$$\lambda_* : F(S) \longrightarrow F(R)$$

tel que $\lambda_* \lambda^*$ soit la multiplication par n dans $F(R)$, dans la catégorie homotopique stable. Il suit de là que le préfaisceau F vérifie la propriété de transfert faible sur le site étale de tout corps L au sens de [28, Définition 2.12].

Soit L un corps étale sur un corps résiduel $k(x)$ en un point x de X. La suite spectrale du passage du local au global et un calcul de cohomologie galoisienne [28, Proposition 2.14] montrent immédiatement que $\eta(L) : F(L) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{H}^{\bullet}_{et}(L, F(-) \otimes \mathbf{Q})$ est une équivalence faible.

D'autre part il découle de [31], que le foncteur $F(-)$ a la propriété de Mayer-Vietoris. Il reste à voir que $F(-) \otimes \mathbf{Q}$ a la propriété de localisation au dessus de X pour les schémas réguliers, [28, Def 2.6]. Tout les anneaux intervenant ici sont de Dedekind. Désignons par Y un schéma affine étale sur X, qui est le spectre d'une $\mathbf{C}$-algèbre $D := \mathcal{O}(Y)$ dont l'anneau sous-jacent est de Dedekind. Considérons un fermé Z de Y d'ouvert complémentaire U défini par l'idéal I. Nous désignerons par D_Z l'anneau $\mathcal{O}(U)$. Notons $R := B \otimes D$. Par abus I désignera aussi l'déal central $B \otimes I$ de R. Enfin $R_Z := B \otimes D_Z$.

(3.2.3) Lemme. – *Avec les notations précédentes, on a fonctoriellement une fibration de localisation*

$$F(Z) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(U).$$

Preuve. – Autrement dit, on veux montrer l'existence d'une fibration

$$KH(R/I) \longrightarrow KH(R) \longrightarrow KH(R_Z).$$

La démonstration qui suit m'a été signalée par le referee.

Décomposons en plusieurs étapes.

i) $D := \mathbf{C}[T]$ et Z est l'origine. La fibration n'est autre que le théorème fondamental de la K-théorie,

$$KH(B[T]/(T)) \longrightarrow KH(B[T]) \longrightarrow KH(B[T, T^{-1}]).$$

ii) Z est un point défini par $f \in D$. Le morphisme $\mathbf{C}[T] \longrightarrow D$, $T \mapsto f$, est un isomorphisme analytique le long de f, on a donc en vertu de [31, 2.5] un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} KH(B[T]) & \longrightarrow & KH(B[T,T^{-1}]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ KH(R) & \longrightarrow & KH(R_Z). \end{array}$$

Les fibres homotopiques des flèches horizontales sont donc canoniquement faiblement équivalantes. D'après le cas i) ci-dessus on obtient donc une équivalence faible de $KH(R/(f))$ vers la fibre homotopique de la flèche du bas du diagramme.

iii) Z est un point. Choisissons $s \in D$ de sorte que $Z \in Spec(D[1/s])$ soit défini par une fonction $f \in D[1/s]$. Le morphisme de localisation $R \longrightarrow R_Z$ est un isomorphisme analytique le long de s, on a donc toujours en vertu de [31, 2.5], le diagramme homotopiquement cartésien,

$$\begin{array}{ccc} KH(R) & \longrightarrow & KH(R_Z)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ KH(R[1/s]) & \longrightarrow & KH(R_Z[1/s]). \end{array}$$

Un raisonement analogue au précédent fourni une flèche cannonique de $KH(R/I)$ vers la fibre homotopique de la flèche du haut du diagramme.

iv) Z est un ensemble fini de points. Ce cas se démontre immédiatement à partir du cas précédent par induction sur le nombre de points de Z. Ceci achève la démonstration de (3.2.3).

(3.3.1) LEMME. – *Soit X une courbe algébrique affine et lisse sur* $\mathbf{C}$. *Les morphismes*

$$\pi_i F(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_i \mathbf{H}^\bullet_{et}(X, F(-) \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle)$$

sont des isomorphismes pour tout $i < 0$.

Preuve. – Désignons par $F(-)\rangle 0\langle$ la fibre de $F(-) \longrightarrow F(-)\langle 0\rangle$. On obtient un diagramme commutatif de fibrations [28] :

$$\begin{array}{ccccc} F(-) \otimes \mathbf{Q}\rangle 0\langle & \longrightarrow & F(-) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & F(-) \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}^\bullet_{et}(X, F(-) \otimes \mathbf{Q}\rangle 0\langle) & \longrightarrow & \mathbf{H}^\bullet_{et}(X, F(-) \otimes \mathbf{Q}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^\bullet_{et}(X, F(-) \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) \end{array}$$

Compte tenu du lemme (3.2.1) il suffit de prouver que $\pi_i \mathbf{H}^{\bullet}_{et}(X, F(-) \otimes \mathbf{Q})\rangle 0 \langle) = 0$ pour $i < 0$. Considérons les premiers termes de la suite spectrale du passage du local au global

$$E_2^{pq} = H^p_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q})\rangle 0 \langle).$$

On a $E_2^{pq} = 0$ si $q \leq 0$. Une adaptation immédiate de la démonstration du Théorème 4.1 [SGA 4] (exposé X) montre que X est de dimension cohomologique étale ≤ 1 pour les $\mathbf{Q}$-modules (voir aussi [28]). Ainsi on a de plus $E_2^{pq} = 0$ pour $p > 1$. Le lemme en découle immédiatement.

Calculons l'hypercohomologie de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ a coefficients dans le préfaisceau $F(-)$.

Si X est une courbe, désignons par $R(X)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur X. Soit G le préfaisceau de spectres fibrants sur le site étale de X définit par :

$$G(U) = KH(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R(U)).$$

On a un morphisme de spectres fibrants

$$F \longrightarrow G.$$

(3.3.2) LEMME. – *Soit X une courbe lisse irréductible et rationnelle. On dispose d'une suite exacte courte de faisceaux abéliens sur X_{et} :*

$$0 \longrightarrow \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \mathcal{N}_q \longrightarrow 0$$

où le conoyau $\mathcal{N}_q$, a sa fibre en tout point géométrique générique nulle. De plus pour tout point fermé x on a des isomorphismes cannoniques $i_x^* \mathcal{N}_q = \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$.

Preuve. – Soit η un point géométrique générique de corps résiduel K, clôture algébrique du corps $R(X)$ des fonctions rationnelles sur X. Le morphisme $\tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}_{,\eta} \longrightarrow \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}_{,\eta}$ s'identifie à l'identité de $\tilde{\pi}_q F(K) \otimes \mathbf{Q}$, d'où la seconde assertion. Montrons que $\tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}$ est un monomorphisme. Pour cela il suffit de le voir à la fibre aux points géométrique au dessus des points fermés. Soit x un tel point, le morphisme $\tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}_{,x} \longrightarrow \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}_{,x}$ s'identifie au morphisme $\pi_q F(\mathcal{O}^h_{X,x}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_q F(R(\mathcal{O}^h_{X,x})) \otimes \mathbf{Q}$. La courbe X étant lisse $\mathcal{O}^h_{X,x}$ s'identifie à $\mathcal{O}^h$ et $R(\mathcal{O}^h_{X,x})$ à $\mathcal{O}^h[t^{-1}]$ en vertu de (3.1.2). De plus l'inclusion $\mathbf{C}[t] \longrightarrow \mathcal{O}^h$ est un isomorphisme analytique le long de t. La suite exacte longue associée à cet isomorphisme analytique [30], montre que l'on a un scindage canonique $\pi_q F(R(\mathcal{O}^h)) = \pi_q F(\mathcal{O}^h) \oplus \pi_{q-1} F(\mathbf{C})$. Ce qui prouve le lemme.

(3.3.3) LEMME. – i) *Soit X une courbe irréductible et lisse sur* $\mathbf{C}$. *On a une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow H^1_{et}(X, \tilde{\pi}_{q+1} F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow \pi_q \mathbf{H}^{\bullet}(X, F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow H^0_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow 0.$$

ii) *Soit U un ouvert de X (pour la topologie de Zariski) isomorphe à un ouvert de $Spec(\mathbf{C}[T])$, et de fermés complémentaires Z dans X, et Z' dans $Spec(\mathbf{C}[T])$ respectivement. On a une suite exacte:*

$$0 \longrightarrow H^0_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \oplus (\bigoplus_{x \in Z'} \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q})$$
$$\longrightarrow \bigoplus_{x \in Z} \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^1_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow 0.$$

Preuve. – Le i) provient de la suite spectrale d'hypercohomologie et de ce que X_{et} est de dimension cohomologique ≤ 1 pour les faisceaux de $\mathbf{Q}$-modules.

Désignons par $j : U \longrightarrow X$ l'immersion ouverte et $i : Z \longrightarrow X$ l'immersion fermée. Considérons le faiscaux de $\mathbf{Q}$-vectoriels $\tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}$ sur X_{et}. En vertu de (3.3.2) on a $\mathcal{N}_q = \bigoplus_{x \in X} i_{x*} i^*_x \mathcal{N}_q$, où x décrit les points fermés de X et i_x désigne l'inclusion du point fermé x. On a donc un triangle

$$Ri_* Ri^! \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow Ri_* Ri^! \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow Ri_* Ri^! \mathcal{N}_q \xrightarrow{[1]} .$$

De plus le foncteur i_* est exact et se dérive donc trivialement. On a donc un isomorphisme fonctoriel $R(i_* i^!) = Ri_* Ri^!$. D'autre part le foncteur exact i_{x*} transforme faisceaux flasques [SGA 4], en faisceaux flasques. Ces derniers étant acycliques pour le foncteur $i_* i^!$ [SGA 4], on a un isomorphisme fonctoriel $Ri_* Ri^! Ri_{x*} = R(i_* i^! i_{x*})$. Or $i^! i_{x*} = 0$ si $x \notin Z$ et $i_* i^! i_{x*} = i_{x*}$ si $x \in Z$. Finalement on a le triangle

$$Ri_* Ri^! \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow Ri_* Ri^! \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \bigoplus_{x \in Z} Ri_{x*} i^*_x \mathcal{N}_q \xrightarrow{[1]} .$$

Passant à la cohomologie, on a la longue suite exacte

$$\longrightarrow H^p_Z(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow H^p_Z(X, \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow \bigoplus_{x \in Z} H^p_{et}(x, i^*_x \mathcal{N}_q) \longrightarrow .$$

Or $H^p_{et}(x, i^*_x \mathcal{N}_q) = 0$ pour $p \neq 0$, et d'après (3.3.2) $H^0_{et}(x, i^*_x \mathcal{N}_q) = \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$. Finalement on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0_Z(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow H^0_Z(X, \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow \bigoplus_{x \in Z} \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow$$

$$H^1_Z(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow H^1_Z(X, \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow 0$$

et si $p > 1$ les isomorphismes :

$$H^p_Z(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} H^p_Z(X, \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}).$$

Montrons que $H^0_Z(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) = H^0_Z(X, \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}) = H^1_Z(X, \tilde{\pi}_q G(-) \otimes \mathbf{Q}) = 0.$

En effet considérons la suite exacte [SGA 4]

$$0\longrightarrow i_*i^!\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow j_*j^*\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow i_*R^1i^!\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow 0.$$

Un calcul de la fibre du morphisme $\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow j_*j^*\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q}$ aux points fermés de X montre que ce dernier est un isomorphisme. Ainsi on a

$$i_*i^!\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q}=i_*R^1i^!\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q}=0.$$

En particulier

$$H^p_{et}(X,i_*i^!\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q})=H^p_{et}(X,i_*R^1i^!\tilde{\pi}_qG(-)\otimes\mathbf{Q})=0\quad\text{pour tout } p\geq 0.$$

On a donc par la suite spectrale d'hypercohomologie à support, les relations anoncées.

Finalement on obtient un isomorphisme $\bigoplus_{x\in Z}\pi_{q-1}F(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}=H^1_Z(X,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})$.

La suite exacte longue de cohomologie à support appliquée au faisceau $\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q}$ s'écrit

$$0\longrightarrow H^0_{et}(X,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow H^0_{et}(U,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow\bigoplus_{x\in Z}\pi_{q-1}F(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}$$

$$\longrightarrow H^1_{et}(X,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow H^1_{et}(U,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow.$$

Identifions U à un ouvert de $Y=Spec(\mathbf{C}[T])$. La suite exacte précédente avec X remplacé par Y donne

$$0\longrightarrow H^0_{et}(Y,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow H^0_{et}(U,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow\bigoplus_{x\in Z'}\pi_{q-1}F(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow$$

$$H^1_{et}(Y,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow H^1_{et}(U,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow.$$

D'après (3.3.3)*i)* et (3.2.1) on a la suite exacte

$$0\longrightarrow H^1_{et}(Y,\tilde{\pi}_{q+1}F(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow\pi_qF(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow H^0_{et}(Y,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow 0$$

La flèche $\pi_qF(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow H^0_{et}(Y,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})$ s'identifie à

$$H^0_{et}(Y,\tilde{\pi}_qF(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow H^0_{et}(Y,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})$$

induite par le morphisme du faisceaux constant $\tilde{\pi}_qF(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}$ vers le faisceau $\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q}$. Or ce morphisme est un monomorphisme comme on le voie immédiatement en passant aux fibres en les points fermés. La surjection $\pi_qF(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow H^0_{et}(Y,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})$ est donc une bijection. En particulier $H^1_{et}(Y,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})=0$. On a alors

$$0\longrightarrow\pi_qF(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow H^0_{et}(U,\tilde{\pi}_qF(-)\otimes\mathbf{Q})\longrightarrow\bigoplus_{x\in Z'}\pi_{q-1}F(\mathbf{C})\otimes\mathbf{Q}\longrightarrow 0.$$

D'après (3.3.1), [20] et cette suite exacte, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \pi_q F(U) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in Z'} \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & H^0_{et}(U, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in Z'} \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On en déduit que le morphisme $\pi_q F(U) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^0_{et}(U, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}$ est un isomorphisme et que $H^1_{et}(U, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q} = 0$ en vertu de (3.2.1) et de (3.3.3) i). Ceci achève la démonstration de (3.3.3).

(3.3.4) Soit $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, avec les notations de (3.3.3) on peut choisir Z réduit à un point, et donc $Z' = \emptyset$. On obtient alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^1_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow 0.$$

Faisant intervenir le faisceau constant de valeur $\pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$ on voit que le morphisme $H^0_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$ est surjectif. On a ainsi des isomorphismes canoniques

$$H^0_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) = \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$$

$$H^1_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q}) = \pi_{q-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}.$$

D'après (3.3.3) i) on a donc la suite exacte

(3.3.5) $$0 \longrightarrow \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_q \mathbf{H}^\bullet(X, F(-) \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow 0.$$

On retrouve ainsi la K-théorie du projectif non commutatif [23] où le terme de droite

$$\pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} = H^0_{et}(X, \tilde{\pi}_q F(-) \otimes \mathbf{Q})$$

est le facteur trivial, et le terme de gauche

$$\pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} = H^1_{et}(X, \tilde{\pi}_{q+1} F(-) \otimes \mathbf{Q})$$

le facteur non trivial. De plus cette suite exacte est scindée.

(3.3.6) *Remarque.* – (Du referee) La suite exacte longue de Mayer-Vietoris, jointe à (3.3.1) et à la suite fondamentale de la K-théorie algébrique donne immédiatement (3.3.5).

(3.4.1) Soit M une variété différentiable avec ou sans bord, et considérons le préfaisceau de spectres G^{top} construit dans l'appendice. Il possède les deux propriétés suivantes:

(3.4.2) LEMME. – *Soit M compacte.*

i) *Le morphisme canonique*

$$G^{top}(M) \longrightarrow \mathbf{H}^{\bullet}_{an}(M, G)$$

est une équivalence faible.

ii) *On a des isomorphismes canoniques* $\pi_q G^{top}(M) = K_q^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)\widehat{\otimes}_{\pi}\mathcal{C}^{\infty}(M))$.

Preuve. – Elle est faite en Appendice.

(3.4.3) Rappelons que les hypercohomologies ne dépendent que des faisceaux de spectres associés [28], et que d'après le théorème des fonctions implicites, le morphisme naturel de sites de celui des espaces étalés au dessus de X^{an} vers le site des ouverts de X^{an} induit un isomorphisme de topos par lequel nous les identifierons.

Notons $\varepsilon : X^{an} \longrightarrow X_{et}$ le morphisme naturel de sites [SGA 4] et aussi des topos associés. Par adjonction on a un morphisme de préfaisceaux [28]

$$F \longrightarrow \mathbf{R}^{\bullet}\varepsilon_* \varepsilon^{-1} F$$

d'où les flèches où la seconde est une équivalence faible d'après [28, 1.56] :

$$\mathbf{H}^{\bullet}_{et}(X, F\langle 0\rangle \otimes \mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{H}^{\bullet}_{et}(X, \mathbf{R}^{\bullet}\varepsilon_*\varepsilon^{-1}F \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) \xleftarrow{\sim} \mathbf{H}^{\bullet}(X^{an}, \varepsilon^{-1}F\langle 0\rangle \otimes \mathbf{Q}).$$

Composant avec le morphisme naturel de préfaisceaux

$$\varepsilon^{-1}F \longrightarrow G^{top}.$$

on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{H}^{\bullet}_{et}(X, F \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{top}(X^{an}) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{H}^{\bullet}_{an}(X, G^{top} \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) \end{array}$$

Soit $X := Spec(\mathbf{C}[T, T^{-1}])$, $Y := Spec(\mathbf{C}[T])$, $D \hookrightarrow Y^{an}$ l'inclusion du disque fermé unité, et S son bord. La fonctorialité de la suite exacte de Mayer-Vietoris fournit le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_q \mathbf{H}^{\bullet}_{et}(X, F(-) \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) & \longrightarrow & \pi_{q-1}\mathbf{H}^{\bullet}_{et}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), F(-) \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_q \mathbf{H}^{\bullet}(S, G^{top}(-) \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) & \longrightarrow & \pi_{q-1}\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}, G^{top}(-) \otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) \end{array} \tag{3.4.4}$$

Compte tenu de (3.3.1) et (3.4.2) ce diagramme devient pour $q < 0$

(3.4.5)
$$\begin{array}{ccc} \pi_q F(X)\otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \pi_{q-1}\mathbf{H}^\bullet_{et}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), F(-)\otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_q G^{top}(S)\otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \pi_{q-1}G^{top}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an})\otimes \mathbf{Q}. \end{array}$$

Dans ce diagramme le facteur $\pi_{q-1}F(\mathbf{C})\otimes \mathbf{Q}$ de $\pi_q F(X)\otimes \mathbf{Q}$ s'identifie par (3.3.5) au facteur $H^1_{et}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \tilde{\pi}_q F(-)\otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle)$ de $\pi_{q-1}\mathbf{H}^\bullet_{et}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), F(-)\otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle)$. De même d'après l'apendice, le facteur $\pi_{q+1}G^{top}(\mathbf{C})\otimes \mathbf{Q}$ de $\pi_q G^{top}(S)\otimes \mathbf{Q}$ s'identifie au facteur $H^2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}, \tilde{\pi}_{q+1}G^{top}(-)\otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle)$ de

$$\pi_{q-1}\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}, G^{top}(-)\otimes \mathbf{Q}\langle 0\rangle) = \pi_{q-1}G^{top}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an})\otimes \mathbf{Q}.$$

Par fonctorialitée de la suite spectrale du passage du local au global, la flèche verticale de droite envoie donc le facteur non trivial $\pi_{q-1}F(\mathbf{C})\otimes \mathbf{Q}$ dans le facteur $\pi_{q+1}G^{top}(\mathbf{C})\otimes \mathbf{Q}$ par un morphisme que nous désignerons α_{q-1}. La périodicité de Bott topologique montre aussi tôt que l'on a

(3.4.6) $$\alpha_{q-1} = \beta_2^{top} \cup i_{q-1}$$

où $i_{q-1} : \pi_{q-1}F(\mathbf{C})\otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_{q-1}G^{top}(\mathbf{C})\otimes \mathbf{Q}$ désigne le morphisme canonique de la KH-théorie vers la K-théorie topologique, et β_2^{top} l'élément de Bott dans $K_2^{top}(\mathcal{K}_{-\infty})$.

4. Fin de la démonstration du théorème 3

Les notations du paragraphe précédent restent en vigueur.

Dans [17], M.Karoubi établit les faits suivants :

(4.1.1) *Si A est une algèbre de Fréchet complexe, stable par calcul fonctionnel holomorphe, le morphisme $K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ est un isomorphisme pour $i = 0$ et un monomorphisme pour $i = -1$.*

(4.1.2) *Le morphisme*

$$K_{-2}(\mathcal{K}_{-\infty}) \longrightarrow K_{-2}^{top}(\mathcal{K}_{-\infty})$$

est surjectif

(4.1.3) *Pour tout entier $n > 1$ les morphismes*

$$K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(A), \mathbf{Z}/n) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A), \mathbf{Z}/n)$$

sont des isomorphismes pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Achevons maintenant la preuve du théorème 3

Soit $K_i^{rel}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ le i-ième groupe d'homotopie de la fibre homotopique de

$$KH(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \longrightarrow K^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)).$$

D'après (4.1.3), les groupes $K_i^{rel}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ sont uniquement divisibles pour tout $i \in \mathbf{Z}$. D'autre part le lemme (4.1.4) ci dessous montre alors que $K_i^{rel}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) = 0$ pour $i \leq 0$, d'où le théorème.

Remarque. – On peut aussi, ce qui revient essentiellement au même utiliser un argument de carrés arithmétiques [4], [5], appliqué à la flèche

$$KH(\mathcal{K}_{-\infty}(A))\langle 0\rangle \longrightarrow K^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))\langle 0\rangle.$$

Reste à prouver le :

(4.1.4) LEMME. – *Le morphisme* $KH_q(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow K_q^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \otimes \mathbf{Q}$ *est un isomorphisme pour tout* $q \leq 0$ *et surjectif pour* $q = 1$.

Preuve. – Rappellons tout d'abord que *la K-théorie homotopique étant excisive on dispose sur celle-ci d'un cup produit sans aucune restriction sur les degrés*. En vertu de (4.1.2), choisissons un élément $\beta_{-2} \in K_{-2}(\mathcal{K}_{-\infty})$ au-dessus de l'élément de Bott $\beta_{-2}^{top} \in K_{-2}^{top}(\mathcal{K}_{-\infty})$. La démonstration se fait par induction déscendente sur q.

Pour $q = 1$, c'est trivial, et pour $q = 0$ c'est énoncé dans (4.1.1).

Considérons le diagramme commutatif pour $j \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\beta_{-2}^j} & \pi_{q-2j} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_q G^{top}(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\beta_{-2}^{top j}} & \pi_{q-2j} G^{top}(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \end{array}$$

Le morphisme $\pi_1 F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_1 G^{top}(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$ s'identifie au morphisme $KV_1(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow K_1^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)) \otimes \mathbf{Q}$ et est donc surjectif. Ainsi faisant $q = 1$ et $q = 0$ dans le diagramme précédent, compte tenu de (4.1.1) et de la périodicité de Bott topologique, *le morphisme* $\pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_q G^{top}(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$ *est surjectif pour tout* $q \leq 0$ *et un isomorphisme pour* $q = 0, -1$. Soit $j < 0$, et supposons que le morphisme $i_q : \pi_q F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_q G^{top}(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$ soit un isomorphisme pour tout q tel que $0 \geq q \geq j$. Par (3.4.5) il suffit de voir que α_{j-1} est injectif.

Le diagramme (3.4.5) montre que α_{j-1} est le morphisme induit sur les facteurs correspondants du morphisme $\pi_j F(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j G^{top}(S) \otimes \mathbf{Q}$. Soit $\mathcal{A}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions continues sur le cercle S, analytiques réelles sur $S - \{1\}$ et à coefficients complexes. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal de $\mathcal{A}$ des fonctions s'annullant au point 1. On obtient un scindage cannonique $\pi_j F(\mathcal{A}) = \pi_j F(\mathfrak{m}) \oplus \pi_j F(\mathbf{C})$.

Dans Y^{an} désignons par L l'intervalle $[-1,1]$ et désignons par $f : Y^{an} \longrightarrow X^{an}$ le morphisme $f(z) := -e^{\pi i z}$. Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre des fonctions continues sur L, analytiques réelles à coefficients complexe sur $]-1,1[$ et s'annulant en 1. Les algèbres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont munies de leur structure d'algèbres de Fréchet et $\mathfrak{m}$ est un idéal fermé de ses deux algèbres, le morphisme f identifiant $\mathfrak{m}$ à l'idéal des fonctions de $\mathcal{B}$ s'annulant au point -1 de L. Le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes \mathfrak{m} & \longrightarrow & \mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{K}_{-\infty}(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_{-\infty}(A) \widehat{\otimes}_\pi \mathfrak{m} & \longrightarrow & \mathcal{K}_{-\infty}(A) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{K}_{-\infty}(A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\rightarrow & \pi_i F(\mathbf{C}) & \rightarrow & \pi_{i-1} F(\mathfrak{m}) & \rightarrow & \pi_{i-1} F(\mathcal{B}) & \rightarrow & \pi_{i-1} F(\mathbf{C}) & \rightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\rightarrow & \pi_i G^{top}(\mathbf{C}) & \rightarrow & \pi_{i-1} G^{top}(\mathfrak{m}) & \rightarrow & \pi_{i-1} G^{top}(\mathcal{B}) & \rightarrow & \pi_{i-1} G^{top}(\mathbf{C}) & \rightarrow
\end{array}$$

L'algèbre $\mathcal{B}$ étant contractile, on a $\pi_i G^{top}(\mathcal{B}) = 0$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Comme $\pi_i F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_i G^{top}(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$ est un isomorphisme pour $0 \geq i \geq j$, on en déduit un isomorphisme cannonique $\pi_j F(\mathfrak{m}) \otimes \mathbf{Q} = \pi_{j+1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \oplus \pi_j F(\mathcal{B}) \otimes \mathbf{Q}$. Finalement le morphisme $\pi_j F(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F(\mathcal{A}) \otimes \mathbf{Q}$ s'identifie à un morphisme

$$\pi_j F(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow (\pi_{j+1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \oplus \pi_j F(\mathcal{B}) \otimes \mathbf{Q}) \oplus \pi_j F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}. \tag{4.1.5}$$

De plus il est immédiat que ce morphisme est compatible au scindage $\pi_j F(\dot{X}) = \pi_{j-1} F(\mathbf{C}) \oplus \pi_j F(\mathbf{C})$, car le facteur $\pi_{j-1} F(\mathbf{C})$ s'identifie cannoniquement à $\pi_{j-1} F(I)$ où I est l'idéal des fonctions régulières sur X s'annulant pour $T = 1$, et nôtre assertion revient à affirmer que le morphisme $\pi_j F(X) \longrightarrow \pi_j F(\mathcal{A})$ est compatible aux scindages $\pi_j F(X) = \pi_j F(I) \oplus \pi_j F(\mathbf{C})$ et $\pi_j F(\mathcal{A}) = \pi_j F(\mathfrak{m}) \oplus \pi_j F(\mathbf{C})$, et le *morphisme induit sur le second facteur est l'identité*.

Désignons par $\gamma : \pi_{j-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F(\mathfrak{m}) \otimes \mathbf{Q} = \pi_{j+1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \oplus \pi_j F(\mathcal{B}) \otimes \mathbf{Q}$ le morphisme induit sur les premiers facteurs de (4.1.5). Soient γ_1 et γ_2 les morphismes coordonneés de γ. Faisant intervenir les algèbres $\mathcal{C}(S)$ et $\mathcal{C}(L)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur le cercle S et le segment L respectivement et la fonctorialité du morphisme $F \longrightarrow G^{top}$ on montre immédiatement la relation $i_{j+1}\gamma_1 = \alpha_{j-1}$. Comme i_{j+1} est un monomorphisme, pour prouver que α_{j-1} est injective, il suffit de prouver que γ_1 est injective. Pour celà il suffit d'établir le lemme suivant :

(4.2.1) LEMME. – i) *Le morphisme (4.1.5)* $\pi_j F(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F(\mathcal{A}) \otimes \mathbf{Q}$ *est un monomorphisme.*

ii) *le morphisme* $\gamma_2 : \pi_{j-1} F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F(\mathcal{B}) \otimes \mathbf{Q}$ *est nul pour* $j < 0$.

Preuve. – Démontrons i). Désignons par $R(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X *i.e.* $\mathbf{C}(T)$, et par $R(\mathcal{A})$ le corps des quotients de l'anneau intègre $\mathcal{A}$. Considérons le diagramme commutatif pour $i \leq 0$

$$\begin{array}{ccc} \pi_i F(X) & \longrightarrow & \pi_i F(\mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_i F(R(X)) & \longrightarrow & \pi_i F(R(\mathcal{A})) \end{array}$$

D'après [20], la flèche verticale de gauche est injective. Il suffit donc de prouver que la flèche horizontale du bas est injective rationnellement. Pour cela il suffit d'établir le lemme suivant:

(4.2.2) LEMME. – *Soit* $L \longrightarrow L'$ *une extension de corps au dessus de* $\mathbf{C}$. *Le morphisme*

$$\pi_i F(L) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_i F(L') \otimes \mathbf{Q}$$

induit en K*-théorie est injectif pour tout* $i \in \mathbf{Z}$.

Preuve. – Une extension de corps se décompose en une extension trancendente pure et une extension algébrique. Une extension trancendente pure (resp. algébrique) étant une limite inductive filtrante d'extensions trancendentes pures finies (resp. d'extensions algébriques de degré fini), on est ramené à examiner uniquement les cas suivants

i) $L' = L(T)$

ii) L' est une extension algébrique de degré fini.

iii) est immédiat en vertu de la formule de projection. De plus une adaptation immédiate de la preuve de [20 Corollary 1.5] montre *i).* Ceci établit le *i)* du lemme (4.2.1).

Montrons le ii) de (4.2.1).

Soit $\widehat{\mathcal{O}}$ l'anneau des séries formelles $\mathbf{C}[[z]]$. L'endomorphisme $\mu : z \mapsto z^2$ de $\widehat{\mathcal{O}}$, définit sur $\widehat{\mathcal{O}}$ une structure de $\widehat{\mathcal{O}}$-module libre de rang 2. D'où la relation

$$\mu_* \mu^* = 2 \tag{4.2.3}$$

(4.2.4) LEMME. – *L'endomorphisme* μ^* *de* $\pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}) \otimes \mathbf{Q}$ *est un isomorphisme pour tout* $j \in \mathbf{Z}$.

Preuve. – Soit $\widehat{\mathcal{O}}_n := \widehat{\mathcal{O}}[z^{1/2^n}]$. Posons $\widehat{\mathcal{O}}_0 := \widehat{\mathcal{O}}$. Désignons par J_n l'idéal $(X^2 - z^{1/2^n})$ de $\widehat{\mathcal{O}}_n[X]$. L'anneau $\widehat{\mathcal{O}}_{n+1}$ s'identifie canoniquement à $\widehat{\mathcal{O}}_n[X]/J_n$ où pour $n = 0$ il faut interpréter $z^{1/2^n}$ comme étant z. Enfin désignons par $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$ la réunion de cette suite croissante d'anneaux. Pour tout entier $p \geq 0$ et tout entier $n > 0$, posons $(z^p)^{1/2n} := (z^{1/2n})^p$. On vérifie aussitôt que ces choix sont cohérents.

(4.2.5) *Montrons que le morphisme d'inclusion* $i_n : \widehat{\mathcal{O}}_n \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{n+1}$ *induit un isomorphisme* $i_n^* : \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_n) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_{n+1}) \otimes \mathbf{Q}$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$ et tout $n \geq 0$.

Considérons la suite exacte définissant l'idéal J_n

$$0 \longrightarrow J_n \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_n[X] \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{n+1} \longrightarrow 0.$$

La flèche $\pi_* F(\widehat{\mathcal{O}}_n) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_* F(\widehat{\mathcal{O}}_{n+1}) \otimes \mathbf{Q}$ est injective car $i_{n*} i_n^* = 2$. On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_n) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_{n+1}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_{j-1} F(J_n) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow 0. \tag{4.2.6}$$

Il reste à voir que $\pi_* F(J_n) \otimes \mathbf{Q} = 0$.

Fixons $n \geq 0$, et pour tout $k \geq 0$ considérons le diagramme commutatif d'algèbres à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J_n \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{O}}_n[X] \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{O}}_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & J_{n+k} \arrow[r] & \widehat{\mathcal{O}}_{n+k}[X] \arrow[r] & \widehat{\mathcal{O}}_{n+k+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont $X \mapsto X^{2^k}$. La flèche verticale de droite est donc l'inclusion canonique. Appliquant le foncteur $\pi_* F(-) \otimes \mathbf{Q}$ à ce diagramme, l'invariance par homotopie algébrique montre que la flèche du millieux induit l'inclusion canonique. On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_n) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[d, "i_{n,k}"'] & \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_{n+1}) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[d, "i_{n+1,k}"'] & {} \\
0 \arrow[r] & \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_{n+k}) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] & \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_{n+k+1}) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} \tag{4.2.7}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_{j-1} F(J_n) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[d, "X \mapsto X^{2^k}"'] & 0 \\
{} \arrow[r] & \pi_{j-1} F(J_{n+k}) \otimes \mathbf{Q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les $i_{n,k}$ désignent les morphismes induits par les inclusions canoniques. Passant à la limite inductive sur k dans ce diagramme, on voie qu'il suffit de prouver que les morphismes $\pi_*F(J_n) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_*F(J_{n+k}) \otimes \mathbf{Q}$ induits par $X \mapsto X^{2^k} : J_n \longrightarrow J_{n+k}$ sont injectifs. Pour cela il suffit de voir que le morphisme $X \mapsto X^{2^k} : J_n \longrightarrow (X^2 - z^{1/2^{n+k}})\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]$ induit une injection $\pi_*F(J_n) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_*F((X^2 - z^{1/2^{n+k}})\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]) \otimes \mathbf{Q}$. Or ce dernier morphisme est le composé

a) de celui induit $\pi_*F(J_n)\widehat{\mathcal{O}}_n[X]) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_*F((X^2 - z^{1/2^n})\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]) \otimes \mathbf{Q}$ par l'inclusion canonique,

et

b) de celui induit $\pi_*F((X^2 - z^{1/2^n})\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_*F((X^2 - z^{1/2^{n+k}})\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]) \otimes \mathbf{Q}$ par $X \mapsto X^{2^k}$.

Il suffit donc de voir que chacun d'eux est une injection.

Montrons a). Pour tout entier $p > 0$, désignons par

$\alpha : J_p \longrightarrow (X^2 - z^{1/2^p})\widehat{\mathcal{O}}_{p+1}[X]$ l'inclusion canonique d'algèbres. Il suffit de prouver que le morphisme induit $\alpha^* : \pi_*F(J_p) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_*F((X^2 - z^{1/2^p})\widehat{\mathcal{O}}_{p+1}[X]) \otimes \mathbf{Q}$ est injectif.

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_*F(J_p) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\alpha^*} & \pi_*F((X^2 - z^{1/2^p})\widehat{\mathcal{O}}_{p+1}[X]) \otimes \mathbf{Q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_*F((X^2 - z^{1/2^{p-1}})\widehat{\mathcal{O}}_p[X]) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \pi_*F((X^2 - z^{1/2^{p-1}})\widehat{\mathcal{O}}_p[X]) \otimes \mathbf{Q}
\end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par $z \mapsto z^2$, et la flèche horizontale du bas est l'identité. Il suffit de prouver l'injectivité de la flèche verticale de gauche.

Soit $\phi : J_p \longrightarrow M_2(J_p)$ le morphisme définit par

$$\phi(z^{1/2^p}) = \begin{pmatrix} 0 & z^{1/2^p} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

Le morphisme composé $\phi(z \mapsto z^2)$ est le morphisme diagonal

$$\delta : (X^2 - z^{1/2^p})\widehat{\mathcal{O}}_p[X] \longrightarrow M_2((X^2 - z^{1/2^p})\widehat{\mathcal{O}}_p[X]).$$

On a donc en K-théorie $\phi^*(z \mapsto z^2)^* = 2$, ce qui prouve l'assertion en passant à la limite inductive.

Montrons b). Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes
(4.2.8)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)\otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]/(X^2-z^{1/2^n}))\otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)\otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]/(X^2-z^{1/2^{n+k}}))\otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \longrightarrow & \pi_{j-1} F((X^2-z^{1/2^n})\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X])\otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & 0 \\ & {\scriptstyle X\mapsto X^{2^k}}\downarrow & & \\ \longrightarrow & \pi_{j-1} F((X^2-z^{1/2^{n+k}})\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X])\otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont induits par $X \mapsto X^{2^k}$. Celui de gauche n'est autre que l'identitée par invariance par homotopie. Les polynômes $X^2 - z^{1/2^n}$ et $X^2 - z^{1/2^{n+k}}$ se scindent en facteurs linéaires dans $\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]$. Ces factorisations donnent des identifications de $\pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]/(X^2 - z^{1/2^n}))\otimes \mathbf{Q}$ et $\pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty[X]/(X^2 - z^{1/2^{n+k}}))\otimes \mathbf{Q}$ avec $\pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)\otimes \mathbf{Q} \oplus \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)\otimes \mathbf{Q}$. Dans ces identifications un simple calcul montre que la flèche verticale du centre s'identifie à l'identité, donc est un isomorphisme. Ceci prouve b) et finalement (4.2.5).

Remarquons qu'à un changement de notations près, la démonstration précédente de (4.2.5) reste valable pour $n = 0$. Passant à la limite inductive filtrante sur k pour les isomorphismes $i_{n,k}$ de (4.2.7) on a que l'inclusion $\widehat{\mathcal{O}}\longrightarrow\widehat{\mathcal{O}}_\infty$ induit un isomorphisme $\pi_* F(\widehat{\mathcal{O}})\otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \pi_* F(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)\otimes \mathbf{Q}$. Or $z \mapsto z^2$ est un automorphisme de $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$, donc l'endomorphisme $z \mapsto z^2$ de $\widehat{\mathcal{O}}$ induit un automorphisme de $\pi_* F(\widehat{\mathcal{O}})\otimes \mathbf{Q}$. Ce qui prouve (4.2.4).

Soit $\mathcal{O}^{an}(D)$ l'algèbre des germes de fonctions analytiques complexes au voisinage du disque unité fermé D de Y^{an}.

(4.2.9) LEMME. – *L'inclusion* $\mathcal{O}^{an}(D) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}$ *induit un monomorphisme*

$$\pi_j F(\mathcal{O}^{an}(D))\otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F(\widehat{\mathcal{O}})\otimes \mathbf{Q}.$$

Preuve. – Le corps des fractions $R(\widehat{\mathcal{O}}) = \widehat{\mathcal{O}}[z^{-1}]$ est une extension du corps des fractions $R(\mathcal{O}^{an}(D))$. D'après (4.2.2), il suffit donc de prouver que le morphisme canonique $\pi_j F(\mathcal{O}^{an}(D)) \longrightarrow \pi_j F(R(\mathcal{O}^{an}(D)))$ est injectif. Le disque D étant compact, le corps $R(\mathcal{O}^{an}(D)))$ des germes en D des fonctions méromorphes n'est autre que le localisé de

$\mathcal{O}^{an}(D)$ sur la partie multiplicative S constituée des polynômes non nuls. Ainsi $R(\mathcal{O}^{an}(D))$ est la limite inductive filtrante $\varinjlim_f \mathcal{O}^{an}(D)\left[\frac{1}{f}\right]$, où f parcours l'ensemble des polynômes non nuls. Il suffit donc si f est un tel polynôme de prouver que le morphisme

$$\pi_j F(\mathcal{O}^{an}(D)) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F\left(\mathcal{O}^{an}(D)\left[\frac{1}{f}\right]\right) \otimes \mathbf{Q}$$

est injectif.

Par excision on peux remplacer $\mathcal{K}_{-\infty}(A)$ par son unitarisée B sur $\mathbf{C}$. Changeant de notation, désignons par S la partie multiplicative engendrée par l'élément central $1 \otimes f$ de l'algèbre $B \otimes \mathcal{O}^{an}(D)$. Posons $\mathcal{O}(Z) := \mathcal{O}^{an}(D)/(f)$, et désignons par $i : B \otimes \mathcal{O}^{an}(D) \longrightarrow B \otimes \mathcal{O}(Z)$ le morphisme de passage au quotient. Il suffit alors de montrer les deux assertions suivantes

i) Le foncteur i_* de la catégorie $\mathbf{P}(B \otimes \mathcal{O}(Z))$ des $B \otimes \mathcal{O}(Z)$-modules projectifs dans celle des $B \otimes \mathcal{O}^{an}(D)$-modules induit un isomorphisme $KH_*(B \otimes \mathcal{O}(Z)) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} KH(\mathbf{H}_S) \otimes \mathbf{Q}$.

ii) Le morphisme $K_j(B \otimes \mathcal{O}(Z)) \longrightarrow K_j(B \otimes \mathcal{O}^{an}(D))$ est nul.

Démontrons i). Que le foncteur pleinement fidèle i_* arrive dans $\mathbf{H}_S$, est une conséquence de la résolution libre de $\mathcal{O}^{an}(D)$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{an}(D) \xrightarrow{f} \mathcal{O}^{an}(D) \longrightarrow \mathcal{O}(Z) \longrightarrow 0. \tag{4.2.10}$$

Le reste de la démonstration suit pas à pas celle de (3.2.3).

Démontrons ii). L'algèbre B ne jouant aucun rôle, quitte à prendre une suspension convenable de B il suffit de traiter le cas $j = 0$ puisque $j \leq 0$. Si P est un $B \otimes \mathcal{O}(Z)$-module projectif de type finit son image dans $K_0(B \otimes \mathcal{O}^{an}(D))$ n'est autre d'après (4.2.10) que la classe $[P \otimes_{\mathcal{O}(Z)} \mathcal{O}^{an}(D)] - [P \otimes_{\mathcal{O}(Z)} \mathcal{O}^{an}(D)] = 0$. Ceci achève la preuve de (4.2.9).

(4.2.11) Lemme. – *L'automorphisme $z \mapsto -z$ de Y^{an} induit l'identité sur*

$$\pi_j F(\mathcal{O}^{an}(D)) \otimes \mathbf{Q}.$$

Preuve. – Notons ν^* l'automorphisme de $\pi_j F(\widehat{\mathcal{O}}) \otimes \mathbf{Q}$ induit par $\nu : z \mapsto -z$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \widehat{\mathcal{O}} \arrow[dl, "z \mapsto z^2"'] \arrow[dr, "z \mapsto z^2"] & \\ \widehat{\mathcal{O}} \arrow[rr, "\nu"] & & \widehat{\mathcal{O}} \end{tikzcd}$$

donne en K-théorie la relation

(4.2.12)

On a alors en vertu de (4.2.12) et (4.2.4) $\nu^* = id$. Ce qui prouve (4.2.11).

Nous pouvons démontrer maintenant (4.2.1) ii).

Désignons par $\mathfrak{m}^{an}$ l'idéal des germes de $\mathcal{O}^{an}(D)$ qui s'annulent au point 1. Il est clair que l'on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \pi_{j-1}F(\mathbf{C}) & & \gamma_2 \\ \downarrow & \searrow & \\ \pi_j F(\mathfrak{m}^{an}) & \longrightarrow & \pi_j F(\mathcal{B}) \end{array}$$

Le groupe $\pi_j F(\mathfrak{m}^{an})$ est un facteur direct de $\pi_j F(\mathcal{O}^{an}(D))$, pour démontrer l'assertion il suffit donc de prouver que le morphisme $\gamma' : \pi_{j-1}F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F(\mathcal{O}^{an}(D)) \otimes \mathbf{Q}$ est nul. Considérons toujours $f : Y^{an} \longrightarrow X^{an}$ le morphisme $z \mapsto -e^{\pi i z}$. Si par abus, nous notons $f^* : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}^{an}(D)$ le morphisme d'algèbres, qui à une fonction régulière F, associe le germe sur D de la fonction analytique $F \circ f$, le morphisme obtenu $f^* : \pi_j F(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \pi_j F(\mathcal{O}^{an}(D)) \otimes \mathbf{Q}$ induit sur le facteur $\pi_{j-1}F(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}$ le morphisme γ' ci-dessus. Le diagramme commutatif d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{T \mapsto T^{-1}} & \mathcal{O}(X) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow \\ \mathcal{O}^{an}(D) & \xrightarrow{z \mapsto -z} & \mathcal{O}^{an}(D) \end{array}$$

induit donc la relation $-\gamma' = \gamma'$ en K-théorie vu (4.2.11), car l'automorphisme $T \mapsto T^{-1}$ induit $-id$ sur le facteur $\pi_{j-1}F(\mathbf{C})$ de $\pi_{j-1}F(X)$. Ceci démontre ii) de (4.2.1) et par là-même (4.1.4).

5. Cas des idéaux de Schatten

(5.1.1) PROPOSITION. – i) *Soient A une algèbre de Fréchet complexe stable par calcul fonctionnel holomorphe et R une $\mathbf{C}$-algèbre. L'algèbre $(\mathcal{K}\widehat{\otimes}_\pi A) \otimes R$ est K_n-régulière pour tout $n \leq 0$.*

ii) *Si A est une C^*-algèbre alors l'algèbre $\mathcal{K}\tilde{\otimes}A$ est K_n-régulière pour tout $n \in \mathbf{Z}$*

Soit $n \leq 0$. Désignons par F le foncteur additif suivant $B \mapsto K_n(((\mathcal{K}\tilde{\otimes}B)\widehat{\otimes}_\pi A) \otimes R)$ de la catégorie des C^*-algèbres dans celle des groupes abéliens. Montrons que F est un invariant d'homotopie continue. Pour celà en vertu de [13 Theorem 3.2.2] il suffit de prouver qu'il est fonctionnellement stable, *i.e.* que le morphisme $B \longrightarrow \mathcal{K}\tilde{\otimes}B$ induit un isomorphisme $F(B) \xrightarrow{\sim} F(\mathcal{K}\tilde{\otimes}B)$, ce qui est évident, et que d'autre part il est semi-exact. Or ceci est clair, car si

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

est une suite exacte scindée. La C^*-algèbre $\mathcal{K}$ étant nucléaire, on a une suite exacte scindée de C^*-algèbres

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \widetilde{\otimes} I \longrightarrow \mathcal{K} \widetilde{\otimes} B \longrightarrow \mathcal{K} \widetilde{\otimes} C \longrightarrow 0$$

En particulier cette suite est scindée en tant que suite exacte courte d'espaces vectoriels topologiques. On a donc la suite exacte *courte* d'algèbres de Fréchet

$$0 \longrightarrow (\mathcal{K} \widetilde{\otimes} I) \widehat{\otimes}_\pi A \longrightarrow (\mathcal{K} \widetilde{\otimes} B) \widehat{\otimes}_\pi A \longrightarrow (\mathcal{K} \widetilde{\otimes} C) \widehat{\otimes}_\pi A \longrightarrow 0$$

et finalement la suite exacte d'algèbres sur $\mathbf{C}$

$$0 \longrightarrow (\mathcal{K} \widetilde{\otimes} I) \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R \longrightarrow (\mathcal{K} \widetilde{\otimes} B) \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R \longrightarrow (\mathcal{K} \widetilde{\otimes} C) \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit que F est semi exact puisque K_n est excisif pour $n \leq 0$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_n(\mathcal{K} \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R[t]) \arrow[r] \arrow[d, "t=i"'] & K_n(\mathcal{K} \widetilde{\otimes} \mathcal{C}([0,1]) \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R) \arrow[dl, "v=i"] \\
K_n(\mathcal{K} \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R) &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{C}([0,1])$ désigne la C^*-algèbre des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, $v \in [0,1]$, $i = 0, 1$ et la flèche horizontale est celle induite par l'inclusion canonique $\mathcal{K} \otimes R[t] \longrightarrow (\mathcal{K} \widetilde{\otimes} \mathcal{C}([0,1])) \otimes R$. Comme $B \mapsto K_n((\mathcal{K} \widetilde{\otimes} B) \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R)$ est un invariant d'homotopie continue, les morphismes $v = 0$ et $v = 1$ induisent le même morphisme sur le K_n. *Il en est donc de même pour les morphismes* $K_n(\mathcal{K} \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R[t]) \longrightarrow K_n(\mathcal{K} \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R[t])$ *induits par* $t = 0$ *et* $t = 1$ en vertu de la commutativité de ce diagramme. Il suffit alors d'appliquer [26, Lemma 4.1] au foncteur $R \mapsto K_n(\mathcal{K} \widehat{\otimes}_\pi A \otimes R)$ pour terminer la preuve de *i*).

La démonstration de *ii*), se fait de même, mais utilise les isomorphismes

$$K_n(\mathcal{K} \widetilde{\otimes} A) = K_n^{top}(\mathcal{K} \widetilde{\otimes} A) \quad [25]$$

pour montrer que l'analogue du foncteur F est semi-exact.

(5.2.1) THÉORÈME 6. – *Soit A une algèbre de Fréchet complexe stable par calcul fonctionnel holomorphe, et R une* $\mathbf{C}$*-algèbre commutative. L'algèbre $(\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A) \otimes R$ est K_0-régulière pour tout $p \geq 1$.*

Preuve. – L'algèbre $\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A$ est topologiquement $\mathcal{K}_{-\infty}$-stable au sens de [17]. Il suffit donc de prouver le lemme plus général suivant :

(5.2.2) LEMME. – *Soit A une algèbre de Fréchet stable par calcul fonctionnel holomorphe. Si A est $\mathcal{K}_{-\infty}$-stable, alors A est K_0-régulière.*

Preuve. – Considérons le diagramme d'algèbres définissant la $\mathcal{K}_{-\infty}$-stabilité topologique [17] (définition 2.2. P. 121) dont nous adoptons les notations.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "j"'] & & A \arrow[d, "i"] \\ \mathcal{K}_{-\infty}(A) \arrow[r, "\phi"] & A \arrow[rr, "\theta"] & & M_2(A) \end{tikzcd} \tag{5.2.3}$$

On a immédiatement en passant aux anneaux de polynômes à coefficients dans R et à la K-théorie, que le morphisme

$$j^* : K_0(A \otimes R[t_1, \ldots, t_n]) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R[t_1, \ldots, t_n])$$

est un monomorphisme. En vertu du théorème 2, composant cette flèche avec celle induite par l'évaluation en $t_1 = \ldots t_n = 0$, on a un monomorphisme

$$K_0(A \otimes R[t_1, \ldots, t_n]) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}_{-\infty}(A) \otimes R).$$

Or ce dernier se factorise par la flèche $K_0(A \otimes R[t_1, \ldots, t_n]) \longrightarrow K_0(A \otimes R)$ d'évaluation en $t_1 = \ldots t_n = 0$. Ceci montre que la flèche d'évaluation $K_0(A \otimes R[t_1, \ldots, t_n]) \longrightarrow K_0(A \otimes R)$ est un monomorphisme, et donc un isomorphisme. Ce qui prouve le lemme.

En particulier si $\mathcal{L}^p$ est un idéal de Schatten et A de Fréchet stable par calcul fonctionnel holomorphe les groupes $KH_i(\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A)$ s'identifient aux groupes $K_i(\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A)$ de Bass pour $i \leq 0$ et aux groupes $KV_i(\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A)$ de Karoubi-Villamayor pour $i > 0$.

(5.3.1) THÉORÈME 7. – *Soit A une algèbre de Fréchet complexe stable par calcul fonctionnel holomorphe.*

i) *Les morphismes canoniques*

$$KH_i(\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A)$$

reliant la K-théorie homotopique à la K-théorie topologique sont des isomorphismes pour tout $i \in \mathbf{Z}$ pour tout $p > 1$.

ii) *Les morphismes canoniques*

$$K_i(\mathcal{L}^1 \widehat{\otimes}_\pi A) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{L}^1 \widehat{\otimes}_\pi A)$$

reliant la K-théorie algébrique à la K-théorie topologique sont des isomorphismes pour tout $i \leq 0$.

Preuve. – Démontrons i). La K-théorie homotopique est excisive, le cup-produit est donc défini sans aucune restriction sur les degrés. On en déduit par les méthodes de [17] que $KH_i(\mathcal{L}^p \widehat{\otimes}_\pi A)$ est 2-périodique. D'où la conclusion compte tenu des isomorphismes $KH_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)\xrightarrow{\sim}K_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)$ pour $i \leq 0$, et des isomorphismes [17] $K_i(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)\xrightarrow{\sim}K_i^{top}(\mathcal{L}^p\widehat{\otimes}_\pi A)$ pour $i \leq 1$. Ceci prouve i).

Démontrons ii). La K-théorie négative est Morita invariante pour les algèbres non nécessairement unifères. Le diagramme (5.2.3) montre en remplaant A par $\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A$ que le morphisme

$$j^* : K_i(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A)\longrightarrow K_i(\mathcal{K}_{-\infty}(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A))$$

est injectif pour $i \leq 0$. Compte tenu du Théorème 1 on en déduit que le morphisme

$$K_i(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A)\longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A)$$

est aussi injectif. Soit β_{-2} un élément de $K_{-2}(\mathcal{L}^1)$ au-dessus de l'élément de Bott β_{-2}^{top} de $K_{-2}^{top}(\mathcal{L}^1)$ [17]. Soit $n \leq 1$ et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_n(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A) & \xrightarrow{\cup\beta_{-2}^{i}} & K_{n-2i}(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_n^{top}(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A) & \xrightarrow{\cup\beta_{-2}^{top\,i}} & K_{n-2i}^{top}(\mathcal{L}^1\widehat{\otimes}_\pi A) \end{array} .$$

Pour $n = 0, 1$ la flèche de gauche est respectivement bijective et surjective. La périodicité de Bott en K-théorie topologique montre que celle de droite est surjective. C'est donc une bijection en vertu de ce qui précède. Ceci achève la démonstation.

APPENDICE

Soit M une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec ou sans bord, et A une algèbre de Fréchet stable par le calcul fonctionnel holomorphe. Cet appendice a pour objet de prouver l'existence d'un préfaisceau G^{top} de spectres vérifiant les conditions suivantes

i) *il est muni d'un morphisme* $KH(\mathcal{K}_{-\infty}(A)\widehat{\otimes}_\pi\mathcal{C}^\infty(V))\longrightarrow G^{top}(V)$ *fonctoriel en* V,

ii) G^{top} *est un invariant d'homotopie* $\mathcal{C}^\infty$,

iii) *si* M *est compacte, le morphisme* $G^{top}(M)\longrightarrow \mathbf{H}^\bullet(M, G^{top}(-))$ *est une équivalence faible,*

iv) *si* M *est compacte on a des isomorphismes canoniques*

$$\pi_i G^{top}(M)\xrightarrow{\sim}K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)\widehat{\otimes}_\pi\mathcal{C}^\infty(M)).$$

A.1. Construction de G^{top}

Le principe de la construction est celui de [27]. Désignons par $\mathcal{C}^\infty(\Delta^\bullet)$ l'algèbre de Fréchet simpliciale des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur le complexe cosimplicial standart. Soit $K\rangle 0\langle$ le revêtement 0-connexe du spectre de la K-théorie de Quillen. Considérons pour une algèbre de Fréchet quelconque B, le spectre :

$$K\rangle 0\langle^{Top}(B) := \mathbf{hocolim}(n \mapsto K\rangle 0\langle(B\widehat{\otimes}_\pi(\mathcal{C}^\infty(\Delta^n)))).$$

Il est immédiat que par construction $K\rangle 0\langle^{Top}$ est un invariant d'homotopie $\mathcal{C}^\infty$.

Si dans l'expression précédente nous remplaçons le spectre $K\rangle 0\langle$ par le spectre 0-connexe KV de K-théorie de Karoubi-Villamayor, on un autre spectre KV^{Top} et une équivalence faible $K\rangle 0\langle^{Top} \longrightarrow KV^{Top}$. Ceci montre la relation

$$\pi_i K\rangle 0\langle^{Top}(B) = \pi_{i-1} GL(B\widehat{\otimes}_\pi(\mathcal{C}^\infty(\Delta^\bullet)))$$

pour $i > 0$. Si de plus B est stable par le calcul fonctionnel holomorphe, le second membre s'identifie à $\pi_{i-1}GL^{top}(B)$ *i.e* à $K_i^{top}(B)$.

Désignons par S (resp. S^{top} le foncteur de suspension pour les algèbres (resp. le foncteur de suspension topologique pour les algèbres topologiques.) On a les flèches :

$$K\rangle 0\langle^{Top}(B) \longrightarrow \mathbf{hocolim}(n \mapsto \Omega^n K\rangle 0\langle(S^n(B\widehat{\otimes}_\pi(\mathcal{C}^\infty(\Delta^n)))))$$

$\longrightarrow \mathbf{hocolim}\Omega^n K\rangle 0\langle^{Top}(S^{n,top}B)$. Posons

$$K^{Top}(B) := \mathbf{hocolim}\Omega^n K\rangle 0\langle^{Top}(S^{n,top}B).$$

Ce foncteur vérifie les propriétées suivantes :

1.1 *Il est muni fonctoriellement d'une flèche* $KH(B) \longrightarrow K^{Top}(B)$.

1.2 *C'est un invariant d'homotopie* $\mathcal{C}^\infty$.

1.3 *Il vérifie l'exision pour les idéaux fermés et Mayer-Vietoris dans la catégorie des algèbres de Fréchet stables par le calcul fonctionnel holomorphe.*

1.4 *Si B est stable par le calcul fonctionel holomorphe,* $\pi_i K^{Top}(B) = K_i^{top}(B)$ *pour* $i \in \mathbf{Z}$.

1.2 et 1.4 sont clairs. 1.1 est conséqence du théorème de de Cartier-Eilenber-Zilberg [9]. 1.3 est une conséquence de 1.4.

A.2. Propriétées du préfaisceau G^{top}

Soit M une variétée $\mathcal{C}^\infty$. On pose pour toute partie localement fermée V de M

$$G^{top}(V) := K^{Top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{C}^\infty(V)).$$

Restreint au site des ouverts, on obtient un préfaisceau sur M que nous noterons aussi G^{top}.

Seule la propriété *iii)* reste à prouver. Soit M compacte. Le préfaisceau sur M ,$\mathbf{H}^\bullet(-,G^{top})$ vérifie Mayer-Vietoris. Appelons pour abréger, bon ouvert, un ouvert V contenant un rétracte d'homotopie $\mathcal{C}^\infty$ compact V'. La flèche $\pi_i G^{top}(V) \longrightarrow K_i^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A)\widehat{\otimes}_\pi \mathcal{C}^\infty(V'))$ est un isomorphisme en vertu de *ii)* et *iv)*. De même appelons bon recouvrement d'un bon ouvert W de M, un recouvrement de W par de bons ouverts U et V de sorte que $U' \cap V'$ soit un rétracte par homotopie $\mathcal{C}^\infty$ de $U \cap V$, et que U' et V' forment un recouvrement de W' (avec des notations évidentes). Pour les bons recouvrements le préfaisceau G^{top} vérifie donc Mayer-Vietoris. Un raisonnement standard que nous ne répèterons pas ici et n'utilisant que la propriété de Mayer-Vietoris pour les bons recouvrements ramène la preuve au cas d'une boule ouverte U. Le premier membre de $G^{top}(U) \longrightarrow \mathbf{H}^\bullet(U, G^{top}(-))$ s'identifie à $K^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$ en vertu de *ii)*. D'autre part la suite spectrale de passage du local au global $E_2^{pq} = H^p(U, \tilde{\pi}_q G^{top}(-)) \Rightarrow \pi_{q-p}\mathbf{H}^\bullet(U, G^{top}(-))$ est convergente , U étant de dimension cohomologique finie. De plus d'après *ii)* les faisceaux $\tilde{\pi}_q G^{top}(-)$ sont constants. Ainsi la suite spectrale dégénère en E_2, et le deuxième membre s'identifie aussi à $K^{top}(\mathcal{K}_{-\infty}(A))$, ce qui achève la preuve.

A.3. Application à l'hypercohomologie de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}$

Nous venons de voir que les faisceaux $\tilde{\pi}_q G^{top}(-)$ sont constants de valeur $\pi_q G^{top}(\mathbf{C})$. La suite spectrale de passage du local au global donne alors la suite exacte

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad 0 \longrightarrow H^2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}, \tilde{\pi}_{q+2} G^{top}(-)) &\longrightarrow \pi_q \mathbf{H}^\bullet(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}, G^{top}(-)) \\ &\longrightarrow H^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}, \tilde{\pi}_q G^{top}(-)).\end{aligned}$$

et de plus on a un isomorphisme canonique

$$\pi_q G^{top}(\mathbf{C}) = H^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}, \tilde{\pi}_q G^{top}(-)),$$

et utilisant l'orientation associée à la structure analytique complexe de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}$, un isomorphisme

$$\pi_{q+2} G^{top}(\mathbf{C}) = H^2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}, \tilde{\pi}_{q+2} G^{top}(-)).$$

On retrouve ainsi la décomposition

$$\pi_q G^{top}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^{an}) = \pi_{q+2} G^{top}(\mathbf{C}) \oplus \pi_q G^{top}(\mathbf{C}).$$

En particulier la suite exacte (3.1) est canoniquement scindée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. ADAMS, *Stable Homotopy and Generalized Homology*, Univ. of Chicago Press, 1974.

[2] H. BASS, *Algebraic K-Theory*, W. A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1968.

[3] J. B. BOST, *Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs* (*Inv. Math.*, Springer Verlag, vol. 101, 1990, p. 261-333).

[4] A. K. BOUSFIELD et D. M. KAN, *Homotopy Limits, Completions, and Localizations* (*Springer Lect. Notes Math.*, Vol. 304, 1972).

[5] A. K. BOUSFIELD, *The localization of spectra with respect to homology* (*Topology*, Vol, 18, 1979, p. 257-281).

[6] N. BOURBAKI, *Algèbre, Chap. 10*, Masson, 1980.

[7] A. CONNES et H. MOSCOVICI, *Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups* (*Topology*, Vol, 29, n° 3, 1990, p. 345-388).

[8] B. DAYTON et C. WEIBEL, *K-theory of hyperplanes* (*Trans. A.M.S*, vol. 257, 1980, p. 119-141).

[9] A. DOLD et D. PUPPE, *Homologie nicht-additiver Funktoren* (*Anwendungen Ann. Inst. Fourier* vol. 11, 1961).

[10] D. GRAYSON, *Higher Algebraic K-theory : II* (*Springer Lect. Notes. Math.* Vol 551, 1976, p. 217-240).

[11] A. GROTHENDIEK, *Produits Tensoriels Topologiques* (*Mem. Am. Math.*, vol. 16, 1955).

[12] A. GROTHENDIEK, *Eléments de Géométrie algébrique, IV; étude locale des shémas et des morphismes de schémas* (*Publi. Math. IHES*, vol. 21, 1965).

[13] N. HIGSON, *Algebraic K-Theory of Stable C^*-Algebras* (*Adv. in Math*, vol. 67, 1988, p. 1-140).

[14] M. KAROUBI, *Espaces classifiants en K-théorie* (*Trans. of the Am. Math. Soc.*, vol. 147, 1970, p. 75-115).

[15] M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, *K-théorie algébrique et K-théorie topologique* (*Math. Scand.* vol. 28, 1971, p. 65-307).

[16] M. KAROUBI, *K-théorie algébrique de certaines algèbres d'opérateurs* (*Springer Lect. Notes. Math.*, vol. 725, 1979, p. 254-290).

[17] M. KAROUBI, *Homologie de groupes discrets associés à des algèbres d'opérateurs* (*J. Operators Theory*, vol. 15, 1986, p. 109-161).

[18] J. L. LODAY, *K-Théorie Algébrique et Représentation des Groupes* (*Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, t. 9, 1976, p. 309-377).

[19] J. MILNOR, *Introduction to Algebraic K-Theory* (*Annals of Mathematics Studies*, Princeton Univ. Press, 1971).

[20] M. P. MURTHY et C. PEDRINI, *K_0 and K_1 of Polynomial rings* (*Springer Lect. Notes. Math* vol. 342, 1973, p. 109-121).

[21] J. NEISENDORFER, *Primary Homotopy Theory* (*Mem. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 25, n° 232, 1980).

[22] M. C. PHILLIPS, *K-Theory for Fréchet Algebras* (*Int. J. of Math.*, vol. 2, n° 1, 1991, p. 77-129).

[23] D. QUILLEN, *Higher Algebraic K-theory : I* (*Springer Lect. Notes. Math* vol. 341, 1973, p. 85-139).

[24] B. SIMON, *Trace ideals and their applications* (*London Math. Soc. Lecture Notes* vol. 35, Cambridge Univ. Press, 1979).

[25] A. SUSLIN et M. WODZICKI, *Excision in Algebraic K-Theory*, Préprint.

[26] R.G. SWAN, *Some Relations between Higher K-Functors* (*J. of Alg*, vol. 21, 1972, p. 113-136).

[27] J. TAPIA, *Quelques spectres en K-théorie topologique des algèbres de Fréchet et applications à l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur une variété*, Préprint IHES/M/91/37, 1991.

[28] R. W. THOMASON, *Algebraic K-theory and étale cohomology* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4^e série, t. 13, 1980, p. 437-552).

[29] C. WEIBEL, *Mayer-Vietoris sequences and module structures on NK_**, Algebraic K-Theory, Evanston, 1980 (*Springer Lect. Notes in Math.* n° 854, p. 466-493).

[30] C. WEIBEL, *K-Theory and Analytic Isomorphisms* (*Invent. Math.* vol. 61, 1980, p. 177-197).

[31] C. WEIBEL, *Homotopy Algebraic K-Theory* (*Cont. Math.*, vol. 83, 1989, p. 461-488).

[SGA4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J. L. VERDIER, *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas* (*Springer Lect. notes in Math.*, vol. 305, 1972-1973).

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1994;
révisé le 31 mai 1996.)

Joseph TAPIA
Laboratoire de Géométrie et Topologie,
URA 1408, Université Toulouse III,
118, route de Narbonne,
31062 Toulouse Cedex, France.
tel : 05 61 55 63 76; e.mail : Tapia@cict.fr