ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

OLIVIER BIQUARD

Fibrés de Higgs et connexions intégrables : le cas logarithmique (diviseur lisse)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 30, nº 1 (1997), p. 41-96
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1997_4_30_1_41_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^{e} série, t. 30, 1997, p. 41 à 96.

FIBRÉS DE HIGGS ET CONNEXIONS INTÉGRABLES : LE CAS LOGARITHMIQUE (DIVISEUR LISSE)

PAR OLIVIER BIQUARD

ABSTRACT. – Take a smooth divisor in a compact Kähler manifold. Given a stable Higgs bundle with "logarithmic structure" over the divisor (this means that over the divisor the bundle has a parabolic structure and the Higgs field has a logarithmic singularity), we solve the Hermite-Einstein problem for a Kähler metric of Poincaré type around the divisor. For appropriate Chern numbers, this gives a "logarithmic" integrable connection. We solve also the inverse problem, so that we get a complete correspondence between logarithmic Higgs bundles and logarithmic integrable connections, generalizing Simpson's correspondence for curves. The correspondance has a nice specialization between the induced objects over the divisor. Finally we identify the natural cohomologies on both sides with L^2 cohomology.

Introduction

L'objet de cet article est de poursuivre l'étude de la correspondance entre fibrés holomorphes munis d'un champ de Higgs et connexions intégrables (ou systèmes locaux), développée précédemment par Narasimhan-Seshadri, Mehta-Seshadri, Donaldson, Hitchin, Uhlenbeck-Yau, Simpson et Corlette (*voir* aussi [22] et [20]).

Soit X une variété complexe. Un fibré de Higgs $(\mathcal{E},\phi)$ est la donnée d'un fibré holomorphe $\mathcal{E}$ et d'un champ de Higgs, $\phi \in H^0(X,\mathbf{\Omega}^1 \otimes \mathcal{E}nd\,\mathcal{E})$, tel que $\phi \wedge \phi = 0$. Une connexion intégrable $(\mathcal{F},D)$ est la donnée d'un fibré holomorphe $\mathcal{F}$ et d'un opérateur $D : \mathcal{O}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{\Omega}^1_X \otimes \mathcal{F})$, où $\mathcal{O}$ désigne les sections holomorphes, vérifiant la règle de Leibniz ($f \in \mathcal{O}$ et $s \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ impliquent $D(fs) = df \otimes s + fDs$) et l'intégrabilité $D^2 = 0$. En termes de géométrie différentielle, on peut dire que D est une connexion plate et que $D^{0,1}$ induit le fibré holomorphe $\mathcal{F}$. Cette donnée est équivalente à celle d'une représentation du $\pi_1(X)$ dans $GL_r(\mathbb{C})$, où r est le rang de $\mathcal{F}$.

Supposons à présent que (X,ω_0) soit kählérienne compacte. Explicitons rapidement les travaux évoqués précédemment. Partant d'un fibré de Higgs $(\mathcal{E},\phi)$, muni d'une métrique hermitienne h, on peut considérer le $\overline{\partial}$-opérateur $D'' = \overline{\partial}^{\mathcal{E}} + \phi$ (le fait que $(\mathcal{E},\phi)$ soit un fibré de Higgs équivaut à $(D'')^2 = 0$). Soit $\partial_h^{\mathcal{E}}$ le (1,0)-opérateur tel que la connexion $d_h^{\mathcal{E}} = \overline{\partial}^{\mathcal{E}} + \partial_h^{\mathcal{E}}$ soit h-unitaire, alors on peut construire $D'_h = \partial_h^{\mathcal{E}} + \phi^*$ (noter que l'étoile dans ϕ^* fait intervenir h) et $D_h = D'' + D'_h$. Si $(\mathcal{E},\phi)$ est stable, alors on peut trouver

U.R.A. 169 du C.N.R.S.

une métrique de Hermite-Einstein h sur $(\mathcal{E},\phi)$, c'est-à-dire telle que

$$\Lambda D_h^2 = \text{constante}.$$

Si de plus $ch_1(\mathcal{E})[\omega_0]^{n-1} = ch_2(\mathcal{E})[\omega_0]^{n-2} = 0$, alors cela implique de plus $D_h^2 = 0$. Cet opérateur D_h donne donc une connexion intégrable.

Réciproquement, partant d'une connexion intégrable $(\mathcal{F}, D)$, avec une métrique hermitienne h, on peut décomposer $D = D^+ + \psi$, avec D^+ une connexion h-unitaire et ψ une 1-forme h-autoadjointe. On peut alors considérer le $\overline{\partial}$-opérateur $D_h'' = (D^+)^{0,1} + \psi^{1,0}$. Si $(\mathcal{F}, D)$ est semi-simple, alors il admet une métrique harmonique h, c'est-à-dire vérifiant

$$\Lambda(D_h'')^2 = 0,$$

mais ici, sans avoir besoin d'annulation de nombres caractéristiques, cela implique directement $(D_h'')^2 = 0$ et on récupère ainsi un fibré de Higgs.

Les deux constructions sont inverses l'une de l'autre.

Dans cet article, on envisage le cas de $X - \mathcal{D}$, où (X, ω_0) est une variété kählérienne compacte, et $\mathcal{D} \subset X$ un diviseur lisse (pouvant avoir plusieurs composantes). Nous généralisons le cas, traité par Simpson, où X était une surface de Riemann. Nous choisissons, pour réaliser la correspondance, une métrique sur la base de type Poincaré près de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que dans le voisinage d'un point de $\mathcal{D}$, la métrique apparaît asymptotique au produit de $(\mathcal{D}, \omega_0|_{\mathcal{D}})$ et du disque épointé $\mathbb{D}^*$, muni de la métrique hyperbolique à courbure -1

$$\frac{|dz|^2}{|z|^2(-\operatorname{Log}|z|^2)^2}.$$

Les fibrés de Higgs que nous considérons, et que nous appelons fibrés de Higgs logarithmiques, sont les suivants (pour des définitions précises, *voir* la section 1) : le fibré holomorphe $\mathcal{E}$ est défini sur X et admet au-dessus de $\mathcal{D}$ une structure parabolique $(\mathcal{E}_\alpha)_{0\leq\alpha<1}$. Le champ de Higgs est une 1-forme logarithmique,

$$\phi \in \mathbf{\Omega}^1_{\operatorname{Log}\mathcal{D}}(X, \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}),$$

où $\mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}$ est le faisceau des endomorphismes de $\mathcal{E}$ qui préservent la filtration parabolique sur $\mathcal{D}$. Chaque morceau $\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E} = \mathcal{E}_\alpha/\mathcal{E}_{\alpha+\varepsilon}$ du gradué de la filtration parabolique est muni de plus de la filtration W associée à la partie nilpotente du résidu de ϕ sur $\mathcal{D}$: en prenant la partie primitive du gradué W, on obtient des sous-fibrés primitifs $P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}$ ($k \geq 0$) sur $\mathcal{D}$, qui sont munis des champs de Higgs $\phi_{k,\alpha}$ restrictions de ϕ à $\mathcal{D}$ (en réalité, ces restrictions n'existent pas et on est obligé de définir $\phi_{k,\alpha}$ comme une 1-forme logarithmique homogène sur le fibré normal N de $\mathcal{D}$). La collection des $(P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}, \phi_{k,\alpha})$ constitue le spécialisé du fibré de Higgs sur $\mathcal{D}$.

On a des définitions similaires du côté des connexions intégrables logarithmiques (*voir* section 9). Le fibré $\mathcal{F}$ est lui-même muni d'une structure parabolique $(\mathcal{F}_\beta)_{0\leq\beta<1}$ au-dessus de $\mathcal{D}$ et la connexion est un opérateur

$$D : \mathcal{O}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{\Omega}^1_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{F}),$$

qui doit de plus respecter la structure parabolique : $D(\mathcal{F}_\beta) \subset \mathcal{O}(\boldsymbol{\Omega}^1_{\mathrm{Log}\,\mathcal{D}} \otimes \mathcal{F}_\beta)$. On a alors aussi un spécialisé sur le diviseur, $(P_k\mathrm{Gr}_\beta\mathcal{F}, D_{k,\beta})$, défini de manière analogue : les $P_k\mathrm{Gr}_\beta\mathcal{F}$ sont les fibrés primitifs associés à l'action de la partie nilpotente du résidu de D sur les gradués de la filtration parabolique, et les $D_{k,\beta}$ sont des objets homogènes sur N obtenus par « restriction » de D sur le diviseur $\mathcal{D}$.

On peut définir pour ces objets un degré parabolique p-deg_{ω_0} et une pente parabolique p-μ_{ω_0}, ainsi qu'un second nombre de Chern parabolique, p-ch_{2,ω_0} (*voir* proposition 7.2). Les résultats de ce papier peuvent être résumés dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME. – *Soit* (X, ω_0) *une variété kählérienne compacte, et* ω *une forme de Kähler « de type Poincaré » associée* (voir (2.3)).

(1) *Si le fibré de Higgs logarithmique* $(\mathcal{E}, \phi)$ *est* p-μ_{ω_0}*-stable, avec* p-$\mu_{\omega_0}(\mathcal{E}) = 0$ *(simple normalisation), et si les spécialisés* $(P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}, \phi_{k,\alpha})$ *sont polystables, de pente* $-\alpha\,\mu_{\omega_0}(N)$, *alors* $(\mathcal{E}, \phi)$ *admet une unique métrique d'Hermite-Einstein* h :

$$\Lambda_\omega D_h^2 = 0,$$

avec un comportement asymptotique bien précis (théorème 8.1). *Si de plus* p-$ch_{2,\omega_0} = 0$, *alors* $D_h^2 = 0$ *et on obtient une connexion intégrable logarithmique (proposition* 9.3).

(2) *On a un énoncé similaire dans la direction inverse (théorème* 11.4).

(3) *La correspondance obtenue induit canoniquement une correspondance sur les spécialisés, qui consiste essentiellement à appliquer la correspondance classique dans le cas compact (proposition* 10.1).

(4) *Les hypercohomologies naturelles du côté fibré de Higgs logarithmique et du côté connexion intégrable logarithmique s'identifient via la cohomologie* L^2 *pour* ω *(théorèmes* 12.1 *et* 12.6).

Le choix de la métrique de Poincaré sur la base appelle quelques commentaires. Tout d'abord, sur une surface de Riemann, les équations sont invariantes par changement conforme de métrique et il n'y a donc pas de choix de métrique à faire. Ensuite, on aurait pu imaginer de choisir plutôt la restriction de ω_0 à $X - \mathcal{D}$. Cela semble poser des problèmes délicats, notamment dès que l'on rajoute un champ de Higgs, car les courbures deviennent assez singulières près du diviseur (essentiellement L^1, donc d'énergie infinie). L'utilisation de la métrique incomplète $\omega_0|_{X-\mathcal{D}}$ a été possible dans [3] pour le cas d'une surface projective, sans champ de Higgs (donc, de l'autre côté, pour des représentations unitaires de $\pi_1(X - \mathcal{D})$).

D'autre part, Jost et Zuo ont construit dans [16], [17] des métriques harmoniques pour des représentations de groupe fondamental de variété quasi-projective. Les variétés considérées sont plus générales, puisque le diviseur peut avoir des croisements normaux. En revanche, notre théorème est assez différent. En effet, d'une part, nous avons une correspondance dans les deux sens, incluant la construction de métriques de Hermite-Einstein : cela impose la considération de structures paraboliques des deux côtés, puisque les poids du fibré de Higgs correspondent à la partie unitaire de la monodromie du système local et les poids du système local aux parties réelles des valeurs propres du champ de Higgs (*voir* proposition 10.1); en particulier, il faut construire une métrique harmonique sur un système local muni d'une filtration au-dessus du diviseur, et la condition d'existence est alors une condition de stabilité plutôt que de semi-simplicité. D'autre part, la correspondance, très précise, donne le comportement des solutions près du diviseur, ce qui permet de montrer une correspondance canonique induite au-dessus du diviseur. Le prix à payer est peut-être l'hypothèse de polystabilité des spécialisés sur le diviseur : il n'est pas impossible que l'on puisse se passer de cette hypothèse, quitte à la retrouver ensuite comme conséquence de l'existence d'une métrique de Hermite-Einstein induisant une connexion plate. Enfin, l'hypothèse sur la pente des spécialisés est nécessaire si l'on veut obtenir une connexion plate (*voir* le lemme 11.2 et la remarque 11.3).

L'article est organisé comme suit. Nous avons, dans la présentation, privilégié le côté fibré de Higgs, puisque la construction d'une métrique de Hermite-Einstein sur un fibré de Higgs est un problème plutôt plus délicat que l'inverse, la construction d'une métrique harmonique sur un fibré plat. Pour cette dernière, on ne donnera pas tous les détails de la démonstration.

Dans la partie I (sections 1 à 3), nous introduisons les définitions et les premières constructions sur les fibrés de Higgs logarithmiques et définissons leurs spécialisés sur $\mathcal{D}$. Dans la section 2, nous introduisons les différents modèles de métriques, tant sur la base (métrique de type Poincaré) que sur le fibré. Cela permet, dans la section 3, un calcul préliminaire de la courbure de nos objets.

Dans la partie II (sections 4 à 6), nous développons l'analyse qui est nécessaire dans cette situation non compacte. La section 4, à partir des modèles locaux de la première partie, définit les espaces à poids adéquats, tant L^p que Hölder, et développe leurs propriétés. La section 5 énonce un résultat important (théorème 5.1) sur le laplacien dans ces espaces, ainsi qu'une formule de Weitzenböck (théorème 5.4). La section 6 donne le point le plus technique de la démonstration du théorème 5.1.

Dans la partie III (sections 7 et 8), nous démontrons l'existence d'une métrique de Hermite-Einstein sur un fibré de Higgs logarithmique avec certaines conditions de stabilité. Le résultat essentiel est le théorème d'existence 8.1.

Dans la partie IV (sections 9 à 11), on arrive enfin à l'autre côté de la barrière, c'est-à-dire à l'aspect connexion intégrable logarithmique. Dans la section 9, nous montrons que, sous des conditions d'annulation, la métrique de Hermite-Einstein construite dans la partie III fournit une connexion plate sur $X - \mathcal{D}$, qui se prolonge canoniquement en une connexion intégrable logarithmique. Nous définissons à cet endroit ces objets, ainsi que leurs spécialisés sur le diviseur. Dans la section 10, on constate qu'il y a une correspondance induite sur les spécialisés. Dans la section 11, on achève en énonçant la correspondance inverse (théorème11.4), qui consiste en la construction de métriques harmoniques.

Dans la partie V (section 12), nous considérons les aspects cohomologiques de la correspondance. Ceux-ci, comme il est bien connu, sont reliés au problème de la déformation des objets (*voir* par exemple [14]). La théorie que nous avons construite est en fait bien adaptée au problème de la déformation isomonodromique de ces objets, c'est-à-dire, par exemple, si on prend l'aspect représentations de $\pi_1(X - \mathcal{D})$, à la considération des déformations qui préservent la classe de conjugaison de la monodromie autour du diviseur. Associés à ce type de déformation, on trouve des complexes dont les hypercohomologies coïncident, ce qu'on voit en les identifiant à la cohomologie L^2. Ce résultat poursuit dans la voie des résultats de Zucker et d'autres [32], [6], [18]. On obtient par conséquent une théorie de Hodge pour ces hypercohomologies et on en tire quelques conséquences.

Restent à évoquer les points que nous n'avons pas abordés dans ce papier.

Tout d'abord, dans le cas de la dimension complexe 1, à partir des outils introduits ici, on obtient facilement la construction par les connexions des espaces de modules (*voir* [15]), qui sont ainsi naturellement munis de *métriques hyperkählériennes*, indépendantes de la métrique choisie sur la base. Ainsi, par exemple, l'espace des modules des représentations de $\pi_1(X - \mathcal{D})$ dans $GL_r(\mathbb{C})$, avec monodromie fixée autour des points de $\mathcal{D}$, est muni d'une structure hyperkählérienne sur sa partie lisse (ici, les représentations irréductibles). Les structures holomorphes-symplectiques sous-jacentes apparaissent comme les feuilles symplectiques de l'espace des modules de toutes les représentations de $\pi_1(X - \mathcal{D})$ dans $GL_r(\mathbb{C})$, qui est naturellement muni d'une structure de Poisson holomorphe (le modèle de ce genre de phénomène apparaît dans [4]). En dimension supérieure, on obtient aussi des métriques hyperkählériennes (pour le cas compact, *voir* [13] mais il y a une construction plus simple en se ramenant aux courbes).

L'autre point sur lequel nous ne nous sommes pas penchés est le lien avec les *variations de structure de Hodge*. Il est clair, comme dans la théorie habituelle [29], que l'on obtient, à partir de la correspondance, une action de $\mathbb{C}^*$ sur l'espace des modules de fibrés de Higgs logarithmiques, à structure parabolique fixée, dont les points fixes sont les variations complexes de structure de Hodge. Il est tout à fait plausible qu'il y ait un théorème de compacité permettant de déformer toute représentation en une variation complexe de structure de Hodge (en autorisant des déformations ne préservant pas la monodromie autour du diviseur).

Comme problème à traiter, on peut se demander si l'analyse développée pourrait permettre d'obtenir le théorème de l'orbite $S\ell_2$ de Schmid.

Enfin, bien sûr, se pose la question de la généralisation de ce travail au cas où le diviseur admet des croisements normaux. Nous reviendrons sur ce cas dans un futur papier.

Remerciements

Je remercie vivement pour d'utiles conversations Christophe Margerin et Claude Sabbah.

Partie I

Modèles locaux pour les fibrés de Higgs logarithmiques

Cette partie introduit les définitions et constructions initiales concernant les fibrés de Higgs.

1. Définitions et restrictions sur le diviseur

Soient (X, ω_0) une variété kählérienne compacte, $\mathcal{D} \subset X$ un diviseur lisse (avec éventuellement plusieurs composantes).

DÉFINITION 1.1. – *Un fibré holomorphe parabolique est un fibré holomorphe $\mathcal{E} \to X$ tel que $\mathcal{E}|_{\mathcal{D}}$ soit muni d'une filtration décroissante $(\mathcal{E}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$ par des sous-fibrés holomorphes, continue à gauche, avec $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}|_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{E}_1 = 0$.*

Si $\mathcal{E}$ est un fibré parabolique, nous notons $\mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}$ le faisceau des sections holomorphes de $\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}$ qui préservent la filtration au-dessus de $\mathcal{D}$. Nous notons également $\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E} = \mathcal{E}_\alpha/\mathcal{E}_{\alpha+\varepsilon}$ le gradué associé à la filtration parabolique sur $\mathcal{D}$.

DÉFINITION 1.2. – *Un fibré de Higgs logarithmique* $(\mathcal{E}, \phi)$ *est la donnée d'un fibré holomorphe parabolique* $\mathcal{E}$ *et d'un champ de Higgs* $\phi \in \boldsymbol{\Omega}^1_{\mathrm{Log}\,\mathcal{D}}(X, \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})$ *tel que* $\phi \wedge \phi = 0$ *; le résidu* $\mathrm{Res}_\mathcal{D}\phi$ *est alors bien défini sur* $\mathcal{D}$ *comme endomorphisme respectant la filtration parabolique et on demande de plus que sa classe de conjugaison dans chaque gradué* $\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}$ *reste constante (il est clair* a priori *que les valeurs propres sont constantes).*

Prenons des coordonnées holomorphes locales $(z^m)_{m\geq 0}$ sur X telles que z^0 soit une équation de $\mathcal{D}$, alors la condition $\phi \in \boldsymbol{\Omega}^1_{\mathrm{Log}\,\mathcal{D}}(X, \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})$ signifie que

$$\phi = \phi_0 \frac{dz^0}{z^0} + \phi_m dz^m$$

avec les $(\phi_m)_{m\geq 0}$ holomorphes et préservant la filtration parabolique sur $\mathcal{D}$; on a $\mathrm{Res}_\mathcal{D}\phi = \phi_0|_\mathcal{D}$.

1.A. FILTRATION W. – Rappelons qu'à un endomorphisme nilpotent Y d'un espace vectoriel est canoniquement attachée une filtration croissante $(W_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, avec gradué associé $\mathrm{Gr}_k = W_k/W_{k-1}$, caractérisée par

$$Y(W_k) \subset W_{k-2},$$

$$Y^k : \mathrm{Gr}_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{-k} \text{ si } k \geq 0,$$

et que l'on peut définir les sous-espaces primitifs

$$P_k = \ker\,(Y^{k+1} : \mathrm{Gr}_k \to \mathrm{Gr}_{-k-2}),$$

de sorte que l'on obtient la décomposition de Lefschetz

$$\mathrm{Gr}_k = \oplus_{j\geq 0} Y^j(P_{k+2j}).$$

A présent, soit $(\mathcal{E}, \phi)$ un fibré de Higgs logarithmique. Décomposons $\mathcal{E}|_\mathcal{D} = \oplus_\lambda \mathcal{E}_\lambda$ suivant les valeurs propres de $\mathrm{Res}_\mathcal{D}\phi$. Chaque $\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}$ se décompose en $\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E} = \oplus_\lambda \mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$ et la partie nilpotente, Y, de $\mathrm{Res}_\mathcal{D}\phi$ induit sur chaque morceau du gradué une filtration $(W_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec gradué $(\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda)_{k\in\mathbb{Z}}$ et des sous-espaces primitifs $P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$ pour $k \geq 0$.

1.B. OBJETS INDUITS SUR $\mathcal{D}$. – Maintenant, nous essayons de donner un sens à la restriction de ϕ sur $\mathcal{D}$: rappelons que, localement, dans des coordonnées (z^0, z),

$$\phi = \phi_0 \frac{dz^0}{z^0} + \phi_m dz^m;$$

si on transforme $z^0 = w^0 f$, avec f ne s'annulant pas, alors on obtient

$$(*) \qquad \phi = \phi_0 \frac{dw^0}{w^0} + \left(\phi_m + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z^m}\phi_0\right) dz^m,$$

si bien que, contrairement au cas où ϕ est holomorphe, $\phi_m(0,z)dz^m$ ne définit pas une 1-forme sur $\mathcal{D}$. On peut contourner la difficulté de la manière suivante.

Notons $\pi : N \to \mathcal{D}$ le fibré normal à $\mathcal{D}$: considérant z^0 comme une coordonnée locale pour N, on remarque que la formule locale

$$\phi_0(0,z)\frac{dz^0}{z^0} + \phi_m(0,z)dz^m$$

définit globalement une 1-forme logarithmique sur l'espace total de N, homogène de degré 0 (c'est-à-dire invariante par les dilatations $z^0 \to az^0$), à valeurs dans $\mathcal{E}nd\,(\pi^*(\mathcal{E}|_{\mathcal{D}}))$. En passant aux gradués, $\pi^*(\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda)$ apparaît muni d'un champ de Higgs homogène, de résidu λ sur $\mathcal{D}$ (la partie nilpotente Y n'induit rien sur Gr_k).

Par conséquent, chaque $\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$ est muni d'un « champ de Higgs »

$$\phi_{k,\alpha,\lambda} \in \mathbf{\Omega}^1_{\mathrm{hom}}(\pi^*\mathcal{E}nd\,\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda)$$

qui apparaît comme un fibré de Higgs homogène sur N, avec résidu sur $\mathcal{D}$ du champ de Higgs λ; de plus, comme $\phi \wedge \phi = 0$, Y agit sur $\oplus_k(\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda, \phi_{k,\alpha,\lambda})$, ce qui signifie, via la décomposition de Lefschetz, que toutes ces données sont équivalentes à la seule donnée des sous-fibrés primitifs $P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$ avec leurs champs de Higgs $P_k\phi_{\alpha,\lambda} \in \mathbf{\Omega}^1_{\mathrm{hom}}(\pi^*\mathcal{E}nd\,P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda)$.

DÉFINITION 1.3. – *On appelle spécialisé de* $(\mathcal{E},\phi)$ *sur* $\mathcal{D}$ *le fibré de Higgs*

$$\mathrm{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\phi) = (\mathrm{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}}\mathcal{E}, \mathrm{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}}\phi)$$

qui est la somme directe des $(\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda, \phi_{k,\alpha,\lambda})$, *muni de l'action de* Y.

La donnée de $\mathrm{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\phi)$ est donc équivalente à celle des $\oplus_k(P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda, P_k\phi_{\alpha,\lambda})$.

2. Métrique modèle

2.A. MÉTRIQUE SUR LE SPÉCIALISÉ. – Reprenons la situation d'un endomorphisme nilpotent Y d'un espace vectoriel. Le gradué $\mathrm{Gr} = \oplus\mathrm{Gr}_k$ est muni d'une action de Y et d'un endomorphisme $H = \oplus k\,1_{\mathrm{Gr}_k}$, et on a la relation $[H,Y] = -2Y$. On peut compléter de manière unique H et Y en une représentation (H,X,Y) de $\mathfrak{sl}_2$, c'est-à-dire trouver X tel que $[H,X] = 2X$ et $[X,Y] = H$. La décomposition de Lefschetz apparaît alors comme la décomposition suivant les plus hauts poids de la représentation de $\mathfrak{sl}_2$.

Le choix d'une métrique sur Gr, telle que

$$H^* = H, \qquad Y^* = X,$$

est toujours possible, et est équivalent au choix d'une métrique sur chaque sous-espace primitif P_k (on prolonge ensuite ces métriques grâce à la décomposition de Lefschetz et aux relations ci-dessus).

A présent, partant d'un fibré de Higgs logarithmique $(\mathcal{E},\phi)$, on a donc une représentation (H,X,Y) de $\mathfrak{sl}_2$ dans chaque $\oplus_k\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$, et on peut choisir une métrique initiale h_0 sur chaque $\oplus_k P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$, ou de manière équivalente, sur chaque $\oplus_k\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$, de sorte que $H^* = H$ et $Y^* = X$.

Remarquons au passage que les identités $[H, \mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}\phi] = 0$ et $[Y, \mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}\phi] = 0$ impliquent aussi $[X, \mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}\phi] = 0$.

2.B. MÉTRIQUE SUR $\mathcal{E}$. – On choisit un isomorphisme C^∞ entre $\mathcal{E}_\lambda$ et $\oplus_{k,\alpha}\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$, respectant les filtrations parabolique et W (c'est-à-dire qu'on fait des choix de supplémentaires dans les filtrations). Notons $G_{k,\alpha,\lambda} \subset \mathcal{E}|_{\mathcal{D}}$ le sous-fibré de $\mathcal{E}|_{\mathcal{D}}$ obtenu à partir de $\mathrm{Gr}_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$ par cet isomorphisme. Ainsi,

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{D}} = \oplus_{k,\alpha,\lambda} G_{k,\alpha,\lambda} \tag{2.1}$$

est muni d'une métrique h_0 et d'une représentation de $\mathfrak{sl}_2$. Soient T_R le voisinage tubulaire (pour la métrique ω_0) de rayon R de $\mathcal{D}$ et $p : T_R \to \mathcal{D}$ la projection sur $\mathcal{D}$. Le choix d'un isomorphisme C^∞

$$\mathcal{E}|_{T_R} = p^*(\mathcal{E}|_{\mathcal{D}})$$

permet de prolonger dans T_R la décomposition (2.1), avec la métrique h_0 et la représentation de $\mathfrak{sl}_2$, vérifiant toujours $H^* = H$ et $Y^* = X$. Soient ς une section de $[\mathcal{D}]$ définissant $\mathcal{D}$ et $|\cdot|$ une métrique sur $[\mathcal{D}]$, posons

$$\rho = |\varsigma|.$$

Près de $\mathcal{D}$, la fonction ρ est à peu près équivalente à la distance à $\mathcal{D}$. On pose alors

$$h = \oplus_{k,\alpha,\lambda} \rho^{2\alpha}(-\operatorname{Log}\rho^2)^k h_0|_{G_{k,\alpha,\lambda}} \tag{2.2}$$

dans un voisinage de $\mathcal{D}$, et on prolonge cette métrique de manière C^∞ sur le reste de X.

2.C. MÉTRIQUE SUR LA BASE. – Passons à présent à la métrique sur la base X. On considère sur $X - \mathcal{D}$ la métrique kählérienne

$$\omega = T\omega_0 - \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \operatorname{Log}\operatorname{Log}^2|\varsigma|^2 \tag{2.3}$$

avec $T > 0$ assez grand (*voir* [8]). Pour simplifier les notations, on supposera, quitte à renormaliser ω_0, que $T = 1$. Localement, des coordonnées (z^0, z^m) identifient un voisinage d'un point de $\mathcal{D}$ à un produit $\mathbb{D} \times U$ avec $U \subset \mathcal{D}$, $\mathbb{D}$ étant le disque unité de $\mathbb{C}$, et la métrique s'écrit

$$ds^2 = \frac{|dz^0|^2}{|z^0|^2 \operatorname{Log}^2|z^0|^2} + ds_U^2 + O(|\operatorname{Log}|z^0|^2|^{-1}) \tag{2.4}$$

ce qui s'écrit aussi, en posant $z^0 = |z^0|e^{i\theta}$ et $t = \operatorname{Log}(-\operatorname{Log}|z^0|^2)$,

$$ds^2 = dt^2 + e^{-2t}d\theta^2 + ds_U^2 + O(e^{-t}), \tag{2.5}$$

où la perturbation est $O(e^{-t})$ ainsi que ses dérivées. Cette métrique est donc complète, à volume fini, elle est asymptotique au produit du disque de Poincaré $\mathbb{D}^*$, avec sa métrique $|dz^0|^2/(|z^0|^2\operatorname{Log}^2\operatorname{Log}|z^0|^2)$, et du diviseur $\mathcal{D}$.

3. Connexions et courbures modèles

3.A. CALCUL LOCAL. – Nous calculons à présent la connexion et la courbure de la métrique h. Soit, au voisinage d'un point de $\mathcal{D}$, une base (s_i) de sections C^∞, h_0-orthonormale, respectant la décomposition (orthogonale)

$$\mathcal{E}|_{T_R} = \oplus G_{k,\alpha,\lambda}.$$

Nous notons k_i, α_i, λ_i les valeurs de k, α, λ tels que $s_i \in G_{k,\alpha,\lambda}$. Nous dirons que $(\alpha_i, k_i) < (\alpha_j, k_j)$ si $\alpha_i < \alpha_j$ ou $\alpha_i = \alpha_j$ et $k_i > k_j$.

Dans cette base, l'opérateur $\overline{\partial}$ du fibré holomorphe $\mathcal{E}$ s'écrit

$$\overline{\partial}^{\mathcal{E}} = \overline{\partial} + a_{0i}^j d\overline{z}^0 + a_{mi}^j d\overline{z}^m$$

avec, sur $\mathcal{D}$, à cause des sous-fibrés holomorphes $\mathcal{E}_\lambda$ et des filtrations holomorphes :

$$a_{mi}^j = 0 \text{ si } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ ou } (\alpha_i, k_i) < (\alpha_j, k_j).$$

Considérons la base h-orthonormale

$$e_i = \frac{s_i}{\rho^{\alpha_i}(\operatorname{Log}\rho^2)^{k_i/2}}$$

et posons $\rho = f|z^0|$, alors, dans cette base,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}^{\mathcal{E}} &= \overline{\partial} - \frac{\alpha}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0} + \frac{H}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log}\rho^2)} - \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{H}{\operatorname{Log}\rho^2}\right)\overline{\partial}\operatorname{Log} f^2 \\
&\quad + \rho^{\alpha_i-\alpha_j}(-\operatorname{Log}\rho^2)^{(k_i-k_j)/2}(a_{0i}^j d\overline{z}^0 + a_{mi}^j d\overline{z}^m) \\
&= \overline{\partial} - \frac{\alpha}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0} + \frac{H}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log}\rho^2)} - \frac{\alpha}{2}\overline{\partial}\operatorname{Log} f^2 \\
&\quad + (a_{mi}^j(0,z)d\overline{z}^m)_{\lambda_i=\lambda_j,\alpha_i=\alpha_j,k_i=k_j} + (\omega_i^j)
\end{aligned}$$

avec ω_i^j une (0,1)-forme tendant vers 0 (en métrique de Poincaré) avec

$$(3.1) \qquad |\omega_i^j| = \begin{cases} O(\rho^\varepsilon) & \text{si } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ ou } \alpha_i \neq \alpha_j \\ O(1/|\operatorname{Log}\rho^2|^{1/2}) & \text{sinon} \end{cases}$$

et la même chose pour les dérivées.

Notant par un indice « diag » la partie diagonale $(\lambda_i, \alpha_i, k_i) = (\lambda_j, \alpha_j, k_j)$, on voit que la connexion métrique associée s'écrit ($d^c = \sqrt{-1}\,(\overline{\partial} - \partial)$ et $z^0 = |z^0|\exp(i\theta)$)

$$\begin{aligned}
d_h^{\mathcal{E}} = \overline{\partial}^{\mathcal{E}} + \partial_h^{\mathcal{E}} &= d + \sqrt{-1}\,\alpha d\theta + \sqrt{-1}\,H\frac{d\theta}{\operatorname{Log}\rho^2} + \sqrt{-1}\,\frac{\alpha}{2}d^c\operatorname{Log} f^2 \\
&\quad + (a_{mi}^j(0,z)d\overline{z}^m)_{\text{diag}} - (a_{mi}^j(0,z)d\overline{z}^m)^*_{\text{diag}} + (\omega_i^j) - (\omega_i^j)^*
\end{aligned}$$

d'où la courbure $R_h^{\mathcal{E}} = (d_h^{\mathcal{E}})^2$:

$$R_h^{\mathcal{E}} = H\frac{dz^0 \wedge d\overline{z}^0}{|z^0|^2(-\operatorname{Log}\rho^2)^2} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{-1}\,dd^c\operatorname{Log} f^2 + p^* R_{h_0}^{\mathrm{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}}\mathcal{E}} + O(|-\operatorname{Log}\rho^2|^{-1/2})$$

qu'on écrit finalement, puisque $[\mathcal{D}]|_{\mathcal{D}} = N$ et $(\sqrt{-1}\,/2)dd^c \operatorname{Log} f^2 = \overline{\partial}\partial \operatorname{Log} \rho^2 = R^N$,

$$R_h^{\mathcal{E}} = H \frac{dz^0 \wedge d\overline{z}^0}{|z^0|^2(-\operatorname{Log} \rho^2)^2} + p^*(R_{h_0}^{\operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \mathcal{E}} + \alpha R^N) + O\left(\frac{1}{|\operatorname{Log} \rho^2|^{1/2}}\right). \tag{3.2}$$

D'autre part, dans la base orthonormale, par des arguments similaires,

$$\begin{aligned} \phi &= p^* \operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \phi + \frac{Y}{\operatorname{Log} \rho^2} \frac{dz^0}{z^0} + \text{perturbation}, \\ \phi^* &= p^* \operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \phi^* + \frac{X}{\operatorname{Log} \rho^2} \frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0} + \text{perturbation}. \end{aligned}$$

Rappelons, pour bien comprendre cette formule, que $\operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \phi$ est bien définie comme 1-forme homogène sur l'espace total du fibré normal N, et que l'on peut ensuite la ramener dans le voisinage tubulaire via p; en revanche, le crochet $[\operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \phi, \operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \phi^*]$ existe bien comme (1,1)-forme sur $\mathcal{D}$ et donc

$$[\phi, \phi^*] = -H \frac{dz^0 \wedge d\overline{z}^0}{|z^0|^2(-\operatorname{Log} \rho^2)^2} + p^*[\operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \phi, \operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \phi^*] + O\left(\frac{1}{|\operatorname{Log} \rho^2|^{1/2}}\right). \tag{3.3}$$

Finalement, on obtient,

$$R_h^{\mathcal{E}} + [\phi, \phi^*] = p^*\Big((R + [\phi, \phi^*])_{h_0}^{\operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \phi)} + \alpha R_N\Big) + O\left(\frac{1}{|\operatorname{Log} \rho^2|^{1/2}}\right). \tag{3.4}$$

Rappelons que l'on pose $D'' = \overline{\partial}^{\mathcal{E}} + \phi$ (donc, pour un fibré de Higgs, $(D'')^2 = 0$), $D' = \partial_h^{\mathcal{E}} + \phi^*$ et $D = D'' + D'$, donc

$$F_h^{(\mathcal{E}, \phi)} = F^D = D^2 = R_h^{\mathcal{E}} + [\phi, \phi^*] + d'\phi + d''\phi^*$$

et l'on cherche à résoudre l'équation de Hermite-Einstein pour la métrique h:

$$\Lambda F_h^{(\mathcal{E}, \phi)} = \Lambda(R_h^{\mathcal{E}} + [\phi, \phi^*]) = \text{constante}. \tag{3.5}$$

La métrique que nous venons de construire est une première approximation de la solution. On remarquera que

$$\overline{\partial}^{\mathcal{E}} \phi^* = p^*(\overline{\partial}^{\operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \mathcal{E}} \operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}} \phi) + O\left(\frac{1}{|\operatorname{Log} \rho^2|^{1/2}}\right) \tag{3.6}$$

et de même pour $\partial_h^{\mathcal{E}} \phi$, de sorte que

$$F_h^{(\mathcal{E}, \phi)} = p^*\Big(F_{h_0}^{\operatorname{Sp\acute{e}}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \phi)} + \alpha R_N\Big) + O\left(\frac{1}{|\operatorname{Log} \rho^2|^{1/2}}\right). \tag{3.7}$$

REMARQUE 3.1. – Il est important de noter qu'on peut voir, en suivant bien le raisonnement à partir de (3.1), que la perturbation $O(1/|\operatorname{Log} \rho^2|^{1/2}$ vérifie en fait toujours les décroissances suivant les composantes écrites en (3.1).

3.B. INTERPRÉTATION GLOBALE. – Posons $2\lambda = \tau_2 + \sqrt{-1}\,\tau_3$, $\tau_1 = \sqrt{-1}\,\alpha$, $X = (-\sigma_2 + \sqrt{-1}\,\sigma_3)/2$, $Y = (\sigma_2 + \sqrt{-1}\,\sigma_3)/2$ et $H = \sqrt{-1}\,\sigma_1$, avec les τ_i et les σ_i éléments de $\mathfrak{u}_r$. Les (τ_i) commutent, $\sigma = (\sigma_i)$ commute aux (τ_i) et forme une représentation de $\mathfrak{su}_2$. Posons de plus

$$T_i = \tau_i + \frac{\sigma_i}{\operatorname{Log}\rho^2}. \tag{3.8}$$

Si $\mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}\phi$ n'est pas une vraie 1-forme sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}$, on peut faire un choix global qui nous y ramène en C^∞: en effet, sur $\mathcal{D}$, l'expression

$$\varphi = \mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}\phi - \lambda\partial\operatorname{Log}\rho^2 \tag{3.9}$$

définit une section C^∞ de $\Omega^{1,0} \otimes \operatorname{End}(\mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}\mathcal{E})$, car $\partial\operatorname{Log}\rho^2$, restreint à $\mathcal{D}$, définit une (1,0)-forme homogène sur $N - \mathcal{D}$, de « résidu » 1 (pour une présentation plus intrinsèque de cette forme, *voir* la démonstration du lemme 7.1). On déduit, dans un voisinage de $\mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\phi + \phi^* &= p^*(\varphi + \varphi^*) + \lambda\partial\operatorname{Log}\rho^2 + \lambda^*\overline{\partial}\operatorname{Log}\rho^2 + O(|\operatorname{Log}\rho^2|^{-1/2})\\ &= p^*(\varphi + \varphi^*) - (\sqrt{-1}/2)\tau_2 d^c\operatorname{Log}\rho^2 - (\sqrt{-1}/2)\tau_3 d\operatorname{Log}\rho^2\\ &\quad + O(|\operatorname{Log}\rho^2|^{-1/2})\end{aligned} \tag{3.10}$$

et d'autre part $\sqrt{-1}\,\alpha d\theta + (\sqrt{-1}/2)\alpha d^c\operatorname{Log} f^2 = (1/2)\tau_1 d^c\operatorname{Log}\rho^2$; si on définit

$$D_{\mathcal{D}} = d_{h_0}^{\mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}\mathcal{E}} + \varphi + \varphi^*, \tag{3.11}$$

qui est une GL_r-connexion bien définie sur $\mathcal{D}$, on déduit l'écriture globale, dans un voisinage du diviseur,

$$D = p^* D_{\mathcal{D}} + (T_1 + \sqrt{-1}\,T_2)\frac{d^c\rho}{\rho} + \sqrt{-1}\,T_3\frac{d\rho}{\rho} + \text{perturbation}. \tag{3.12}$$

Pour rendre cette écriture parfaitement correcte, il faut en plus introduire le fibré suivant : nos bases locales orthonormées (e_i) se recollent pour donner une extension E sur X de $\mathcal{E}|_{X-\mathcal{D}}$ sur laquelle la métrique h est lisse (et il est clair ici que le fibré E est topologiquement équivalent à $\mathcal{E}$ et que $E|_{\mathcal{D}} \approx \mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}\mathcal{E}$, comme dans [3, proposition 3.6]); on a une représentation τ de l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^3$ et une représentation σ de $\mathfrak{su}_2$ dans $\mathfrak{u}(E|_{\mathcal{D}})$ qui commutent; on dispose de la GL_r-connexion $D_{\mathcal{D}}$ sur $E|_{\mathcal{D}}$ telle que τ soit parallèle (ce qui signifie que $D_{\mathcal{D}}$ se décompose dans les espaces propres de τ) ainsi que σ (ce qui signifie que $D_{\mathcal{D}}$ est essentiellement connue à partir des sous-espaces de plus haut poids de la représentation de $\mathfrak{sl}_2$). Enfin, $E|_{X-\mathcal{D}}$ est muni de la GL_r-connexion D telle que, dans un voisinage tubulaire du diviseur, étant donnée une identification unitaire $E|_{T_R} = p^*(E|_{\mathcal{D}})$, on ait la formule (3.12).

Faisons quelques commentaires sur cette formule.

(1) On pourrait, dans la définition des T_i en (3.8), remplacer ρ par la distance (pour ω_0) au diviseur, r, (cela crée une perturbation qui est $O(|\operatorname{Log} r^2|^{-1})$). De même, dans la formule (3.12), on peut remplacer $d\rho/\rho = (1/2)d\operatorname{Log}\rho^2$ par dr/r, quitte à ajouter à $D_{\mathcal{D}}$ un terme $\sqrt{-1}\,\tau_3 d\operatorname{Log}(\rho/r)$ (bien défini sur $\mathcal{D}$).

(2) Pour mieux comprendre le terme en $d^c\rho/\rho$, rappelons que $d^c|z^0|/|z^0| = d\theta$, donc il s'agit du terme qui donne la monodromie autour du diviseur; quitte à modifier à nouveau $D_{\mathcal{D}}$, la forme $d^c\rho/\rho$ pourrait être remplacée par une 1-forme de connexion sur le $\mathbb{S}^1$-fibré normal en cercles à $\mathcal{D}$, étendue sur N par homogénéité et transplantée dans T_R : on trouverait ainsi une description plus proche de celle de Kronheimer et Mrowka [19], pour les connexions unitaires en dimension 4.

(3) Rappelons que le terme de perturbation satisfait (ainsi que ses dérivées) à des décroissances différentes suivant les composantes, comme en (3.1) : les composantes à $(\lambda_i, \alpha_i) \neq (\lambda_j, \alpha_j)$ sont à décroissance en r^ε, les autres en composantes à décroissance logarithmique en $|\operatorname{Log} r^2|^{-1/2}$.

(4) Finalement, remarquons qu'il n'est pas surprenant que le modèle transversal local de nos connexions soit donné par les solutions asymptotiques aux équations de Nahm [4], c'est-à-dire par le « modèle » des fibrés de Higgs invariants par rotation sur un disque épointé.

Partie II

Espaces de connexions et analyse

Dans cette partie, nous allons préciser ce que nous entendions précédemment par « perturbation » en définissant des espaces à poids précis. Nous développerons l'analyse adéquate.

4. Espaces à poids

Supposons que E soit un fibré hermitien comme dans la section précédente, avec des représentations $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathfrak{u}(E|_{\mathcal{D}})$ et σ de $\mathfrak{su}_2$ dans $\mathfrak{u}(E|_{\mathcal{D}})$, qui commutent et qui sont parallèles par rapport à une GL_r-connexion $D_{\mathcal{D}}$ sur $E|_{\mathcal{D}}$. L'action de τ a des valeurs propres (constantes imaginaires pures) $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ et nous définissons E_ℓ comme le sous-fibré propre de $E|_{\mathcal{D}}$ pour les valeurs propres ℓ de τ, et, pour une section f de E, nous noterons $f = \oplus f_\ell$ la décomposition correspondante. On note également $\ker(\tau, \sigma)$ le sous-fibré noyau des actions de τ et σ. Moyennant une identification lisse $p^*(E|_{\mathcal{D}}) = E|_{T_R}$, on peut étendre cette décomposition dans un voisinage de $\mathcal{D}$. Enfin, on suppose $E|_{X-\mathcal{D}}$ muni d'une connexion D avec le comportement asymptotique (3.12).

Rappelons [7] que l'on peut décomposer la GL_r-connexion D en

$$D = D^+ + \psi, \tag{4.1}$$

avec D^+ une U_r-connexion et ψ une 1-forme à valeurs dans les endomorphismes auto-adjoints de E. Nous noterons ∇^+ la dérivation covariante associée à D^+ et $(\psi\otimes)$ l'opérateur

$$\Omega^i(E) \to \Omega^1 \otimes \Omega^i(E)$$

donné par le produit tensoriel sur la base et l'action de ψ sur la fibre. Enfin, on notera ∇ l'opérateur

$$\nabla = \nabla^+ \oplus (\psi\otimes) : \Omega^i(E) \longrightarrow (\Omega^1 \oplus \Omega^1) \otimes \Omega^i(E),$$

et ses généralisations naturelles sur les différentes puissances tensorielles.

4.A. DÉFINITION DES ESPACES FONCTIONNELS.

Espaces L^p. – Soit r la distance au diviseur (pour ω_0), t une fonction C^∞ sur $X - \mathcal{D}$ valant $\operatorname{Log}(-\operatorname{Log} r^2)$ près du diviseur et 0 loin du diviseur, alors on définit la norme, pour une fonction f,

$$|f|_{L^p_\delta} = \left(\int_{X-\mathcal{D}} |e^{\delta t} f|^p e^t vol \right)^{1/p}. \tag{4.2}$$

Rappelons que, près d'un point de $\mathcal{D}$, la métrique est asymptotique au produit $(\mathbb{D}, dt^2 + e^{-2t} d\theta^2) \times (U, ds^2_{\mathcal{D}})$, donc notre norme est équivalente près du diviseur à

$$\left(\int |e^{\delta t} f|^p dt d\theta vol_{\mathcal{D}} \right)^{1/p}.$$

Notant p la projection sur le diviseur, il est aussi utile de définir

$$\hat{L}^p_\delta = \{ f = \chi(t) p^* f_0 + f_1, f_0 \in L^p(\mathcal{D}), f_1 \in L^p_\delta \} \tag{4.3}$$

où χ est une fonction croissante qui vaut 0 quand $t = 0$ et 1 quand t devient grand (près du diviseur).

Pour les sections de E, nous changerons légèrement la définition de $\hat{L}^p_\delta$ par

$$\hat{L}^p_\delta(X, E) = \{ f = \chi(t) p^* f_0 + f_1, f_0 \in L^p(\mathcal{D}, \ker(\tau, \sigma)), f_1 \in L^p_\delta \} \tag{4.4}$$

et la même chose pour les formes différentielles à valeurs dans E.

Enfin, on définit

$$L^{k,p}_\delta = \{ f, \nabla^j f \in L^p_\delta \text{ pour } j \leq k \}, \tag{4.5}$$

$$\hat{L}^{k,p}_\delta = \{ f = \chi(t) p^* f_0 + f_1, f_0 \in L^{k,p}(\mathcal{D}, \ker(\tau, \sigma)), f_1 \in L^{k,p}_\delta \}. \tag{4.6}$$

Espaces Hölder. – Les espaces Hölder sont un petit peu plus compliqués à définir, puisqu'on ne peut donner qu'une définition locale. La définition qui va suivre, comme celle qui précède, peut sembler arbitraire. On verra ensuite en 4.B pourquoi elles sont naturelles.

Localement, pour une fonction f, dans le produit $\mathbb{D} \times U$ avec métrique asymptotique à $dt^2 + e^{-2t} d\theta^2 + ds^2_{\mathcal{D}}$, on peut définir pour une fonction $f = f(t, \theta, u)$:

$$\begin{aligned} |f|_{C^\vartheta} = & \sup_{t,\theta} |f(t, \theta, .)|_{C^\vartheta(U)} \\ & + \sup_{|t-t'|<1} \frac{|f(t, ., .) - f(t', ., .)|}{|t - t'|^\vartheta} + \sup_{\theta, \theta'} \frac{|f(., \theta, .) - f(., \theta', .)|}{e^{-\vartheta t} |\theta - \theta'|^\vartheta}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

et on dira qu'une fonction f sur X est dans C^ϑ si elle est dans $C^\vartheta_{\text{loc}}(X - \mathcal{D})$ et est dans l'espace local décrit ci-dessus près du diviseur. On définit aussi, comme pour les espaces L^p,

$$C^\vartheta_\delta = \{ f, e^{\delta t} f \in C^\vartheta \},$$
$$\hat{C}^\vartheta_\delta = \{ f = \chi(t) p^* f_0 + f_1, f_0 \in C^\vartheta(\mathcal{D}), f_1 \in C^\vartheta_\delta \}.$$

Pour les sections d'un fibré E, c'est la même chose, sauf qu'il faut déjà faire attention à des problèmes de poids (car le ϑ correspond déjà à une dérivée « fractionnaire » pour laquelle il faudrait tenir compte de ∇). Par conséquent, près du diviseur, pour une section f de E, on dira que $f \in C_\delta^\vartheta$ si f est localement dans l'espace Hölder ci-dessus avec de plus la condition que si $\ell \neq 0$, alors $e^{\delta+\vartheta} f_\ell \in L^\infty$ (c'est une condition supplémentaire d'annulation sur les composantes où τ agit non trivialement). A part cette différence, la suite des définitions faites en L^p s'étend en Hölder et définit les espaces $C_\delta^{k+\vartheta}$ et $\hat{C}_\delta^{k+\vartheta}$.

4.B. Localisation. – Nous expliquons plus précisément ce qui va permettre d'analyser ces espaces à poids. Nous avons déjà noté que, localement, près du diviseur, notre métrique est asymptotique au produit $\mathbb{D} \times U$, avec métrique produit $dt^2 + e^{-2t} d\theta^2 + ds_{\mathcal{D}}^2$. Le revêtement universel local n'est autre que le produit du demi-plan de Poincaré $\mathbf{\Pi}$ par U, avec métrique (la coordonnée θ couvre maintenant $\mathbb{R}$ tout entier et $s = e^t = -\operatorname{Log} r^2$)

$$dt^2 + e^{-2t} d\theta^2 + ds_{\mathcal{D}}^2 = \frac{ds^2 + d\theta^2}{s^2} + ds_{\mathcal{D}}^2.$$

Faisons un peu de géométrie dans $\mathbf{\Pi}$: notons $B_a(s,\theta)$ la boule de rayon a autour de (s,θ) dans $\mathbf{\Pi}$ et $R_a(s,\theta)$ le « rectangle »

$$(4.8) \qquad R_a(s,\theta) = \{(s',\theta'),\ |\operatorname{Log} s' - \operatorname{Log} s| < a \text{ et } |\theta - \theta'| < as\ )$$

alors on a le lemme suivant :

Lemme 4.1. – *Les rectangles R_a et les boules B_a se comparent uniformément quand a est petit : on a par exemple (sans prétention à être optimal)*

$$R_{a/2}(s,\theta) \subset B_a(s,\theta) \subset R_{a\exp a}(s,\theta)$$

indépendamment de (s,θ).

Démonstration. – C'est un exercice facile. □

Nous noterons également $R_a(t) = R_a(e^t, 0)$ et $B_a(t) = B_a(e^t, 0)$. Soit $q : \mathbf{\Pi} \to \mathbb{D}$ la projection.

Application au cas scalaire. – Nous observons à présent que, à cause du revêtement, si a est borné, par exemple $a \leq 1$, et f est une fonction sur $\mathbb{D}$, alors

$$(4.9) \qquad \left(\int_{A-a<t<A+a} |e^{\delta t} f|^p e^t vol_{\mathbb{D}} \right)^{1/p} \sim \left(\int_{R_a(A)} |e^{\delta t} q^* f|^p vol_{\mathbf{\Pi}} \right)^{1/p}$$
$$\sim e^{\delta A} \left(\int_{R_a(A)} |q^* f|^p vol_{\mathbf{\Pi}} \right)^{1/p}$$

ce qui explique la présence du e^t dans notre définition des espaces à poids.

Du coté des espaces Hölder, il n'est pas non plus difficile de vérifier que la norme C_δ^ϑ définie sur une fonction f sur $\mathbb{D} \times U$ est équivalente, par exemple, à

$$\sup_{A \in \mathbb{Z}_+} e^{\delta A} |q^* f|_{C^\vartheta(B_1(A))}.$$

A présent, nous utilisons le fait que $\mathbf{\Pi}$ est homogène, donc possède en particulier une isométrie envoyant le point $(s,0)$ sur le point $(1,0)$. En ce point, sur des boules de rayon fixe, on peut utiliser des théorèmes tels que les inclusions de Sobolev ou la régularité elliptique d'opérateurs; grâce au lemme, nous en tirerons des conclusions dans les rectangles $R_a(t)$, avec des constantes indépendantes de t, et donc finalement dans nos espaces à poids.

Un exemple immédiat d'application, dans le cas scalaire, est le lemme suivant :

LEMME 4.2. – *Si $k - n/p > 0$ n'est pas entier, alors on a les inclusions entre espaces de fonctions $L^{k,p}_\delta \subset C^{k-n/p}_\delta$ et $\hat{L}^{k,p}_\delta \subset \hat{C}^{k-n/p}_\delta$.*

Démonstration. – Le problème est purement local, il suffit donc de le regarder près du diviseur, sur $\mathbb{D} \times U$. On raisonne sur une région $A-1 < t < A+1$: ramenant tout sur le revêtement universel local $\mathbf{\Pi} \times U$, on voit que si $f \in L^{k,p}_\delta$, on contrôle $e^{\delta A} q^* f$ dans $L^{k,p}(R_1(A))$, et en se ramenant dans une boule hyperbolique fixe, on contrôle $e^{\delta A} q^* f$ dans $C^{k-n/p}$ (sur un rectangle plus petit). Cela donne le résultat. □

Nous généraliserons ce lemme de manière systématique dans la section suivante. Avant cela, il nous faut comprendre l'action de la monodromie dans la définition des espaces à poids.

Cas vectoriel : rôle de la monodromie. – Regardons à présent notre opérateur D^+. L'opérateur D^+ s'écrit essentiellement, sur une carte $\mathbb{D} \times U$,

$$D^+ = p^* D^+_\mathcal{D} + \tau_1 d\theta$$

(on a négligé le terme en σ_1 qui, borné par rapport à la métrique de Poincaré, ne change pas ce qui suit). Remarquons que, sur le revêtement universel,

$$p^* D^+_\mathcal{D} + \tau_1 d\theta = e^{-\tau_1\theta} \circ p^* D^+_\mathcal{D} \circ e^{\tau_1\theta}. \tag{4.10}$$

Rappelons que les valeurs propres ℓ_1 de τ_1 sont imaginaires pures, avec $0 \leq |\ell_1| < 1$. Ainsi, notre opérateur est conjugué, via $e^{\tau_1\theta}$, à un opérateur régulier pour la métrique de Poincaré. Or on a le lemme suivant.

LEMME 4.3. – *Pour une section f de E sur $\Delta_1 \times U$, on a, si $\ell_1 \notin i\mathbb{Z}$,*

$$|e^{\ell_1\theta} q^* f|_{C^\vartheta} \geq \sup e^{\vartheta t} |q^* f| \text{ pour } \vartheta \in \mathbb{R}_+ \tag{4.11}$$

$$|e^{\ell_1\theta} q^* f|_{L^{k,p}} \geq |e^{kt} q^* f|_{L^p}. \tag{4.12}$$

Démonstration. – En effet, pour une section f de E et $\vartheta < 1$, la condition $e^{\ell_1\theta} q^* f_{\ell_1} \in C^\vartheta$ implique

$$\sup \frac{|e^{\ell_1(\theta+2\pi)} q^* f(.,\theta+2\pi,.) - q^* f(.,\theta,.)|}{e^{-\vartheta t}(2\pi)^\vartheta} = \frac{|e^{2\pi\ell_1} - 1|}{(2\pi)^\vartheta} \sup |q^* f| e^{\vartheta t}.$$

Pour $\vartheta = 1$, $\partial/\partial\theta(e^{\ell_1\theta} q^* f) \in C^0$ implique facilement, de manière similaire, $e^t q^* f \in L^\infty$. On peut ainsi continuer par récurrence sur l'intervalle entier dans lequel se trouve ϑ, d'où la première assertion. La seconde est similaire, en s'appuyant sur l'estimée, valable sur un cercle $\mathbb{S}^1$, pour $\ell_1 \notin i\mathbb{Z}$:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \ell_1 \right) f \right|^p \geq c \int_{\mathbb{S}^1} |f|^p.$$

Cela achève la démonstration du lemme. □

Plaçons-nous toujours dans le cas où $\tau_2 = \tau_3 = 0$, si bien que les espaces à poids sont définis à l'aide du seul ∇^+, alors ce lemme nous permet de donner plusieurs descriptions équivalentes des espaces à poids introduits. Expliquons-le pour les espaces L^p : notons $\tilde{f} = e^{\tau_1\theta} q^* f$ et soit ∇_0 une dérivation covariante (sans singularité) sur E, par exemple, près de $\mathcal{D}$, celle associée à $(p^* D_{\mathcal{D}})^+$. Localement, nous avons deux descriptions pour la norme $L^{k,p}_\delta$ d'une fonction f dans l'intervalle $A - a < t < A + a$: nous pouvons dire

$$(*) \qquad |f|_{L^{k,p}_\delta(A-a<t<A+a)} \sim e^{\delta A} |\tilde{f}|_{L^{k,p}(R_a(A))}, \text{ ou encore}$$

$$(**) \qquad |f|_{L^{k,p}_\delta(A-a<t<A+a)} \sim |f_0|_{L^{k,p}_\delta} + \sum_{\ell\neq 0} \sum_{j\leq k} |e^{jt} \nabla_0^{k-j} f_\ell|_{L^p_\delta(A-a<t<A+a)}.$$

A présent, voyons comment intégrer cette description dans le cas général : ψ a alors une partie principale $\sqrt{-1}\,(\tau_2 d\theta + \tau_3 e^t dt)$, ce qui permet de voir que la description $(**)$ est encore valable. Pour obtenir l'analogue de la première, on considère le produit $\mathbb{D} \times U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec métrique (locale)

$$dt^2 + e^{-2t}(d\theta^2 + (d\theta^2)^2 + (d\theta^3)^2) + ds^2_{\mathcal{D}}.$$

C'est donc le produit de l'espace hyperbolique de dimension 4 par $\mathcal{D}$. Désignant toujours par q la projection naturelle sur $\mathbb{D} \times U$, nous considérons alors

$$\tilde{f} = e^{\tau_1\theta + \tau_2\theta^2 + \tau_3\theta^3} q^* f. \tag{4.13}$$

On a finalement le lemme suivant.

LEMME 4.4. – *Soit ∇_0 la dérivation covariante associée à une connexion lisse sur X tout entier. On a les équivalences sur $\mathbb{D} \times U$:*

$$\begin{aligned} |f|_{C^{k+\vartheta}_\delta} &\sim \sup_{A\in\mathbb{Z}_+} e^{\delta A} |\tilde{f}|_{C^{k+\vartheta}(R_1(A))} \\ &\sim |f_0|_{C^{k+\vartheta}_{\delta;\nabla_0}} + \sum_{\ell\neq 0} \sum_{0\leq j\leq k} (|e^{(j+\vartheta)t} \nabla_0^{k-j} f_\ell|_{C^0_\delta} + |e^{jt} \nabla_0^{k-j} f_\ell|_{C^\vartheta_\delta}), \\ |f|_{L^{k,p}_\delta} &\sim \Big(\sum_{A\in\mathbb{Z}_+} (e^{\delta A} |\tilde{f}|_{L^{k,p}(R_1(A))})^p \Big)^{1/p} \\ &\sim \sum_{0\leq j\leq k} (|\nabla_0^{k-j} f_0|_{L^p_\delta} + \sum_{\ell\neq 0} |e^{jt} \nabla_0^{k-j} f_\ell|_{L^p_\delta}). \end{aligned}$$

Démonstration. – Il suffit de regarder chaque composante f_ℓ, avec son relevé $\tilde{f}_\ell = \exp(\ell_1\theta + \ell_2\theta^2 + \ell_3\theta^3) q^* f_\ell$ et d'utiliser ce qui précède. □

4.C. Inclusions et multiplications. – La localisation qui précède fournit un outil efficace pour montrer les inclusions de Sobolev ou les théorèmes de multiplication nécessaires. On en déjà vu un exemple, dans le cas scalaire, par le lemme 4.2.

Lemme 4.5. – *Supposons que* $0 \leq \delta_2 < \delta_1$ *(ou bien* $\delta_2 = \delta_1$ *et* $p_2 \geq p_1$*). Soient* k_1 *et* k_2 *deux entiers positifs ou nuls. On a les inclusions continues suivantes :*

(1) *si* $k_1 - 2n/p_1 \geq k_2 - 2n/p_2$ *et* $k_1 \geq k_2$*, alors*

$$L^{k_1,p_1}_{\delta_1} \subset L^{k_2,p_2}_{\delta_2};$$

(2) *si* $k_1 - 2n/p_1 = k_2 + \vartheta$ *avec* $0 < \vartheta < 1$*, alors*

$$L^{k_1,p_1}_{\delta_1} \subset C^{k_2+\vartheta}_{\delta_2};$$

(3) *si* $k_1 + \vartheta_1 \geq k_2 + \vartheta_2$*, alors*

$$C^{k_1+\vartheta_1}_{\delta_1} \subset C^{k_2+\vartheta_2}_{\delta_2}.$$

Les inclusions ci-dessus sont encore valables entre espaces $\hat{L}$ *et* $\hat{C}$*.*

Si toutes les inégalités sont strictes (en particulier $\delta_2 < \delta_1$*), alors ces inclusions sont compactes.*

Démonstration. – Démontrons (1). On commence par le cas particulier, pour $p_2 < p_1$ et $\delta_2 < \delta_1$:

$$L^{k,p_1}_{\delta_1} \subset L^{k,p_2}_{\delta_2},$$

qui résulte de l'inégalité de Hölder ($1/p_2 = 1/p_1 + 1/r$) :

$$\left(\int |e^{\delta_2} f|^{p_2} e^t vol\right)^{1/p_2} \leq \left(\int |e^{\delta_2} f|^{p_1} e^t vol\right)^{1/p_1} \left(\int e^{r(\delta_1-\delta_2)t} e^t vol\right)^{1/r}.$$

Compte tenu de ce cas particulier, on est ramené au cas où $p_2 \geq p_1$ et $\delta_2 = \delta_1 = \delta$. Le problème est local près du diviseur, puisque le résultat est bien connu sur toute partie compacte. Mais, pour chaque $A \in \mathbb{Z}_+$, on a

$$|\tilde{f}|_{L^{k_2,p_2}(R_1(A))} \leq c|\tilde{f}|_{L^{k_1,p_1}(R_1(A))},$$

avec constante indépendante de A à cause de l'homogénéité de l'espace hyperbolique. On déduit, localement,

$$\begin{aligned}|f|^{p_2}_{L^{k_2,p_2}_\delta} &\leq c_1 \sum_A (e^{\delta A}|\tilde{f}|_{L^{k_2,p_2}(R_1(A))})^{p_2}\\ &\leq c_2 \sum_A (e^{\delta A}|\tilde{f}|_{L^{k_1,p_1}(R_1(A))})^{p_2}\end{aligned}$$

(puisque $p_2 \geq p_1$)

$$\leq c_2(\sum_A (e^{\delta A}|\tilde{f}|_{L^{k_1,p_1}(R_1(A))})^{p_1})^{p_2/p_1}$$

par le lemme 4.4

$$\leq c_3|f|^{p_2}_{L^{k_1,p_1}_\delta}.$$

Si toutes les inégalités sont strictes, et la suite (f_i) est bornée dans $L^{k_1,p_1}_{\delta_1}$, alors, par inclusion compacte sur toute partie compacte, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans L^{k_2,p_2} sur tout compact. Mais, comme ci-dessus, on a l'inégalité

$$|f|^{p_2}_{L^{k_2,p_2}_{\delta_2}} \leq c_1 \sum_A (e^{-(\delta_1-\delta_2)A}|f|_{L^{k_1,p_1}_{\delta_1}})^{p_2}$$

et on déduit la convergence, en fait, dans $L^{k_2,p_2}_{\delta_2}$ si $\delta_2 < \delta_1$.

On démontre (2) et (3) de manière similaire, à partir du lemme 4.4. □

Les théorèmes de multiplication sont évidents en Hölder : on a, de manière continue,

$$C^{k+\vartheta}_\delta \otimes C^{k+\vartheta}_\delta \longrightarrow C^{k+\vartheta}_{2\delta}$$

mais, en revanche,

$$\hat{C}^{k+\vartheta}_\delta \otimes \hat{C}^{k+\vartheta}_\delta \longrightarrow \hat{C}^{k+\vartheta}_\delta.$$

Pour les espaces L^p, c'est un peu plus compliqué, et nous ne donnerons que ce dont nous avons besoin.

LEMME 4.6. – *Si $1/q = 1/p_1 + 1/p_2$, on a la multiplication continue*

$$L^{p_1}_{\delta_1} \otimes L^{p_2}_{\delta_2} \longrightarrow L^q_{\delta_1+\delta_2}.$$

Si k est un entier et $k - 2n/p > 0$, alors $\hat{L}^{k,p}_\delta$ est une algèbre et les $\hat{L}^{j,p}_\delta$, pour $j \leq k$, sont des $\hat{L}^{k,p}_\delta$-modules.

Démonstration. – La première assertion est une simple conséquence de l'inégalité de Hölder.

Pour la seconde, nous traitons un cas particulier, laissant au lecteur le cas général : nous montrons que $\hat{L}^p_\delta$ est un $\hat{L}^{1,p}_\delta$-module. La question est à nouveau locale près du diviseur. Soient $u = p^*u_0 + u' \in \hat{L}^{1,p}_\delta$ et $v = p^*v_0 + v' \in \hat{L}^p_\delta$, on a donc $u \in L^{1,p}(\mathcal{D}) \subset C^0(\mathcal{D})$, $u' \in L^{1,p}_\delta \subset C^0_\delta$, $v \in L^p(\mathcal{D})$ et $v' \in L^p_\delta$. L'assertion voulue résulte donc des quatre multiplications $u_0v_0 \in L^p(\mathcal{D})$, $p^*u_0v' \in L^p_\delta$, $u'p^*v_0 \in L^p_\delta$ et $u'v' \in L^p_\delta$. Seule la troisième pose problème : elle résulte du fait, non explicité dans le lemme 4.5, que si $u' \in L^{1,p}_\delta$, alors on a en réalité

$$\sum_A \left(e^{\delta A}|u'|_{L^\infty(R_1(A))}\right)^p \leq c|u'|^p_{L^{1,p}_\delta}.$$

On en déduit alors aisément le contrôle sur la multiplication de u' par p^*v_0. □

5. Connexions et laplaciens

5.A. THÉORÈME GLOBAL SUR X. – Partons de E avec sa connexion D construite dans la première partie. Choisissons $p > 2n = \dim_{\mathbb{R}} X$ et définissons un espace de GL_r-connexions en posant

$$\mathcal{A} = \{D + a, a \in \hat{L}^{1,p}_\delta(\Omega^1 \otimes \operatorname{End}(E))\}. \tag{5.1}$$

On notera Δ^A le laplacien de $A = D + a$. Comme on l'a vu, la restriction $D_{\mathcal{D}}$ est un peu arbitraire et dépend d'un choix, mais ce choix étant toujours multiple d'un τ_i ne change pas l'opérateur sur $\ker(\tau, \sigma)$: nous avons ainsi une restriction bien définie $\Delta^A_{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 5.1. – *Si $\delta > 0$ est assez petit, alors Δ^A est un opérateur Fredholm, d'indice nul, dont le noyau et le conoyau sont égaux au noyau et au conoyau L^2, dans les deux cas suivants :*

$$\Delta^A : \{f \in \hat{L}^{2,p}_\delta(\Omega^i \otimes \operatorname{End}(E)), \Delta^A_{\mathcal{D}}(f|_{\mathcal{D}}) = 0\} \longrightarrow L^p_\delta(\Omega^i \otimes \operatorname{End}(E)),$$
$$\Delta^A : \hat{L}^{2,p}_\delta \longrightarrow \{g \in \hat{L}^p_\delta, g|_{\mathcal{D}} \textit{ est orthogonal } L^2 \textit{ au noyau de } \Delta^A_{\mathcal{D}}\}.$$

Les mêmes résultats sont valables dans les espaces de Hölder si $A = D + a$ avec $a \in \hat{C}^{1+\vartheta}_\delta$.

La démonstration de ce théorème va faire l'objet du reste de cette partie. Nous ne la ferons que dans le cas L^p, le cas Hölder étant très similaire.

REMARQUE 5.2. – Un théorème similaire est valable pour les autres laplaciens naturels, notamment celui associé à l'opérateur D''. On modifie facilement la démonstration qui suit en sachant que $\Delta^D - 2\Delta^{D''}$ ne contient qu'un terme linéaire en ΛF^D, qui est un élément de $\hat{L}^p_\delta$.

5.B. THÉORÈME LOCAL PRÈS DU DIVISEUR. – Nous commençons par le théorème suivant.

THÉORÈME 5.3. – *Pour R assez petit, considérons le problème sur les i-formes*

$$\Delta^A f = g \textit{ dans } T_R,$$

$$f|_{\partial T_R} = 0.$$

(Il faut bien comprendre que la condition au bord signifie que toutes les composantes de f s'annulent au bord.)

Ce problème a une unique solution f

(1) *dans $\hat{L}^{2,p}_\delta$ pour toute i-forme $g \in L^p_\delta$, avec $\Delta^A_{\mathcal{D}}(f|_{\mathcal{D}}) = 0$ (et de même en Hölder si A a la régularité adéquate);*

(2) *dans $\hat{L}^{2,p}_\delta$ pour toute i-forme $g \in \hat{L}^p_\delta$, telle que $g|_{\mathcal{D}}$ soit L^2 orthogonale au noyau de Δ^A.*

Dans tous les cas, on obtient f comme l'image de g par l'inverse L^2 de Δ^A. De plus, la norme de $(\Delta^A)^{-1}$ entre les espaces considérés reste bornée quand R tend vers 0; plus précisément, dans le cas (1),

$$\left|(-\operatorname{Log} R^2)^\delta f|_{\mathcal{D}}\right|_{L^{2,p}} + |f - p^*(f|_{\mathcal{D}})|_{L^{2,p}_\delta} \leq c|g|_{L^p_\delta}.$$

La démonstration du premier point de ce théorème sera réalisé dans la section suivante. Admettons-le pour l'instant.

Démonstration du second point. – Supposons que $g \in \hat{L}^p_\delta(T_R)$, alors on peut trouver un unique f_0 dans $L^{2,p}(\mathcal{D})$ tel que $\Delta^A_{\mathcal{D}} f_0 = g|_{\mathcal{D}}$ et f_0 soit orthogonal au noyau L^2 de $\Delta^A_{\mathcal{D}}$. On cherche alors

$$f = \chi(t) p^* f_0 + f_1,$$

donc

$$(*) \qquad \Delta^A f_1 = g - \Delta^A(\chi(t)p^* f_0)$$

avec condition au bord $f_1 = 0$; près du diviseur, sur la composante à $\ell = 0$, on a $A = p^* D_{\mathcal{D}} + a$ avec $a \in L^{1,p}_\delta$, ce qui suffit à assurer que le second membre de $(*)$ est dans L^p_δ; on applique alors la première partie du théorème 5.3 pour trouver $f_1 \in \hat{L}^{2,p}_\delta$ tel que $\Delta^A_{\mathcal{D}}(f_1|_{\mathcal{D}}) = 0$. Cela donne le résultat (l'assertion sur l'inverse L^2 provient de l'injectivité L^2 de Δ^A).

Le théorème 5.3 implique le théorème 5.1. – Le recollement d'un parametrix de Δ^A sur la partie compacte de $X - \mathcal{D}$ et de l'isomorphisme du théorème 5.3 montre que les opérateurs envisagés dans le théorème 5.1 sont des opérateurs Fredholm.

Pour la métrique ω, complète, l'opérateur Δ^A est fortement auto-adjoint et donc d'indice nul comme opérateur L^2. Le résultat est donc obtenu en vérifiant que les noyaux et conoyaux de l'opérateur L^2 et de ceux que nous regardons sont bien égaux. C'est un raisonnement de régularité, trivial à partir du théorème 5.3 :

• si $f \in L^2$ et $\Delta^A f = 0$, alors on peut couper f près du diviseur : $\Delta^A(\chi(t)f) \in C^\infty_c(X - \mathcal{D})$ et le théorème 5.3 implique que $f \in \hat{L}^{2,p}_\delta$ avec $\Delta^A f = 0$;

• de même, si $g \in L^p_\delta$ ou $g \in \hat{L}^p_\delta$ avec $g|_{\mathcal{D}}$ orthogonal au noyau de Δ^A, et g est L^2-orthogonal au noyau de Δ^A sur X, alors on voit de manière similaire, en localisant près de $\mathcal{D}$, que la solution L^2 du problème $\Delta^A f = g$ est en fait $\hat{L}^{2,p}_\delta$.

5.C. Une formule de Weitzenböck pour des connexions non unitaires

THÉORÈME 5.4. – *Notons R la courbure de la connexion de Levi-Civita, Ric sa courbure de Ricci, $F^A = A^2$ la courbure de A. On a l'égalité, pour une p-forme u à valeurs dans E, dans une base locale orthonormée (e_a) du fibré tangent TX, avec base duale (e^a), de sorte que $F^A = \sum_{a<b} F^A_{ab}$*

$$\begin{aligned}\Delta^A u = &(\nabla^+_A)^* \nabla^+_A u + (\psi \otimes)^*(\psi \otimes u) \\ &+ (D^+_A)^* \psi \cdot u + \sum_{a<b} F^A_{ab} \cdot (e^a i_{e_b} - e^b i_{e_a}) u \\ &+ \mathcal{R}(u),\end{aligned}$$

avec $\mathcal{R}(u)$ l'opérateur linéaire usuel :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(u)_{X_1,\dots,X_p} = &\sum_{j=1}^p u(X_1, \dots, Ric(X_j), \dots, X_p) \\ &+ \sum_{a=1}^n \sum_{j<k} (-1)^{j+k+1} u(e_a, R(X_j, X_k)e_a, X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_p).\end{aligned}$$

Démonstration. – Nous faisons la démonstration avec quelque soin, puisque cette formule est importante pour la démonstration du théorème 5.3. La formule est valable pour toutes les puissances tensorielles de E et nous nous placerons, par exemple, dans le cas qui nous intéresse le plus, à savoir $\operatorname{End} E$, ce qui signifie que l'on notera l'action de ψ par un crochet.

Il s'agit donc de comparer les laplaciens

$$\nabla_A^* \nabla_A = (\nabla_A^+)^* \nabla_A^+ + (\psi \otimes)^* \psi \otimes$$

et

$$D_A^* D_A + D_A D_A^*.$$

On oubliera dans la suite les indices A. Le résultat étant bien connu si A est unitaire, il faut voir comment interviennent les termes non unitaires.

Tout d'abord, posons

$$\begin{aligned} Q &= D^* D + D D^* - (D^+)^* D^+ - D^+ (D^+)^* - (\psi \wedge)^* (\psi \wedge) - (\psi \wedge)(\psi \wedge)^* \\ &= D^+ \circ (\psi \wedge)^* + (D^+)^* \circ (\psi \wedge) + (\psi \wedge)^* \circ D^+ + (\psi \wedge) \circ (D^+)^*. \end{aligned}$$

Dans une base orthonormale locale (e_a) de TM, avec base duale (e^a), on peut écrire $\psi = \sum_a \psi_a e^a$, avec les ψ_a autoadjoints. On déduit, pour une forme u à valeurs dans $\operatorname{End} E$,

$$(\psi \wedge)^* u = \sum_a [\psi_a, i_{e_a} u],$$

alors que d'autre part,

$$(D^+)^* u = - \sum_a i_{e_a} (\nabla_{e_a}^+ u),$$

et, en particulier,

$$(D^+)^* (f u) = f (D^+)^* u - i_{\operatorname{Grad} f} u.$$

On déduit de ces formules le calcul (sommations implicites)

$$\begin{aligned} Q(fu) = & f Q(u) + df \wedge [\psi_a, i_{e_a} u] - i_{\operatorname{Grad} f} [\psi_a, e^a \wedge u] \\ & - [\psi_a, i_{e_a}(df \wedge u)] - [\psi_a, e^a \wedge i_{\operatorname{Grad} f} u] \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} Q(fu) - f Q(u) = & df \wedge [\psi_a, i_{e_a} u] - [\psi_a, (i_{\operatorname{Grad} f} e^a) u - e^a \wedge i_{\operatorname{Grad} f} u] \\ & + [\psi_a, i_{e_a}(df \wedge u) - df \wedge i_{e_a} u] - [\psi_a, e^a \wedge i_{\operatorname{Grad} f} u] = 0. \end{aligned}$$

Ainsi Q est tensoriel, donc on peut le calculer au point x en se plaçant dans une base (e_a) parallèle au point x pour la connexion de Levi-Civita. On trouve alors

$$(*) \qquad \begin{aligned} (Qu)_x &= D^+ \Big(\sum_a [\psi_a, i_{e_a} u] \Big) - \sum_a i_{e_a} \nabla_{e_a}^+ [\psi, u] \\ &= \sum_{a,b} \big([D_{e_b}^+ \psi_a, e^b \wedge i_{e_a} u] - i_{e_a} [D_{e_a}^+ \psi_b, e^b \wedge u] \big) \\ &= [(D^+)^* \psi, u] + \sum_{a \neq b} [(D^+ \psi)_{ab}, i_{e_a}(e^b \wedge u)]. \end{aligned}$$

D'autre part, on calcule aisément

$$(**)\quad ((\psi\wedge)(\psi\wedge)^* + (\psi\wedge)^*(\psi\wedge))u = \sum_{a<b} [[\psi_a,\psi_b],(e^a i_{e_b} - e^b i_{e_a})u] + \sum_a [\psi_a,[\psi_a,u]]$$
$$= \sum_{a<b} [[\psi_a,\psi_b],(e^a i_{e_b} - e^b i_{e_a})u] + (\psi\otimes)^*(\psi\otimes)u$$

et enfin, en appliquant la formule du théorème à la connexion unitaire D^+ (cas connu)

$$(***)\quad ((D^+)^*D^+ + D^+(D^+)^*)u = (\nabla^+)^*\nabla^+ u + \sum_{a<b}[F^+_{ab},(e^a i_{e_b} - e^b i_{e_a})u] + \mathcal{R}(f).$$

En sommant $(*)$, $(**)$ et $(***)$, on obtient finalement le théorème, puisque la courbure s'écrit $F = F^+ + D^+\psi + \psi\wedge\psi$. $\square$

6. Démonstration du point 1 du théorème 5.3

Rappelons que sur T_R, le fibré E est décomposé en espaces propres pour l'action de τ,

$$E = \oplus_\ell E_\ell \tag{6.1}$$

et qu'on a fixé une identification $E_\ell = p^*(E_\ell|_{\mathcal{D}})$.

Pour démontrer le théorème 5.3, nous allons faire une série d'approximations, qui ne changeront pas l'inversibilité de notre opérateur.

Choisissons une 1-forme de connexion η sur le fibré en cercles normal au diviseur (par exemple celle induite par $d^c\rho/\rho$) et propageons la sur T_R.

Nous considérerons la métrique sur la base

$$ds_0^2 = p^*ds^2_{\mathcal{D}} + dt^2 + e^{-2t}\eta^2. \tag{6.2}$$

Cette métrique ne diffère de ω que par des termes $O(e^{-t})$ ainsi que leurs dérivées. Faire ce changement ne change donc pas l'inversibilité de Δ^A si R devient assez petit (puisque l'on va montrer que la norme de l'inverse reste bornée indépendamment de R).

D'autre part, nous ne regarderons que l'opérateur

$$D_0 = p^*D_{\mathcal{D}} + (T_1 + \sqrt{-1}\,T_2)\eta + \sqrt{-1}\,T_3\frac{dr}{r} \tag{6.3}$$

avec $T_i = \tau_i + \sigma_i/\operatorname{Log} r^2$. Constatons que

$$A = D_0 + (\tau_1 + \sqrt{-1}\,\tau_2)\left(\eta - \frac{d^c\rho}{\rho}\right) + \sqrt{-1}\,\tau_3\left(\frac{dr}{r} - \frac{d\rho}{\rho}\right) + a$$

avec $a \in L^{1,p}_\delta$.Les termes en les τ_i (qui sont bornés ainsi que leurs dérivées) n'agissent que sur les composantes à $\ell \neq 0$ et sont d'ordre 1 : dans le laplacien $\hat{L}^{2,p}_\delta \to L^p_\delta$, ils donnent donc des termes $O(e^{-t})$ et ne perturbent pas l'inversibilité. Il en est de même pour le terme $a \in L^{1,p}_\delta$ grâce aux théorèmes de multiplication.

Finalement, nous sommes ramenés à regarder le laplacien de D_0 pour la métrique de ds_0^2. Nous omettrons à présent les indices « 0 ».

Dans cette opération d'approximation, nous avons gagné deux choses. Premièrement, l'opérateur D, et donc son laplacien, respectent la décomposition (6.1) et on est ainsi ramené à un problème sur chaque composante E_ℓ. Deuxièmement, l'opérateur D et la métrique (donc aussi Δ^D) sont invariants par rotation autour du diviseur (la rotation est définie sur les fibres de N, puis dans T_R via p). Cela nous permet de décomposer une section f de E en

$$f = f^{\mathbb{S}^1} + f^{\neq 0}, \tag{6.4}$$

avec $f^{\mathbb{S}^1}$ invariant par rotation et $f^{\neq 0}$ orthogonal aux constantes sur chaque cercle. Le laplacien respecte aussi cette décomposition.

6.A. Cas de la composante $\ell = 0$ invariante par rotation. – Nous regardons ici le laplacien agissant sur $f_0^{\mathbb{S}^1}$. Puisque nous sommes invariants sous l'action de $\mathbb{S}^1$, nous avons des objets en réalité définis sur

$$T_R/\mathbb{S}^1 = (A, +\infty) \times \mathcal{D}$$

avec une métrique asymptotique (en $O(e^{-t})$ ainsi que ses dérivées) à la métrique cylindrique

$$dt^2 + ds_{\mathcal{D}}^2,$$

mais un élément de volume $e^{-t} dt vol_{\mathcal{D}}$ issu de T_R. Comme précédemment, pour l'étude de l'inversibilité de Δ^D, nous pouvons nous contenter de regarder cette métrique. Alors, on voit que, pour ce produit,

$$\Delta^D = -\partial_t^2 + \partial_t - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2) + D_{\mathcal{D}}^* D_{\mathcal{D}} + D_{\mathcal{D}} D_{\mathcal{D}}^*. \tag{6.5}$$

Remarquons que, en terme de la représentation de $\mathfrak{sl}_2$, le Casimir

$$-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2) = H^2 + 2(XY + YX)$$

est diagonalisable, à valeurs propres positives ou nulles (et la valeur propre 0 correspond au noyau de l'action de σ). Notons h^2 une de ces valeurs propres, l'opérateur sur l'espace propre correspondant est donc

$$\Delta^D = -\partial_t^2 + \partial_t + h^2 + D_{\mathcal{D}}^* D_{\mathcal{D}} + D_{\mathcal{D}} D_{\mathcal{D}}^*. \tag{6.6}$$

Résolution L^2. – Commençons par résoudre le problème dans les espaces L^2.

Lemme 6.1. – *Si $f(A) = 0$ quand $\delta < 0$ ou $f(+\infty) = 0$ quand $\delta > 0$, alors*

$$\int_{(A,+\infty)} |\partial_t f|^2 e^{2\delta t} dt \geq \delta^2 \int_{(A,+\infty)} |f|^2 e^{2\delta t} dt.$$

Démonstration. – C'est une banale intégration par parties. □

Supposons que f vérifie la condition au bord $f|_{\partial T_R} = 0$. Alors,

$$\int < \Delta^D f, f > e^{-t} dtvol_{\mathcal{D}} = \int \left(|\partial_t u|^2 + h^2|u^2| + |D_{\mathcal{D}}u|^2 + |D^*_{\mathcal{D}}u|^2\right) e^{-t} dtvol_{\mathcal{D}}$$
$$\geq (1+h^2) \int |u|^2 e^{-t} dtvol_{\mathcal{D}}$$

et en fait, plus généralement,

$$\int < \Delta^D u, u > e^{2\delta t} dtvol_{\mathcal{D}} \geq \left(h^2 - 4\delta(1+\delta)\right) \int |u|^2 e^{2\delta t} dtvol_{\mathcal{D}}.$$

Cela implique immédiatement que Δ^D est un isomorphisme tant que $\delta(1+\delta) < h^2/4$, donc, au minimum, quand $\delta \in (-1, 0)$ si $h = 0$.

Application des résultats de Lockart et McOwen. – Notre opérateur Δ^D est elliptique invariant par translation sur le cylindre et nos espaces à poids $L^{k,p}_\delta$ se restreignent, dans ce cas, aux Sobolev usuels sur les cylindres. On peut alors appliquer les résultats de Lockart et McOwen [21] sur l'indice de $\Delta^D : L^{2,p}_\delta \to L^p_\delta$ (noter que cet indice ne dépend pas de p):

(1) dans le cas $h > 0$, il n'y a pas de poids critique dans un intervalle contenant strictement $(-1, 0)$, en fait l'intervalle $(-1/2 - (1+h^2)^{1/2}/2, -1/2 + (1+h^2)^{1/2}/2)$, donc l'opérateur ne change pas d'indice dans cet intervalle, donc est un isomorphisme $L^{2,p}_\delta \to L^p_\delta$ par la résolution L^2;

(2) dans le cas $h = 0$, il y a un poids critique en 0 si le laplacien sur la tranche $\mathcal{D}$ possède un noyau; s'il n'en possède pas, on est ramené au cas précédent; sinon, puisque l'indice est nul quand $-1 < \delta < 0$, il devient, pour $\delta > 0$ assez petit, $-\dim\ker\Delta^D_{\mathcal{D}}$; ceci est un indice $L^{2,p}_\delta \to L^p_\delta$, donc on obtient bien un opérateur d'indice nul

$$\{f \in \hat{L}^{2,p}_\delta, \Delta^D_{\mathcal{D}}(f|_{\mathcal{D}}) = 0, f|_{\partial T_R} = 0\} \longrightarrow L^p_\delta$$

qui est un isomorphisme puisque l'espace de départ est inclus dans L^2.

Le fait que le problème soit invariant par translation entraîne bien l'assertion sur la norme de $(\Delta^D)^{-1}$.

6.B. Cas des autres composantes. – Nous regardons à présent les composantes f_ℓ avec $\ell \neq 0$ ou f orthogonale aux constantes sur les cercles autour de $\mathcal{D}$.

Résolution L^2. – A nouveau, il est utile de commencer par la démonstration dans les espaces L^2.

Lemme 6.2. – *Pour ces composantes, on a la propriété*

$$\int_{\mathbb{S}^1} |\nabla_D f|^2 = \int_{\mathbb{S}^1} |\nabla^+_D f|^2 + |\psi \otimes f|^2 \geq c^2 e^{2t} \int_{\mathbb{S}^1} |f|^2.$$

Démonstration. – Notons que D restreint à une fibre de la projection p est $d + (T_1 + \sqrt{-1}\,T_2)d\theta + \sqrt{-1}\,T_3 e^t dt$. Il faut distinguer les différents types de composante :

• si ℓ_2 ou ℓ_3 sont non nuls, le résultat est clair à partir du terme faisant intervenir ψ;

- dans les autre cas, cela vient de l'inégalité

$$\int_{\mathbb{S}^1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \ell_1 \right) f \right|^2 d\theta \geq c(\ell_1)^2 \int_{\mathbb{S}^1} |f|^2 d\theta,$$

qui est valable, ou bien quand $\ell_1 \notin i\mathbb{Z}$, ou bien quand $\ell_1 = 0$ mais $\int_{\mathbb{S}^1} f d\theta = 0$. Cela donne le lemme. □

Appliquons à présent la formule de Weitzenböck du théorème 5.4. Nous en retenons

$$\Delta^D f = \nabla_D^* \nabla_D f + \mathcal{L}(f), \tag{6.7}$$

avec $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire borné en f, car les termes singuliers de la connexion deviennent bornés dans $(D^+)^*\psi$ et F^D. Par le lemme précédent, on déduit une inégalité

$$\int < \Delta^D f, f > vol \geq c^2 \int e^{2t} |f|^2 vol$$

et, plus généralement, on obtient facilement

$$\int < \Delta^D f, f > e^{2\delta t} vol \geq c^2 \int e^{2(\delta+1)t} |f|^2 vol.$$

On déduit de cette estimée la résolution, pour ces composantes, du problème $\Delta^D f = g$ avec $f|_{\partial T_R} = 0$ et une estimée, indépendante de R,

$$\int |f|^2 e^{2(\delta+2)t} vol \leq c^2 \int |g|^2 e^{2\delta t} vol. \tag{6.8}$$

Régularité elliptique. – Pour mieux comprendre le lemme qui va suivre, rappelons-nous que, pour les composantes que nous regardons, on a

$$|f|_{L^{2,p}_\delta} \sim |e^{2t} f|_{L^p_\delta} + |e^t \nabla_0 f|_{L^p_\delta} + |\nabla_0^2 f|_{L^p_\delta},$$

où ∇_0 est la dérivation covariante associée, par exemple, à la connexion $(p^* D_{\mathcal{D}})^+$.

Soit χ_0 une fonction dans $C_c^\infty(-1, 1)$ telle que $\chi_0(t) = 1$ si $t < 1/2$, posons $\chi_A(t) = \chi_0(t - A)$ et $\gamma_A(t) = \chi_0((t - A)/2)$.

LEMME 6.3. – *On a l'estimée elliptique locale*

$$|\chi_A f|_{L^{2,p}_\delta} \leq c(|\gamma_A \Delta^D f|_{L^p_\delta} + |\gamma_A f|_{L^2_\delta}).$$

Démonstration. – C'est une conséquence de notre localisation : localement, en rajoutant des variables θ^2 et θ^3 et en prenant un revêtement, l'opérateur Δ^D, compte tenu de la formule de Weitzenböck, se désingularise sur $\tilde{f} = \exp(\sum \tau_i \theta^i) q^* f$ et nos normes à poids correspondent bien aux normes L^p dans le revêtement.

On applique donc le résultat habituel de régularité

$$|\tilde{f}|_{L^{2,p}(B_a(A))} \leq c(|\tilde{f}|_{L^2(B_{2a}(A))} + |\Delta \tilde{f}|_{L^p(B_{2a}(A))})$$

avec une constante c indépendante de A à cause de l'homogénéité et on en déduit, grâce au lemme 4.1, une estimée qui contrôle ce qui se passe dans $R_{a/2}(A)$ par les données sur

$R_{2a\exp(2a)}(A)$; en prenant a assez petit et en recouvrant le domaine $A-1<t<A+1$ par de plus petits rectangles, on en déduit le résultat. $\square$

Il est intéressant de noter, bien que nous n'utiliserons pas ce fait, que ce lemme produit à partir d'une borne L^p_δ sur f et $\Delta^D f$, une borne $L^p_{\delta+2}$ sur f.

Fin de la démonstration. – La démonstration du théorème se déduit de la résolution L^2 pour tous poids δ et de la régularité elliptique (*cf.* Mazya-Plamenevskii [23]).

Nous montrons que l'inverse L^2 marche aussi dans L^p, pour $p\geq 2$. Soit $(\zeta_A)_{A\in\mathbb{Z}_+}$ une partition de l'unité subordonnée aux intervalles $(A-1,A+1)$. On a

$$\begin{aligned}|\gamma_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)|_{L^2_{\delta+2}} &\leq e^{(\delta-\delta_1)A}|\gamma_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)|_{L^2_{\delta_1+2}}\\ &\leq e^{(\delta-\delta_1)A}|\zeta_B g|_{L^2_{\delta_1}}\\ &\leq e^{(\delta-\delta_1)A}|\zeta_B g|_{L^p_{\delta_1}}\\ &\leq e^{(\delta-\delta_1)(A-B)}|\zeta_B g|_{L^p_\delta}.\end{aligned}$$

Prenons, pour chaque A, $\delta-\delta_1=\varepsilon\,\mathrm{signe}\,(A-B)$, on obtient

$$|\zeta_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)|_{L^2_{\delta+2}}\leq ce^{-\varepsilon|A-B|}|\zeta_B g|_{L^p_\delta}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}|f=(\Delta^D)^{-1}g|_{L^p_{\delta+2}} &= \left|\sum_{A,B}\zeta_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)\right|_{L^p_{\delta+2}}\\ &\leq \left(\sum_A\left|\sum_B\zeta_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)\right|^p_{L^p_{\delta+2}}\right)^{1/p}\\ &\leq \left[\sum_A\left(\sum_B\left|\zeta_B(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)\right|_{L^p_{\delta+2}}\right)^p\right]^{1/p}\end{aligned}$$

mais, par régularité locale,

$$\begin{aligned}\text{si}\,|A-B|<2,\ |\zeta_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)|_{L^p_{\delta+2}} &\leq c(|\zeta_B g|_{L^p_\delta}+|\gamma_A(\Delta^D)^{-1}(\gamma_B g)|_{L^2_{\delta+2}})\\ &\leq c|\zeta_B g|_{L^p_\delta}\\ \text{si}\ |A-B|\geq 2, |\zeta_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)|_{L^p_{\delta+2}} &\leq c|\gamma_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)|_{L^2_{\delta+2}}\\ &\leq ce^{-\varepsilon|A-B|}|\zeta_B g|_{L^p_\delta}\end{aligned}$$

et dans tous les cas

$$|\zeta_A(\Delta^D)^{-1}(\zeta_B g)|_{L^p_{\delta+2}}\leq ce^{-\varepsilon|A-B|}|\zeta_B g|_{L^p_\delta}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}|(\Delta^D)^{-1}g|_{L^p_{\delta+2}} &\leq c\left[\sum_A\left(\sum_B e^{-\varepsilon|A-B|}|\zeta_B g|_{L^p_\delta}\right)^p\right]^{1/p}\\ &\leq c\left(\sum_B|\zeta_B g|^p_{L^p_\delta}\right)^{1/p}\quad\text{par convolution}\\ &\leq c|g|_{L^p_\delta},\end{aligned}$$

puis immédiatement, par régularité elliptique,

$$|(\Delta^D)^{-1}g|_{L^{2,p}_\delta} \leq c|g|_{L^p_\delta},$$

ce qui assure l'estimation souhaitée (indépendamment de R).

Partie III

Métriques de Hermite-Einstein

Dans cette partie, nous démontrons l'existence d'une métrique de Hermite-Einstein, avec comportement asymptotique adéquat, sur un fibré de Higgs logarithmique avec certaines conditions de stabilité.

7. Formules de Chern-Weil

Nous partons d'un fibré de Higgs logarithmique $(\mathcal{E}, \phi)$, à partir duquel ont été construits le fibré E muni d'une connexion D et un espace $\mathcal{A} = \{D + a, a \in \hat{L}^{1,p}_\delta\}$ de connexions adaptées à la structure parabolique.

D'autre part, nous noterons $\mathcal{D} = \cup_{\mathfrak{a}} \mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$ les différentes composantes de $\mathcal{D}$, $N_{\mathfrak{a}}$ le fibré normal de $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$ et $\alpha_{\mathfrak{a}}$ l'endomorphisme de $\oplus_\alpha \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_{\mathfrak{a}}$ donné par multiplication par α sur $\mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_{\mathfrak{a}}$.

Nous commençons par un lemme utile sur les valeurs propres du résidu du champ de Higgs.

LEMME 7.1. – *Si une composante $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$ de $\mathcal{D}$ est telle que $deg_{\omega_0}(N_{\mathfrak{a}}) \neq 0$, alors les valeurs propres du résidu du champ de Higgs sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$ sont nulles.*

Démonstration. – Considérons le fibré $\mathcal{E}_\lambda$, muni du champ de Higgs homogène ϕ_λ. La trace $\mathrm{tr}\,\phi_\lambda$ est donc une 1-forme homogène sur l'espace total de $\pi : N_{\mathfrak{a}} \to \mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$, avec résidu $\lambda \dim \mathcal{E}_\lambda$.

D'autre part, on dispose d'une section tautologique, σ, de

$$\pi^* N_{\mathfrak{a}} \to N_{\mathfrak{a}},$$

qui s'annule sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} \subset N_{\mathfrak{a}}$. En utilisant la métrique $|\cdot|$ sur $N_{\mathfrak{a}}|_{\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}}$, on peut alors définir une fonction 1-homogène sur $N_{\mathfrak{a}}$,

$$\rho_{N_{\mathfrak{a}}} = |\sigma|, \tag{7.1}$$

et on voit que $\partial \,\mathrm{Log}\, \rho^2_{N_{\mathfrak{a}}}$ est une (1,0)-forme homogène, non holomorphe en général, sur $N_{\mathfrak{a}} - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$, avec

$$\overline{\partial}\partial \,\mathrm{Log}\, \rho^2_{N_{\mathfrak{a}}} = \pi^* R^{N_{\mathfrak{a}}}.$$

Par conséquent, sur $N_{\mathfrak{a}}$, la (1,0)-forme

$$\varphi = \operatorname{tr}\phi_\lambda - \lambda(\dim \mathcal{E}_\lambda)\partial \operatorname{Log}\rho_{N_{\mathfrak{a}}}^2$$

est homogène, avec résidu 0 sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$, donc en fait définit une (1,0)-forme sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$.

Regardons à présent la 2-forme homogène sur $N_{\mathfrak{a}}$

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\partial}\operatorname{tr}\phi_\lambda &= \overline{\partial}\varphi + \lambda(\dim \mathcal{E}_\lambda)\overline{\partial}\partial \operatorname{Log}\rho_{N_{\mathfrak{a}}}^2 \\ &= \overline{\partial}\varphi + \lambda(\dim \mathcal{E}_\lambda)R^{N_{\mathfrak{a}}}. \end{aligned}$$

L'égalité est en fait valable sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$ et, en intégrant contre ω_0^{n-2}, on déduit

$$\lambda deg_{\omega_0}(N_{\mathfrak{a}}) = 0,$$

ce qui démontre le lemme. □

PROPOSITION 7.2. – *Si A est une connexion dans $\mathcal{A}$, alors*

$$(1) \qquad -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_X \operatorname{tr}(F^A)\wedge\omega^{n-1} = c_1(\mathcal{E})[\omega_0]^{n-1} + \sum_{\mathfrak{a}} \operatorname{tr}(\alpha_{\mathfrak{a}})\langle[\omega_0]^{n-1},[\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}]\rangle,$$

$$\begin{aligned} (2) \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_X \operatorname{tr}(F^A\wedge F^A)\wedge\omega^{n-2} &= \left(c_2(\mathcal{E}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{E})^2\right)[\omega_0]^{n-2} \\ &\quad - \sum_{\mathfrak{a}}\sum_{0\le\alpha<1} \alpha\, deg_{\omega_0}(\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}|_{\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}}) - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}} \operatorname{tr}(\alpha_{\mathfrak{a}}^2)\, deg_{\omega_0}(N_{\mathfrak{a}}). \end{aligned}$$

DÉFINITION 7.3. – *La quantité (1) ci-dessus est appelée le degré parabolique de $\mathcal{E}$ et notée $p\text{-}deg_{\omega_0}(\mathcal{E})$. On notera aussi $p\text{-}\mu_{\omega_0}(\mathcal{E})$ le quotient du degré parabolique de $\mathcal{E}$ par son rang, et $p\text{-}ch_{2,\omega_0}$ l'opposé de la quantité (2) ci-dessus.*

Démonstration. – Tout d'abord, comme F^A est toujours dans $\hat{L}_\delta^p$, il est standard de constater qu'il suffit de montrer ces formules pour la connexion de référence D. De même, on voit aussi que les termes faisant intervenir σ ne contribuent pas : on peut donc supposer $\sigma = 0$.

Ensuite, on voit qu'on peut remplacer ω par ω_0 dans les intégrales : la différence est en effet $(1/2)dd^c \operatorname{Log}\operatorname{Log}^2\rho^2$, mais $d^c \operatorname{Log}\operatorname{Log}^2\rho^2$ est borné et la formule de Stokes montre encore le résultat.

Enfin, rappelons que l'on peut écrire

$$D = D_0 + (T_1 + \sqrt{-1}\,T_2)\chi\frac{d^c\rho}{\rho} + \sqrt{-1}\,T_3\chi\frac{d\rho}{\rho}$$

avec D_0 une connexion sur E au-dessus de X tout entier et les $T_i = \tau_i$ (puisque $\sigma = 0$) bien définis sur le support de χ, donc

$$F = D_0^2 + D_0\chi((\tau_1 + \sqrt{-1}\,\tau_2)d^c \operatorname{Log}\rho + \sqrt{-1}\,\tau_3 d\log\rho).$$

Attaquons à présent la première formule : puisque $F = R_h^{\mathcal{E}} + [\phi, \phi^*] + d'\phi + d''\phi^*$, on a

$$\operatorname{tr}(F) \wedge \omega_0^{n-1} = \operatorname{tr}(R) \wedge \omega_0^{n-1},$$

avec

$$\begin{aligned} d_h^{\mathcal{E}} &= D_0^+ + T_1 \chi d^c \operatorname{Log} \rho, \\ \operatorname{tr} R_h^{\mathcal{E}} &= \operatorname{tr}((D_0^+)^2) + d(\operatorname{tr}(T_1)\chi d^c \operatorname{Log} \rho). \end{aligned}$$

Maintenant, il est très facile de voir que la forme $\varpi = d(\chi d^c \operatorname{Log} \rho)$ représente -2πP.D.$\mathcal{D}$ (P.D. est le dual de Poincaré), car, si φ est fermée,

$$\int_X \varpi \wedge \varphi = \lim_{R \to 0} \int_{\partial(X - T_R)} \chi d^c \operatorname{Log} \rho \wedge \varphi = -2\pi \int_{\mathcal{D}} \varphi,$$

et on déduit de même que $d(\operatorname{tr}(T_1)\chi d^c \operatorname{Log} \rho)$ représente $-2\pi \operatorname{tr}(\tau_1)$P.D.$\mathcal{D}$, d'où la formule (1).

Passons à présent à la seconde formule. On raisonne de manière similaire. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(F \wedge F) = {} & \operatorname{tr}(D_0^2 \wedge D_0^2) + 2d(\chi \operatorname{tr}(D_0^2 \wedge ((\tau_1 + \sqrt{-1}\,\tau_2) d^c \operatorname{Log} \rho + \sqrt{-1}\,\tau_3 d \operatorname{Log} \rho))) \\ & + \operatorname{tr}((D_0 \chi((\tau_1 + \sqrt{-1}\,\tau_2) d^c \operatorname{Log} \rho + \sqrt{-1}\,\tau_3 d \operatorname{Log} \rho))^2) \end{aligned}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(F \wedge F) \wedge \omega_0^{n-2} = & - ch_2(E) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{tr}(D_0^2(\tau_1 + \sqrt{-1}\,\tau_2)) \wedge \omega_0^{n-2} \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{tr}((\tau_1 + \sqrt{-1}\,\tau_2)^2 dd^c \operatorname{Log} \rho) \wedge \omega_0^{n-2}. \end{aligned}$$

Sachant que le résultat est réel, on déduit la formule (2) en prenant la partie réelle, en décomposant les intégrales sur le diviseur sur les différents $\mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda$, en tenant compte de la formule $dd^c \operatorname{Log} \rho = -\sqrt{-1}\, R^N$ et du lemme 7.1. $\square$

REMARQUE 7.4. – Les parties imaginaires, nécessairement nulles, que l'on a négligées dans les formules précédentes, sont des morceaux des conditions qu'impose le fait que ϕ soit méromorphe, dont on a d'ailleurs vu un exemple dans le lemme 7.1. Un autre exemple est la condition, sur une surface de Riemann, que la somme des résidus d'une 1-forme méromorphe soit nulle. Ici, en considérant $d''\phi \wedge \omega^{n-1}$, on peut montrer que

$$\sum_{\mathfrak{a}} \operatorname{tr}(\lambda_{\mathfrak{a}}) < [\omega_0]^{n-1}, [\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}] >= 0.$$

8. Métrique de Hermite-Einstein

8.A. ÉNONCÉ DU THÉORÈME. – Nous pouvons à présent énoncer le théorème d'existence. On dira que $(\mathcal{E}, \phi)$ est stable si tout sous-faisceau saturé non trivial de $\mathcal{E}$, stable par ϕ, admet une pente (parabolique) strictement inférieure à celle de $\mathcal{E}$. Partant de la métrique initiale h construite dans la première partie, on va construire une métrique de Hermite-Einstein h' sur $(\mathcal{E}, \phi)$, c'est-à-dire, comme il a déjà été vu, que si l'on note $d_{h'}^{\mathcal{E}}$ la connexion métrique associée au fibré holomorphe $\mathcal{E}$ et à la métrique h', on note $D = d_{h'}^{\mathcal{E}} + \phi + \phi^*$, $F_{h'}^{(\mathcal{E},\phi)} = F^D$ la courbure D^2 et on cherche à résoudre $\Lambda F^D =$ constante.

Pour bien comprendre quelles seront les propriétés asymptotiques de h', nous définissons un groupe de jauge complexe

$$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \{g \text{ à valeurs dans } GL(E), \nabla g g^{-1} \in \hat{C}_{\delta}^{1+\vartheta}\}, \tag{8.1}$$

et un espace de métriques qui ont le même comportement asymptotique que h :

$$\mathcal{H} = \{h'(x,y) = h(gx, gy), g \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}\}. \tag{8.2}$$

On peut aussi écrire $h' = g^* g$.

Rappelons que l'on peut regarder la question des deux points de vue équivalents suivants :

(1) chercher une métrique de Hermite-Einstein sur le fibré de Higgs $(\mathcal{E}, \phi)$;

(2) la métrique h étant fixée, faire agir le groupe de jauge complexe $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ sur $(\mathcal{E}, \phi)$ et chercher dans l'orbite complexe une orbite unitaire (pour le groupe de jauge unitaire $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$) constituée de connexions de Yang-Mills-Einstein.

Le lien entre les deux points de vue est trivial : si $h' = g^* g$, alors on a

$$F_{h'}^{(\mathcal{E},\phi)} = g^{-1} F_h^{g(\mathcal{E},\phi)} g. \tag{8.3}$$

Ainsi, du point de vue de la régularité, trouver une métrique dans $\mathcal{H}$ est équivalent à trouver une connexion dans $\mathcal{A}$ (défini en Hölder).

THÉORÈME 8.1. – *Soit $(\mathcal{E}, \phi)$ soit un fibré de Higgs logarithmique, p-μ_{ω_0}-stable, tel que, sur chaque composante de $\mathcal{D}$, les fibrés de Higgs primitifs $(P_k \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda, P_k \phi_{\alpha,\lambda})$ soient polystables, de pente p-$\mu_{\omega_0}(\mathcal{E}) - \alpha\, deg_{\omega_0}(N)$.*

Alors il existe dans $\mathcal{H}$ une unique (à une constante près) métrique h' de Hermite-Einstein, c'est-à-dire vérifiant

$$\Lambda F_{h'}^{(\mathcal{E},\phi)} = -2\pi\sqrt{-1}\, p\text{-}\mu_{\omega_0}(\mathcal{E}).$$

La démonstration que nous ferons est une adaptation, basée sur la théorie qui vient d'être développée, de la démonstration telle qu'elle est écrite dans Simpson [27]. Dans la démonstration, nous nous référerons implicitement toujours à cet article de Simpson.

REMARQUE 8.2. – Examinons le cas d'un fibré en droites $\mathcal{L}$, sans champ de Higgs ni structure parabolique. Munissons le d'une métrique initiale h_0, lisse sur X tout entier. Le théorème cherche alors une métrique $h = h_0 e^{2u}$, avec $\Delta u = -\sqrt{-1}\,(\Lambda F_0 +$

$2\pi\sqrt{-1}\,\mu_{\omega_0}(\mathcal{L})$). Or on peut toujours trouver dans L^2 un tel u, si bien que l'hypothèse du théorème $\mu_{\omega_0}(\mathcal{L}|_{\mathcal{D}}) = \mu_{\omega_0}(\mathcal{L})$ peut sembler inutile.

En réalité, en général, un tel u sera singulier près du diviseur (il y aura des termes en $\operatorname{Log}|\operatorname{Log} r|$), sauf dans le cas où $\mu_{\omega_0}(\mathcal{L}|_{\mathcal{D}}) = \mu_{\omega_0}(\mathcal{L})$, où on peut trouver u borné.

Pour un fibré de Higgs général, il est possible que l'on puisse résoudre l'équation sans condition sur le spécialisé du fibré au-dessus du diviseur, mais la solution ne serait vraisemblablement pas mutuellement bornée avec notre métrique initiale h.

Dans le cas où l'on veut obtenir une connexion plate, la condition sur les pentes des $P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$ sont nécessaires (*voir* la remarque11.3), ainsi, très probablement, que la condition de stabilité. C'est ce cas qui motive notre construction.

REMARQUE 8.3. – On a énoncé le théorème avec des conditions Hölder sur la métrique, plus agréables (et plus fortes) que des bornes L^p. Pour autant, on n'a pas prétendu donner un espace optimal. On pourrait en effet montrer que certaines composantes de la solution (par exemple celles à $\ell \neq 0$) ont une décroissance bien plus forte que celle indiquée par l'appartenance à l'espace $\mathcal{H}$.

8.B. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8.1. – Rappelons que chaque $P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$, muni de $P_k\phi_{\alpha,\lambda}$, est un fibré de Higgs d'un type un peu particulier, puisque $P_k\phi_{\alpha,\lambda}$ est une 1-forme homogène sur l'espace total du fibré normal, avec résidu λ. Cependant, $[\phi,\phi^*]$ est bien définie comme 2-forme sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\operatorname{End} E$. Il est facile de voir que, sous l'hypothèse de stabilité, le théorème de Simpson s'étend de manière standard à cette situation, pour donner une métrique h_0 telle que sur $\mathcal{D}$, puisque $\mu_{\omega_0}(P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda) = \mu_{\omega_0}(\mathcal{E}) - \alpha\, deg_{\omega_0}(N)$,

$$\Lambda F = -2\pi\sqrt{-1}\,\mu_{\omega_0}(\mathcal{E}) - \alpha\Lambda R^N,$$

où R^N est la courbure du fibré normal N pour la métrique $|\cdot|$ sur $[\mathcal{D}]$ que nous avions choisie au départ. Notons que l'on pourrait choisir ΛR^N constante sur chaque composante de $\mathcal{D}$.

A partir de là, la courbure de la métrique h construite dans la partie 1 vérifie, d'après la formule (3.7), $\Lambda F + 2\pi\sqrt{-1}\,\mu_{\omega_0}(\mathcal{E}) \in C^{\vartheta}_{\delta}$.

Par le théorème 5.1, on peut modifier $\det(h)$ de sorte que $\operatorname{tr}(\Lambda F + 2\pi\sqrt{-1}\,\mu_{\omega_0}(\mathcal{E})) = 0$ sur X. On considérera dans la suite uniquement des métriques avec le même déterminant que h. Pour simplifier l'écriture, on supposera $\mu_{\omega_0}(\mathcal{E}) = 0$.

Nous allons chercher une métrique h' qui ne modifie pas le comportement sur le diviseur, donc qui ne change la métrique sur chaque fibré primitif $P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$ que par une constante. Cela nous amène à définir un groupe de jauge restreint en demandant que la restriction de g au diviseur soit parallèle dans chaque sous-espace primitif :

$$\mathcal{G}_0^{\mathbb{C}} = \{g \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}, \det g = 1, D_{\mathcal{D}}(g|_{\mathcal{D}}) = 0\}. \tag{8.4}$$

On cherche donc une métrique dans

$$\mathcal{H}_0 = \{g^*g, g \in \mathcal{G}_0^{\mathbb{C}}\}. \tag{8.5}$$

A ce niveau, les normes Hölder ne sont plus adéquates pour traiter le problème, et nous sommes obligés d'utiliser les normes L^p pour p assez grand, $p > 2n$, qui sont plus faibles.

Nous sous-entendons donc dans la suite que $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{G}_0^{\mathbb{C}}$ sont définis en L^p. Ils vérifient quand même les propriétés adéquates de multiplication par le lemme 4.6.

Nous ne réécrivons pas la fonctionnelle de Donaldson $M(h,h')$ (*cf.* Simpson), mais nous nous contentons de constater qu'elle est bien définie dans $\mathcal{H}_0$, et qu'elle vérifie les propriétés habituelles (car les intégrations par parties sont possibles pour les métriques de $\mathcal{H}_0$). Nous choisissons alors une suite $(h_j = g_j^2)$ pour $g_j^* = g_j$ dans $\mathcal{H}_0$, telle que (h_j) minimise $M(h,h_j)$ dans $\mathcal{H}_0$, sous la contrainte

$$|\Lambda F_h^{g_j(\mathcal{E},\phi)}|_{L^p_\delta} \leq B. \tag{8.6}$$

Il faut comprendre ici que la norme ponctuelle utilisée sur un endomorphisme h-auto-adjoint u est $\operatorname{tr}(u^*u)^{1/2}$. De manière équivalente, on aurait pu dire

$$||\Lambda F_{h_j}^{(\mathcal{E},\phi)}|_{h_j}|_{L^p_\delta} \leq B. \tag{8.7}$$

La première formulation présente l'avantage de raisonner par rapport à la métrique fixe h.

Du lemme 3.1. (d) dans Simpson, nous retenons

$$\Delta \operatorname{Log} \operatorname{tr}(h_j h^{-1}) \leq 2(|\Lambda F_h|_h + |\Lambda F_{h_j}|_{h_j}) \tag{8.8}$$

et donc

$$\Delta \operatorname{Log} \operatorname{tr}(h_j h^{-1}) \leq g_j, \tag{8.9}$$

avec g_j des fonctions positives bornées dans L^p_δ.

LEMME 8.4. – *Si $f \in \hat{L}^{2,p}_\delta$ et $g \in L^p_\delta$ sont deux fonctions positives avec $\Delta f \leq g$ et $|g|_{L^p_\delta} \leq B$, alors*

$$|f|_{L^\infty} \leq c(B) + c'(B)|f|_{L^1}$$

et $|f|_{L^\infty}$ tend vers 0 quand $|f|_{L^1}$ tend vers 0.

Admettons ce lemme pour le moment : nous en déduisons que

$$|\operatorname{Log} \operatorname{tr}(h_j h^{-1})|_{L^\infty} \leq c + c'|\operatorname{Log} \operatorname{tr}(h_j h^{-1})|_{L^1}. \tag{8.10}$$

On a alors l'estimation suivante, due à Simpson :

LEMME 8.5. – *Si $(\mathcal{E},\phi)$ est stable, alors*

$$|\operatorname{Log} \operatorname{tr}(h_j h^{-1})|_{L^\infty} \leq C + C' M(h,h_j).$$

Démonstration. – La démonstration de la proposition 5.3 de Simpson marche ici mot pour mot. On obtient donc le résultat, pourvu que $(\mathcal{E},\phi)$ soit analytiquement stable pour les sous-fibrés $L^{1,2}$, définis sur $X-\mathcal{D}$. Il faut donc montrer qu'un tel sous-fibré induit en réalité un sous-faisceau saturé de $\mathcal{E}$ sur X entier. Sur $X-\mathcal{D}$, c'est une application directe du théorème de régularité des applications faiblement holomorphes de Uhlenbeck et Yau [30], et près d'un point de $\mathcal{D}$ ce théorème fonctionne encore, comme dans [3, partie (4.3)] :

le principe est que près du diviseur, sur presque chaque disque transverse le sous-fibré, donné par la projection π, est $L^{1,2}$ donc se prolonge en un sous-fibré holomorphe (car la condition $\overline{\partial}\pi \in L^2$ est invariante conforme en dimension complexe 1) et on a la même chose sur presque chaque tranche parallèle à $\mathcal{D}$, ce qui suffit à assurer les hypothèses du théorème de régularité de Uhlenbeck et Yau. Enfin, il faut vérifier que le degré parabolique du sous-faisceau saturé, induit par $\mathcal{E}$, coïncide bien avec son degré analytique : comme ce sous-faisceau est un sous-fibré en dehors d'un ensemble de codimension complexe 2, c'est une variation autour de la formule de Chern-Weil dans la proposition 7.2. □

Ce lemme implique que h et h_j restent mutuellement bornées, et la fonctionnelle $M(h, h_j)$ est bornée inférieurement. On déduit aussi de la formule explicite de la fonctionnelle, si $h_j = h \exp s_j$, que $|D'' s_j|_{L^2}$ est borné. Cela implique que (s_j) est bornée dans $L^{1,2}_{-1/2}$ (inutile d'écrire $\hat{L}$ pour des poids négatifs) et on peut donc extraire faiblement $s_j \rightharpoonup s_\infty$ dans $L^{1,2}_{-1/2}$, donc fortement dans $L^1 = L^1_{-1}$. Comme les s_j sont bornées, $\operatorname{Log}(e^{-s_j} e^{s_k})$ tend vers 0 dans L^1 quand j et k tendent vers l'infini, donc, par le lemme 8.4, on déduit que cette convergence est C^0 donc $s_j \to s_\infty$ dans C^0.

Notons $h_\infty = h e^{s_\infty}$ la métrique limite.

LEMME 8.6. – *La convergence C^0 de h_j vers h_∞ implique que $h^{-1} h_j$ reste borné dans $\hat{L}^{2,p}_\delta$.*

Admettons ce lemme pour finir la démonstration. On peut extraire une limite faible dans $\hat{L}^{2,p}_\delta$, nécessairement h_∞, de la suite (h_j). Cette limite vérifie toujours la contrainte (8.6) et minimise, sous cette contrainte, la fonctionnelle de Donaldson (car elle est continue dans $L^{1,2}$ et qu'il y a une inclusion compacte $\hat{L}^{2,p}_\delta \subset L^{1,2}$).

Il s'agit donc de montrer que $\Lambda F^{(\mathcal{E},\phi)}_{h_\infty} = 0$. Supposons que cela ne soit pas le cas, alors on va perturber h_∞ en respectant la contrainte (8.6) et en faisant diminuer la fonctionnelle, ce qui constituera une contradiction.

Pour cela, il est plus facile de se placer dans le formalisme transformation de jauge complexe. Écrivons $h_\infty = g_\infty^2$ pour $g_\infty \in \mathcal{G}_0^{\mathbb{C}}$ auto-adjointe et D_∞ la connexion associée à $(g_\infty(\mathcal{E}, \phi), h)$.

Résolvons

$$D_\infty^* D_\infty u = \Lambda D_\infty^c D_\infty u = -\sqrt{-1}\, \Lambda F^{D_\infty} \in L^p_\delta \tag{8.11}$$

avec $u \in \hat{L}^{2,p}_\delta$, auto-adjoint puisque ΛF^{D_∞} l'est et que $D_\infty^* D_\infty$ préserve les endomorphismes auto-adjoints. Vérifions pour cela que les hypothèses du théorème 5.1 sont bien remplies. Nous remarquons tout d'abord que l'on a toujours $\ker D \subset \ker D''$, car, sur les 0-formes,

$$\begin{aligned} D^* D = \Lambda D^c D &= \sqrt{-1}\, \Lambda (D'' - D')(D'' + D') \\ &= \sqrt{-1}\, \Lambda D'' D' - \sqrt{-1}\, \Lambda D' D'' = (D')^* D' + (D'')^* D'', \end{aligned}$$

d'où l'assertion par intégration par parties. Comme $(\mathcal{E}, \phi)$ est simple, ΛF^{D_∞} est bien orthogonal au noyau sur X de $D_\infty^* D_\infty$, réduit aux constantes.

On peut donc obtenir u, orthogonal aux constantes sur X, et tel que $u|_{\mathcal{D}}$ soit parallèle. Nous considérons alors, pour $t > 0$ petit, $g_t = \exp(tu)$. L'action infinitésimale de g_t sur

D''_∞ est par $-D''_\infty u$, sur D_∞ par $\sqrt{-1}\, D^c_\infty u$, donc sur $\sqrt{-1}\,\Lambda F^{D_\infty}$ par

$$-\Lambda D_\infty D^c_\infty u = \Lambda D^c_\infty D_\infty u = -\sqrt{-1}\,\Lambda F^{D_\infty} \tag{8.12}$$

d'où on déduit

$$\sqrt{-1}\,\Lambda F^{g_t(D_\infty)} = (1-t)\sqrt{-1}\,\Lambda F^{D_\infty} + o_{L^p_\delta}(t) \tag{8.13}$$

de sorte que la contrainte (8.6), qui est invariante par conjugaison, reste respectée pour $t > 0$ petit par

$$h_t = (g_t g_\infty)^*(g_t g_\infty). \tag{8.14}$$

D'autre part,

$$\frac{d}{dt}(h_\infty^{-1} h_t)\Big|_{t=0} = 2 g_\infty^{-1} u g_\infty,$$

si bien que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(h_\infty, h_t)\Big|_{t=0} &= 2\Big(\sqrt{-1}\,\Lambda F^{(\mathcal{E},\phi)}_{h_\infty}, g_\infty^{-1} u g_\infty\Big)_{h_\infty} \\ &= 2\,\mathrm{tr}\,(\sqrt{-1}\,\Lambda F^{D_\infty} u) \\ &= -2\,\mathrm{tr}\,(D^*_\infty D_\infty u, u) = -2|D_\infty u|^2_{L^2} < 0 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration, puisque D_∞ n'a d'autre noyau que les constantes.

Il ne reste qu'à montrer la régularité höldérienne de la solution h_∞. Nous renvoyons cette question facile de régularité à après la démonstration du lemme 8.6.

REMARQUE 8.7. – Le principe de la démonstration par minimisation directe de la fonctionnelle de Donaldson sous une contrainte sur ΛF se trouve déjà dans la thèse de Simpson, dans le cas des variétés compactes. La fin de l'argument de Simpson ne marchait que pour p un entier pair; nous avons proposé ici un autre argument, semble-t-il plus naturel, puisqu'il ne dépend pas de p, mais uniquement du fait que la norme choisie sur ΛF soit invariante par conjugaison (ce qui empêche de choisir, par exemple, une norme Hölder).

Dans notre cas, cela n'était pas crucial, puisque l'on pouvait choisir p aussi grand que l'on voulait.

8.C. DÉMONSTRATION DU LEMME 8.4. – Le résultat a un caractère essentiellement local. Si on se place sur un compact fixé dans $X-\mathcal{D}$, le résultat est déjà bien connu (Donaldson [11], proposition 2.1 de Simpson). Il reste à voir ce qui se passe près du diviseur. Plaçons-nous dans un voisinage tubulaire T_R de $\mathcal{D}$ et résolvons, grâce au théorème 5.3, les problèmes

$$\begin{aligned} \Delta v &= g \text{ sur } T_R, & \Delta w &= 0 \text{ sur } T_R, \\ v|_{\partial T_R} &= 0, & w|_{\partial T_R} &= f|_{\partial T_R}, \end{aligned}$$

alors on a les estimées

$$(*)\qquad |v|_{L^\infty(T_R)} \leq \frac{c}{|\operatorname{Log} R|^\delta}|g|_{L^p_\delta(T_R)},$$

$$(**)\qquad |w|_{L^\infty(T_{R/2})} \leq c(R)\int_{\partial T_R} f.$$

Démonstration de $(*)$. – Cela vient de l'assertion, dans le théorème 5.3, suivant laquelle la norme de l'inverse est indépendante de R :

$$|\operatorname{Log} R^2|^\delta |v|_{\mathcal{D}}|_{L^{2,p}} + |v - p^*(v|_{\mathcal{D}})|_{L^{2,p}_\delta} \leq c|g|_{L^p_\delta}$$

avec c indépendante de R. Mais on sait que $L^{2,p}_\delta \subset C^0_\delta$, par un argument local qui implique, si $z \in L^{2,p}_\delta$,

$$\sup e^{\delta t}|z| \leq c|z|_{L^{2,p}_\delta}$$

avec c indépendante de R. On en déduit le résultat. □

Démonstration de $(**)$. – Stricto sensu, nous n'avons pas exactement montré que l'on peut résoudre le second problème. Montrons-le rapidement. On résout $\Delta w_1 = 0$ sur $T_R - T_{R/2}$, avec conditions au bord $w_1 = f$ sur ∂T_R et $w_1 = 0$ sur $\partial T_{R/2}$. On sait que

$$|w_1|_{C^1(T_{3R/4} - T_{R/2})} \leq c\int_{T_R} u.$$

Soit χ une fonction C^∞ valant 1 si $r > 3R/4$ et 0 si $r < R/4$, alors on peut résoudre, par le théorème 5.3, $\Delta w_2 = -\Delta(\chi w_1)$ sur T_R et $w_2 = 0$ sur ∂T_R. On a

$$|w_2| \leq c|w_1|_{C^1(T_{3R/4} - T_{R/2})} \leq c\int_{T_R} u,$$

et $w = w_1 + w_2$ satisfait ce qu'on voulait. □

Fin de la démonstration du lemme 8.4. – Par principe de maximum, on a $f \leq v + w$ (cela n'est pas tout à fait évident, à cause de la non-compacité : mais il suffit de procéder à une exhaustion de T_R par des $T_R - T_\varepsilon$, d'approximer v et w par des solutions (avec condition similaire sur le bord intérieur) v_ε et w_ε, qui convergent sur tout compact vers v et w, et d'appliquer le principe de maximum usuel sur $T_R - T_\varepsilon$). On en déduit

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(T_{R/2})} &\leq \frac{c}{|\operatorname{Log} R^2|^\delta}B + c(R)\int_{\partial T_R} f \\ &\leq \frac{c}{|\operatorname{Log} R^2|^\delta}B + c'(R)\int_X f \end{aligned}$$

où la seconde ligne est obtenue en bougeant un peu le bord de T_R. On en déduit les assertions du lemme. □

8.D. DÉMONSTRATION DU LEMME 8.6. – Le raisonnement de Donaldson [10, lemme 19] ou de Simpson dans le lemme 6.4 montre que le résultat est vrai sur toute partie compacte, dans $L^{2,p}_{\text{loc}}$. Il faut donc, là aussi, regarder ce qui se passe près de l'infini. On s'appuie sur la formule $(h_j = hu_j)$

$$\Delta' u_j = \sqrt{-1}\, u_j(\Lambda F_{h_j} - \Lambda F_h) + \sqrt{-1}\, \Lambda(D'' u_j) u_j^{-1}(D' u_j), \tag{8.15}$$

où les opérateur D' et $\Delta' = (D')^* D'$ sont ceux du fibré $(\mathcal{E}, \phi)$ pour la métrique fixe h.

Rappelons que $p > 2n$ de sorte que $L^{1,p} \subset C^0$. Deux cas peuvent se produire.

(1) *Il existe une fonction continue g, nulle sur $\mathcal{D}$, telle que pour tout j, on ait* $|\nabla u_j| \leq g$. Alors, par la formule (8.15) et le théorème 5.3, on obtient

$$|u_j|_{\hat{L}^{1,p}_\delta} \leq c\Big(|\Delta' u_j|_{L^p_\delta} + |u_j|_{L^p(T_R - T_{R/2})}\Big) \leq C(1 + |u_j|_{\hat{L}^{1,p}_\delta} |\nabla u_j|_{L^\infty})$$

avec la constante C indépendante de R, d'où on déduit

$$|u_j|_{\hat{L}^{1,p}_\delta}(1 - C|\nabla u_j|_{L^\infty}) \leq C,$$

ce qui donne, compte tenu de l'hypothèse, pour R assez petit,

$$|u_j|_{\hat{L}^{1,p}_\delta} \leq 2C.$$

On déduit alors immédiatement le résultat.

(2) *Il existe une suite de points (x_j) tendant vers $\mathcal{D}$, telle que, quitte à extraire,* $|\nabla u_j|(x_j) > \varepsilon > 0$. On va montrer qu'on aboutit à une contradiction. On peut supposer que $x_j \to x \in \mathcal{D}$, et que x_j maximise $|\nabla u_j|$ dans une boule de rayon 1 autour de lui (noter que $\nabla u_j = 0$ sur $\mathcal{D}$).

Faisons comme dans la partie 4.B, passons au revêtement universel local $\mathbf{\Pi} \times U$, pour $U \subset \mathcal{D}$ contenant x, et désingularisons le laplacien Δ' sur ce revêtement universel, en considérant le relevé $\tilde{u}$ (en fait il faut introduire aussi les deux autres variables θ^2 et θ^3 et regarder l'espace hyperbolique de dimension 4). On ramène chaque x_j au point $((1,0), x)$ par une isométrie de $\mathbf{\Pi}$. Nous avons alors, pour chaque j, dans une boule hyperbolique fixe B, une équation du type

$$\Delta_0 \tilde{u}_j = \text{terme quadratique en } Du_j + \text{terme borné dans } L^p,$$

avec Δ_0 un laplacien à coefficients du symbole principal équivalents à ceux du laplacien hyperbolique et les autres termes bornés. Deux nouveaux cas se présentent.

Ou bien $|\nabla u_j|$ reste borné, alors $\Delta_0 \tilde{u}_j$ reste borné dans $L^p(B)$ ainsi que $\tilde{u}_j$, ce qui garantit, dans notre boule fixe, une extraction faible dans $L^{2,p}$ donc forte dans C^1 vers $\tilde{u}_\infty$, si bien que $|\nabla u_\infty|(x) \geq \varepsilon$. Mais on sait que h_j tend C^0 vers h_∞, et que sur $\mathcal{D}$ on a $h_\infty h^{-1}$ parallèle, donc c'est impossible.

Ou bien, quitte à extraire, $|\nabla u_j|$ tend vers $+\infty$, auquel cas, en faisant un changement d'échelle au point $((1,0), x)$, on se ramène à des boules de rayon constant, avec une métrique tendant vers la métrique euclidienne et $|\nabla u_j| = 1$ au centre; le même raisonnement aboutit à une convergence de $\tilde{u_j}$ vers $\tilde{u}_\infty$ avec la même propriété; mais le changement d'échelle et la convergence C^0 de h_j vers h_∞ contredisent encore ce résultat.

Ainsi, seul le premier cas se produit et on en déduit le lemme. □

Démonstration de la régularité höldérienne de la solution. – Posant $h_\infty = hu$, on a, puisque $\Lambda F_{h_\infty} = 0$, d'après (8.15),

$$\Delta' u = -\sqrt{-1}\, u \Lambda F_h + \sqrt{-1}\, \Lambda(D'' u) u^{-1} D' u.$$

Sachant que $u \in \hat{L}^{2,p}_\delta$, on a $\nabla u \in L^{1,p}_\delta \subset C^\vartheta_\delta$ pour un $\vartheta > 0$ assez petit puisque $p > 2n$. L'équation ci-dessus donne alors immédiatement $u \in \hat{C}^{2+\vartheta}_\delta$. En réinjectant dans l'équation, on peut obtenir ϑ quelconque dans l'intervalle $(0, 1)$. On pourrait certainement obtenir, à partir de cette équation, une régularité bien meilleure.

Partie IV

Connexions logarithmiques intégrables, spécialisation, correspondance inverse

Quand les nombres caractéristiques donnés par la proposition 7.2 s'annulent, une métrique de Hermite-Einstein sur $(\mathcal{E}, \phi)$ donne naissance à une GL_r-connexion plate A sur $X - \mathcal{D}$. Cette connexion a des propriétés de régularité près du diviseur. On verra que la partie de type $(0, 1)$ de A induit un fibré holomorphe parabolique sur X, et que A est une connexion intégrable logarithmique sur ce fibré, compatible avec la filtration parabolique.

Dans un second temps, nous montrerons la correspondance inverse, c'est-à-dire retrouver le fibré de Higgs à partir de la connexion logarithmique intégrable. Cette étape étant formellement similaire à ce qui vient d'être fait, on ne sera pas très long.

Enfin, utile à la bonne compréhension de la correspondance, nous aurons entre temps détaillé la correspondance induite sur les spécialisés de ces objets sur le diviseur, la conclusion étant essentiellement que la correspondance a une spécialisation sur les spécialisés.

9. Connexion logarithmique intégrable induite

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 8.1, alors le fibré de Higgs $(\mathcal{E}, \phi)$, muni d'une métrique de référence h, admet une connexion de Yang-Mills-Einstein A. Supposons que $p\text{-}deg_{\omega_0}(\mathcal{E}) = 0$, alors, par la proposition 7.2 et les relations bilinéaires de Hodge-Riemann,

$$(9.1) \qquad -p\text{-}ch_{2,\omega_0}(\mathcal{E}) = c \int_X |F^A|^2 \omega^n = -ch_2(\mathcal{E})[\omega_0]^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \operatorname{tr}(\alpha_{\mathfrak{a}}^2)\, deg_{\omega_0}(N_{\mathfrak{a}}).$$

Si ce nombre caractéristique s'annule aussi, alors la connexion A est plate.

9.A. Redressement local. – Examinons la situation localement, près d'un point du diviseur. Plaçons-nous sur un polycylindre $P^* = \mathbb{D}^*_R \times \mathbb{D}^{n-1}$, où $\mathbb{D}_R$ est le disque de rayon R dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$, avec des coordonnées $(z^0, z^1, \ldots)$. On sait que, dans une base h-orthonormale (e_j), on a, en posant $r = |z^0|$,

$$A^{0,1} = \overline{\partial} - \frac{\alpha}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0} + \frac{H}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log} r^2)} + \lambda^* \frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0} + X\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log} r^2)} + a, \tag{9.2}$$

avec $a \in \hat{C}_\delta^{1+\vartheta}$. Par conséquent,

$$A^{0,1} = \overline{\partial} - \frac{\alpha - 2\lambda^*}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0} + \left(\frac{H}{2} + X\right)\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log} r^2)} + a.$$

Soit

$$D_0^{0,1} = \overline{\partial} - \frac{\alpha - 2\lambda^*}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0} + \frac{H}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log} r^2)},$$

alors, compte tenu de $(\operatorname{Ad} e^X)(H + 2X) = H$, on obtient, dans la base $(e^X e_i)$,

$$A^{0,1} = D_0^{0,1} + b,$$

avec toujours $b \in \hat{C}_\delta^{1+\vartheta}$.

On veut ramener l'opérateur $A^{0,1}$ à une forme standard, c'est-à-dire trouver g telle que

$$g(A^{0,1}) = D_0^{0,1},$$

ce qui s'écrit

$$-D_0^{0,1} g g^{-1} + g b g^{-1} = 0,$$

soit, en posant $g = 1 + u$,

$$-D_0^{0,1} u + ub = -b.$$

C'est un problème de $\overline{\partial}$ bien posé (les conditions d'intégrabilité usuelles sont bien remplies). Sur l'espace propre de H pour la valeur propre k, on voit que

$$D_0^{0,1} = r^{\alpha - 2\lambda^*}(-\operatorname{Log} r^2)^{k/2} \circ \overline{\partial} \circ r^{-(\alpha - 2\lambda^*)}(-\operatorname{Log} r^2)^{-k/2}. \tag{9.3}$$

Résolution sur un disque. – Une solution dans le disque épointé de rayon R (pour $R < 1$), $\mathbb{D}_R^*$, de l'équation

$$D_0^{0,1} f = g \frac{d\overline{z}}{\overline{z}(-\operatorname{Log} r^2)}$$

est donnée par

(9.4)

$$f(z) = (Tg)(z) = \frac{r^{\alpha - 2\lambda^*}}{z^q}(-\operatorname{Log} r^2)^{k/2} \int_{\mathbb{D}_R^*} \frac{w^q}{|w|^{\alpha - 2\lambda^*}}(-\operatorname{Log}|w|^2)^{-k/2-1} \frac{g(w)}{\overline{w}(z - w)} |dw|^2,$$

où q est un entier à déterminer, de sorte que l'intégrale converge bien en 0. Pour chaque donnée de α, $\operatorname{re}\lambda$ et k, nous fixons q de sorte que l'un des trois cas suivant se produise :

(i) $$0 < q + \alpha - 2\operatorname{re}\lambda < 1;$$

(ii) $$q + \alpha - 2\operatorname{re}\lambda = 1 \text{ et } k \geq 0;$$

(iii) $$q + \alpha - 2\operatorname{re}\lambda = 0 \text{ et } k < 0.$$

LEMME 9.1. – *Pour $\delta > 0$, on a les estimées, indépendantes de R,*

$$|(-\operatorname{Log} r^2)^{\delta+1} Tg|_{L^\infty} \leq c|(-\operatorname{Log} r^2)^\delta g|_{L^\infty}$$

dans le cas (i), *et*

$$|(-\operatorname{Log} r^2)^{\delta} Tg|_{L^\infty} \leq c|(-\operatorname{Log} r^2)^\delta g|_{L^\infty}$$

dans les cas (ii) *et* (iii).

Démonstration. – La démonstration est facile, à partir de la formule (9.4), en considérant séparément les régions d'intégration $|w| < |z|/2$, $|z|/2 < |w| < 2|z|$ et $|w| > 2|z|$. □

On cherche alors une solution de $D_0^{0,1}u - ub_{\overline{0}} = -b_{\overline{0}}$ comme $u = T(ub_{\overline{0}} - b_{\overline{0}})$, par un théorème de point fixe dans L_δ^∞ (et $L_{\delta+1}^\infty$ pour les composantes avec $\ell \neq 0$). Cela est possible dès que $|(b_{\overline{0}})_0|_{L_{\delta'}^\infty}$ et $|(b_{\overline{0}})_\ell|_{L_{\delta'+1}^\infty}$ sont assez petits, pour un $\delta' < \delta$. Comme $b_{\overline{0}} \in C_\delta^{1+\vartheta}$, cette condition est réalisée dès que R est assez petit.

Cas général. – Partons donc de $b \in \hat{C}_\delta^{1+\vartheta}$. On résout en famille, par le procédé ci-dessus, sur chaque disque transversal de notre carte locale, pour trouver u tel que

(1) $u_0 \in L_\delta^\infty$ et $u_\ell \in L_{\delta+1}^\infty$ si $\ell \neq 0$ (ainsi $g = 1 + u$ est inversible dans un voisinage de $\mathcal{D}$);

(2) $g(A^{0,1}) = D_0^{0,1} + b'$, avec $b'_{\overline{0}} = 0$, $b \in \hat{L}_\delta^\infty$ et $b_\ell \in L_{\delta+1}^\infty$ si $\ell \neq 0$ (car la formule (9.4) et les estimées (9.5) et (9.6) donnent aussi la régularité des dérivées de u).

On peut alors poursuivre, dans la direction de $\mathcal{D}$, un raisonnement classique d'intégrabilité pour fournir finalement dans un P_R^* une transformation de jauge complexe $g \in \hat{L}_\delta^\infty$, telle que pour $\ell \neq 0$, on ait $g_\ell \in L_{\delta+1}^\infty$, et

$$g(A^{0,1}) = D_0^{0,1}.$$

On voit de plus, ou bien en suivant la résolution, ou bien *a posteriori* par régularité elliptique locale, que $\nabla g \in \hat{L}_\delta^\infty$.

Puisque, dans la base $(e^X e_j)$, on a

$$A^{1,0} = \partial + \frac{\alpha + 2\lambda}{2}\frac{dz^0}{z^0} + \left(\frac{H}{2} + Y\right)\frac{dz^0}{z^0(-\operatorname{Log} r^2)} + \text{ perturbation dans } \hat{C}_\delta^{1+\vartheta},$$

on déduit que

$$(9.7) \qquad g(A^{1,0}) = \partial + \frac{\alpha + 2\lambda}{2}\frac{dz^0}{z^0} + \left(\frac{H}{2} + Y\right)\frac{dz^0}{z^0(-\operatorname{Log} r^2)} + b$$

avec $D_0^{0,1} b_1 = 0$ (puisque A est plate). Par conséquent, on a

$$b_i^j = \frac{r^{\alpha_i - 2\lambda_i^*}(-\operatorname{Log} r^2)^{k_i/2}(z^0)^{E(\alpha_i - 2\operatorname{re}\lambda_i)}}{r^{\alpha_j - 2\lambda_j^*}(-\operatorname{Log} r^2)^{k_j/2}(z^0)^{E(\alpha_j - 2\operatorname{re}\lambda_j)}}\left(\varphi_{0i}^j \frac{dz^0}{z^0} + \varphi_{mi}^j dz^m\right),$$

avec les φ_{mi}^j holomorphes sur P_R^* pour $a \geq 0$. Notons $\beta = \alpha - 2\operatorname{re}\lambda - E(\alpha - 2\operatorname{re}\lambda)$, alors la condition $b \in \hat{L}_\delta^\infty$ implique :

(1) φ_{0i}^j est holomorphe, et s'annule sur $\mathcal{D}$ si $\beta_i < \beta_j$ ou, en cas d'égalité, si $k_i - k_j + 2 \leq 0$ (car $\varphi_0 \in L_\delta^\infty$);

(2) si $m \neq 0$, alors φ_{mi}^j est holomorphe, et s'annule sur $\mathcal{D}$ si $(\beta_i, k_i) < (\beta_j, k_j)$.

On pourrait déduire de ces conditions que la transformation de jauge locale g est en réalité élément de $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$.

9.B. Prolongement global. – Localement, les sections

$$s_j = \frac{r^{\alpha_j - 2\lambda_j^*}}{(z^0)^{E(\alpha_j - 2\operatorname{re}\lambda_j)}}(-\operatorname{Log} r^2)^{k_j/2} g(e^X e_j)$$

sont une base $A^{0,1}$-holomorphe sur P_R^*, qui définit un prolongement holomorphe local $\mathcal{F}$ sur P_R, muni d'une structure parabolique donné par la croissance (à un terme logarithmique près) de la section s_j en r^{β_j}, avec

$$(9.8) \qquad \beta_j = \alpha_j - 2\operatorname{re}\lambda_j.$$

Ainsi, pour $\beta \in [0, 1)$, le sous-fibré (pour l'instant local) $\mathcal{F}_\beta$ est engendré par les $s_j|_{\mathcal{D}}$ telles que $\beta_j \geq \beta$. On peut encore dire que $\mathcal{F}_\beta$ est engendré par les valeurs sur $\mathcal{D}$ des sections holomorphes qui ont une croissance en $O(|z^0|^{\beta - \varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Une section s dans P_R^* définira un élément de $\mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta+\varepsilon}$ si et seulement s'il existe un entier k tel que

$$(9.9) \qquad |s| \sim |z^0|^\beta (-\operatorname{Log} r^2)^{k/2}.$$

En réalité, il est très facile de voir que ces prolongements locaux sont définis de manière unique par cette condition sur la croissance des sections et par conséquent se recollent canoniquement tout le long de $\mathcal{D}$. Ainsi définit-on sur X un prolongement global unique $\mathcal{F}$ de $A^{0,1}$. Ce prolongement est en fait également muni de la filtration W induite par les différents ordres de grandeur logarithmiques.

Interprétons à présent la formule locale (9.7). Dans la base holomorphe (s_j), on déduit que

$$(9.10) \quad A = d + (\alpha - E(\alpha - 2\operatorname{re}\lambda) + 2\sqrt{-1}\operatorname{im}\lambda)\frac{dz^0}{z^0} + Y\frac{dz^0}{z^0} + \varphi_{0i}^j \frac{dz^0}{z^0} + \varphi_{mi}^j dz^m,$$

et les conditions sur φ plus haut nous indiquent ici que les φ_{mi}^j sont holomorphes et respectent la filtration parabolique et la filtration W pour $m \geq 0$; cette filtration W est égale à la filtration W de Y et on a une condition supplémentaire sur φ_{0i}^j, à savoir $\varphi_{0i}^j(W_k) \subset W_{k-3}$. Cela implique que $Y + \varphi_{0i}^j$ est conjugué à Y, avec même filtration W.

Cela nous amène aux définition et proposition suivantes.

DÉFINITION 9.2. – *Une connexion logarithmique intégrable* $(\mathcal{F}, D)$ *est la donnée d'un fibré holomorphe parabolique* $\mathcal{F}$ *et d'un opérateur*

$$D : \mathcal{O}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{\Omega}^1_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{F})$$

satisfaisant la règle de Leibniz $D(fs) = df \otimes s + fDs$, *l'intégrabilité* $D^2 = 0$, *et respectant la structure parabolique :*

$$D\mathcal{O}(\mathcal{F}_\beta) \subset \mathcal{O}(\mathbf{\Omega}^1_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{F}_\beta).$$

PROPOSITION 9.3. – *Sous les hypothèses du théorème* 8.1, *si* $p\text{-}\mu_{\omega_0}(\mathcal{E})$ *et* $p\text{-}ch_{2,\omega_0}(\mathcal{E})$ *sont nuls, alors la connexion construite par le théorème sur* $X - \mathcal{D}$ *se prolonge canoniquement en une connexion logarithmique intégrable.*

9.C. SPÉCIALISÉ D'UNE CONNEXION LOGARITHMIQUE INTÉGRABLE. – Soit $(\mathcal{F}, D)$ une connexion logarithmique intégrable. On obtient sur le diviseur $\mathcal{D}$ des structures algébriques analogues à celles pour un fibré de Higgs. Tout d'abord, on a un gradué de la filtration parabolique $\operatorname{Gr}_\beta \mathcal{F}$. Ensuite, la connexion logarithmique intégrable s'écrit localement, près du diviseur,

$$D = d + \varphi_0 \frac{dz^0}{z^0} + \varphi_m dz^m$$

et φ_0 définit un endomorphisme holomorphe de $\mathcal{F}$ au-dessus de $\mathcal{D}$, appelé le résidu de D sur $\mathcal{D}$, et noté $\operatorname{Res}_\mathcal{D} D$. Ses valeurs propres μ décomposent $\mathcal{F}$ au-dessus de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{F}|_\mathcal{D} = \oplus_\mu \mathcal{F}_\mu$$

et la partie nilpotente de ce résidu, Y, induit une filtration $W_k \operatorname{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$, avec gradué associé $\operatorname{Gr}_k \operatorname{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$ et sous-espaces primitifs $P_k \operatorname{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$. Si $\pi : N \to \mathcal{D}$ désigne à nouveau le fibré normal de $\mathcal{D}$, alors, sur l'espace total de N, chaque $\pi^* \operatorname{Gr}_k \operatorname{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$ est muni d'une connexion logarithmique intégrable, homogène, de résidu μ.

Nous appelons *spécialisé de* $(\mathcal{F}, D)$ sur $\mathcal{D}$, et notons $\operatorname{Spé}_\mathcal{D}(\mathcal{F}, D)$ la donnée des $\operatorname{Gr}_k \operatorname{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$ avec leurs connexions logarithmiques homogènes et l'action de Y sur la situation. Une donnée équivalente est celle des seuls sous-espaces primitifs $P_k \operatorname{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$, chacun avec sa connexion logarithmique homogène.

10. Spécialisation de la correspondance

Nous allons voir que la flèche de la proposition 9.3, associant une connexion logarithmique intégrable $(\mathcal{F}, D)$ à un fibré de Higgs stable $(\mathcal{E}, \phi)$ avec certains nombres caractéristiques, a une interprétation simple au niveau des spécialisés des deux objets.

10.A. MÉTRIQUE PLATE SUR L'ESPACE TOTAL DU FIBRÉ NORMAL. – Suivons donc la démonstration du théorème 8.1. Partons de l'espace primitif $P_k \operatorname{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda$, qui est un fibré de

Higgs homogène. Par l'hypothèse de stabilité sur le diviseur, on a trouvé une métrique h_0 sur $P_k \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda$, telle que, si on note D_{h_0} la connexion associée à h_0, à savoir

$$D_{h_0} = d_{h_0}^{P_k \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda} + \phi + \phi^*,$$

on ait sur le diviseur $\mathcal{D}$ la courbure :

$$\Lambda F_{h_0} = -\alpha \Lambda R^N.$$

Cette métrique, à une constante près, apparaît comme « valeur à l'infini » de la métrique de Hermite-Einstein construite sur $(\mathcal{E}, \phi)$. La platitude de celle-ci, conséquence des formules de Chern-Weil, implique alors que sur $\mathcal{D}$, on ait en réalité

$$F_{h_0} = -\alpha R^N.$$

On peut interpréter cela de la manière suivante : rappelons (*voir* la démonstration du lemme 7.1), que l'on dispose de la fonction ρ_N sur l'espace total de N, et que ∂ Log ρ_N^2 est une (1,0)-forme homogène sur l'espace total de $N - \mathcal{D}$, avec $\overline{\partial}\partial$ Log $\rho_N^2 = \pi^* R^N$. Regardons la métrique

$$h = \rho_N^{2\alpha} h_0,$$

alors on obtient

$$D_h = D_0 + \alpha \partial \operatorname{Log} \rho_N^2$$

et

$$F_h = F_{h_0} + \alpha \overline{\partial}\partial \operatorname{Log} \rho_N^2 = F_{h_0} + \alpha R^N = 0$$

si bien que nous avons, sur l'espace total de N, le fibré de Higgs $(P_k \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda, P_k \phi_{\alpha,\lambda})$, avec métrique α-homogène h, telle que la connexion homogène associée $D = D_h$ soit plate.

10.B. CONNEXION LOGARITHMIQUE HOMOGÈNE. – En particulier, $D^{0,1}$ définit un fibré holomorphe homogène sur $N - \mathcal{D}$, qui, localement, dans une base (e_j) de $P_k \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda$ au-dessus de $\mathcal{D}$, s'écrit

$$D^{0,1} = \overline{\partial} + \lambda^* \frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0} + \text{termes bornés}.$$

La résolution du problème de $\overline{\partial}$ faite précédemment a ici une contrepartie très simple. Il est très facile, par les techniques classiques sur $\mathcal{D}$ (donc sans singularité), de trouver une base locale (e'_j) de $P_k \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda$ sur $\mathcal{D}$ telle que

$$D^{0,1} = \overline{\partial} + \lambda^* \frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0}.$$

Ainsi une base $D^{0,1}$-holomorphe locale est fournie par

$$s_j = \frac{|z^0|^{-2\lambda^*}}{(z^0)^{-E(\alpha - 2\,\mathrm{re}\,\lambda)}} e'_j,$$

ce qui est l'analogue, sur les spécialisés, de (9.8) : sur ce fibré, la métrique devient β-homogène, avec

$$\beta = \alpha - 2\operatorname{re}\lambda - E(\alpha - 2\operatorname{re}\lambda) \in [0,1). \tag{10.1}$$

Ces sections s_j constituent une base holomorphe de sections de $\pi^* P_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$ dans $N - \mathcal{D}$, et définissent un prolongement à $\mathcal{D}$ qui est exactement $P_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$.

On peut déduire en particulier de cette description que, au niveau topologique,

$$P_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu = P_k \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda \otimes N^{E(\alpha - 2\operatorname{re}\lambda)}. \tag{10.2}$$

Précisons à présent la valeur de μ : dans la base (e'_j), on voit que

$$D^{1,0} = \partial + (\alpha + \lambda)\frac{dz^0}{z^0} + \text{ termes bornés,}$$

ce qui donne, dans la base (s_j),

$$D^{1,0} = \partial + (\alpha - E(\alpha - 2\operatorname{re}\lambda) + 2\sqrt{-1}\operatorname{im}\lambda)\frac{dz^0}{z^0} + \text{termes bornés,}$$

donc la valeur propre du résidu est

$$\mu = \alpha - E(\alpha - 2\operatorname{re}\lambda) + 2\sqrt{-1}\operatorname{im}\lambda. \tag{10.3}$$

Résumons cette discussion dans la proposition suivante.

PROPOSITION 10.1. – *La flèche établie par la proposition* 9.3, *qui à un fibré de Higgs logarithmique* $(\mathcal{E}, \phi)$, *associe une connexion logarithmique intégrable* $(\mathcal{F}, D)$, *induit sur* $\mathcal{D}$ *une flèche qui au spécialisé* $\mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \phi)$, *associe canoniquement le spécialisé* $\mathrm{Spé}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, D)$.

Cette flèche est donnée par la construction, sur $(\pi^* P_k \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda, P_k \phi_{\alpha,\lambda})$ *au-dessus de* $N - \mathcal{D}$, *d'une métrique* α*-homogène* h, *tel que la connexion homogène associée* D_h *soit plate.*

La correspondance entre les poids et les valeurs propres des deux côtés est donnée par

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha - 2\operatorname{re}\lambda - E(\alpha - 2\operatorname{re}\lambda) \\ \mu &= \alpha - E(\alpha - 2\operatorname{re}\lambda) + 2\sqrt{-1}\operatorname{im}\lambda. \end{aligned}$$

REMARQUE 10.2. – Au niveau de la représentation de $\pi_1(X - \mathcal{D})$ induite par D, les valeurs propres sont donc

$$e^{-2\pi\sqrt{-1}\,\alpha + 4\pi\operatorname{im}\lambda} \tag{10.4}$$

et les poids (c'est-à-dire l'ordre de croissance d'une section plate sur un rayon)

$$\gamma = -2\operatorname{re}\lambda = \beta - \operatorname{re}\mu. \tag{10.5}$$

REMARQUE 10.3. – Cette correspondance entre les poids et les valeurs propres a été donnée par Simpson, en dimension 1. En revanche, Simpson n'avait pas donné de correspondance canonique entre les spécialisés (réduits, en dimension 1, à de simples espaces vectoriels).

REMARQUE 10.4. – Quand nous aurons vu la correspondance inverse ci-dessous (théorème 11.4), nous aurons aussi sa spécialisation, donnant la flèche entre spécialisés inverse à celle de cette proposition : celle-ci consistera en la construction d'une métrique harmonique β-homogène, sur $(\pi^* P_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu, P_k D_{\beta,\mu})$.

11. Correspondance inverse : métriques harmoniques

11.A. MÉTRIQUE HARMONIQUE. – Rappelons le principe de la correspondance inverse, qui à une connexion intégrable $(\mathcal{F}, D)$ va associer un fibré de Higgs.

Étant donnée une métrique h sur $\mathcal{F}$, on peut décomposer

$$D = D^+ + \psi,$$

avec D^+ connexion h-unitaire et ψ une 1-forme h-auto-adjointe, à valeur dans les endomorphismes de $\mathcal{F}$.

Le candidat à définir un fibré de Higgs est

$$D'' = (D^+)^{0,1} + \psi^{1,0}$$

et on notera aussi

$$D' = (D^+)^{1,0} + \psi^{0,1}.$$

Posons $D^c = \sqrt{-1}\,(D'' - D')$, on a aussi $(D^c)^2 = 0$ et $D'' = (D - \sqrt{-1}\,D^c)/2$ et $4\sqrt{-1}\,(D'')^2 = DD^c + D^cD$. Notre convention sera d'appeler *pseudo-courbure* de D''

$$G = -2(D'')^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2}(DD^c + D^cD) = -D(\psi^{1,0} - \psi^{0,1}). \tag{11.1}$$

La dernière égalité provient de

$$D^c = \sqrt{-1}\,(D^{0,1} - D^{1,0}) + 2\sqrt{-1}\,(\psi^{1,0} - \psi^{0,1}),$$

donc

$$DD^c + D^cD = 2\sqrt{-1}\,D(\psi^{1,0} - \psi^{0,1}).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\Lambda G &= -\Lambda(D^{0,1}\psi^{1,0} - D^{1,0}\psi^{0,1})\\ &= -\Lambda\big((D^+)^{0,1}\psi^{1,0} - (D^+)^{1,0}\psi^{0,1}\big)\\ &= \sqrt{-1}\,(D^+)^*\psi\end{aligned}$$

par les identités kählériennes. Cela relie la recherche d'une métrique telle que $G = 0$ à celle d'une métrique harmonique, c'est-à-dire telle que $(D^+)^*\psi = 0$.

On va donc chercher à résoudre le problème $\Lambda G = 0$, puis $G = 0$. La démonstration étant formellement similaire à celle des métriques de Hermite-Einstein, on ne donnera pas les détails.

Formules de calcul. – Notons la ressemblance des formules locales : dans une base locale D-parallèle, soit h la matrice de la métrique, on peut voir que

$$\psi = -\frac{1}{2}h^{-1}Dh,$$

si bien que l'on obtient, par (11.1), toujours dans cette base locale,

$$G_h = \frac{\sqrt{-1}}{2} D(h^{-1} D^c h).$$

Cela est à rapprocher de la formule, dans une base holomorphe, pour un fibré de Higgs :

$$F_h = D''(h^{-1} D' h).$$

On déduit les deux formules similaires

$$\begin{aligned} G_{hu} &= G_h + \frac{\sqrt{-1}}{2} D\big(u^{-1} D_h^c u\big), \\ F_{hu} &= F_h + D''\big(u^{-1} D_h' u\big). \end{aligned} \tag{11.2}$$

On remarquera que, dans la définition de G, les constantes ont été choisies de sorte que les lois de transformation soient exactement les mêmes que pour une courbure quand on multiplie la métrique par une fonction, puisque $\sqrt{-1}\, dd^c = 2\overline{\partial}\partial$.

11.B. Métrique initiale. – Soit $(\mathcal{F}, D)$ une connexion logarithmique intégrable. On part d'une métrique h_0 sur chaque $P_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$, prolongée sur chaque $\oplus_k \mathrm{Gr}_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$ de sorte que $H^* = H$ et $Y^* = X$. On transporte, comme il avait été fait pour un fibré de Higgs, cette métrique et cette décomposition de $\mathcal{F}|_\mathcal{D}$ dans un voisinage tubulaire de $\mathcal{D}$, pour poser près de $\mathcal{D}$

$$h_1 = \oplus_{k,\beta,\mu} \rho^{2\beta}(-\operatorname{Log}\rho^2)^k h_0|_{\mathrm{Gr}_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu},$$

puis finalement, toujours dans un voisinage de $\mathcal{D}$,

$$h(x,y) = h_1(e^X x, e^X y), \tag{11.3}$$

prolongé de manière C^∞ loin de $\mathcal{D}$.

Faisons un calcul local, on a, si (s_j) est une base C^∞ et h_0-orthonormale, alors, dans la base

$$\frac{s_j}{\rho^{\beta_j}(-\operatorname{Log}\rho^2)^{k_j/2}},$$

on obtient, en prenant des coordonnées locales (z^m) telles que (z^0) soit une équation du diviseur et en notant p la projection locale sur $\mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} D^{0,1} &= p^* D_\mathcal{D}^{0,1} - \frac{\beta}{2}\overline{\partial}\operatorname{Log}\rho^2 + \frac{H}{2}\frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log}\rho^2)} + \text{ perturbation}, \\ D^{1,0} &= p^* D_\mathcal{D}^{1,0} + \left(\mu - \frac{\beta}{2}\right)\partial \operatorname{Log}\rho^2 + \left(\frac{H}{2} + Y\right)\frac{dz^0}{z^0(-\operatorname{Log}\rho^2)} + \text{ perturbation}, \end{aligned}$$

et donc, dans la base h-orthonormale

$$e^j = \frac{e^{-X} s_j}{\rho^{\beta_j}(-\operatorname{Log}\rho^2)^{k_j/2}},$$

on obtient ainsi

$$D^{0,1} = p^* D^{0,1}_{\mathcal{D}} - \frac{\beta}{2}\overline{\partial} \operatorname{Log} \rho^2 + \left(\frac{H}{2} + X\right) \frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log} \rho^2)} + \text{perturbation},$$
$$D^{1,0} = p^* D^{1,0}_{\mathcal{D}} + \left(\mu - \frac{\beta}{2}\right) \partial \operatorname{Log} \rho^2 + \left(-\frac{H}{2} + Y\right) \frac{dz^0}{z^0(-\operatorname{Log} \rho^2)} + \text{perturbation}.$$

On calcule sans difficulté les formules

$$\psi^{1,0} = p^* \psi^{1,0}_{\mathcal{D}} + (\mu - \beta) \partial \operatorname{Log} \rho + Y \frac{dz^0}{z^0(-\operatorname{Log} \rho^2)} + \text{ perturbation},$$
$$(D^+)^{0,1} = p^*(D^+_{\mathcal{D}})^{0,1} + (\mu^* - \beta)\overline{\partial} \operatorname{Log} \rho + \frac{H}{2} \frac{d\overline{z}^0}{\overline{z}^0(-\operatorname{Log} \rho^2)} + \text{ perturbation},$$

et on déduit

$$G = p^*(G_{\mathcal{D}} + (\beta - \mu) R^N) + \text{perturbation}. \tag{11.4}$$

Le terme perturbation est à entendre dans le même sens précis qu'en (3.1).

11.C. Pseudo-classes de Chern et théorème inverse. – De même qu'on définit des classes de Chern à partir de la courbure F d'une connexion, on peut définir de pseudo-classes de Chern à partir de la pseudo-courbure G d'un opérateur D'' sur un fibré plat. Sur une variété compacte, celles-ci s'annulent automatiquement [29, lemme 1.1], mais cela n'est plus le cas ici : il peut y avoir des contributions provenant du diviseur.

Nous calculons ici ce dont nous avons besoin. Notons $\gamma = \beta - \operatorname{re} \mu$ les poids de la représentation de $X - \mathcal{D}$ associée à la connexion logarithmique intégrable $(\mathcal{F}, \mu)$.

Proposition 11.1. – *On a les égalités*

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_X \operatorname{tr}(G) \wedge \omega^{n-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \operatorname{tr}(\gamma_{\mathfrak{a}}) < [\omega_0]^{n-1}, \mathcal{D}_{\mathfrak{a}} >= p\text{-}deg_{\omega_0}(\mathcal{F}),$$
$$\frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(G \wedge G) \wedge \omega^{n-2} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \operatorname{tr}(\gamma^2_{\mathfrak{a}})\, deg_{\omega_0}(N_{\mathfrak{a}}).$$

Démonstration. – Raisonnons rapidement comme dans la proposition 7.2. On a vu que $G = -D(\psi^{1,0} - \psi^{0,1})$, si bien que

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_X \operatorname{tr}(G) \wedge \omega^{n-1} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_X -d(\operatorname{tr}(\psi^{1,0} - \psi^{0,1}) \wedge \omega_0^{n-1},$$

mais, par le calcul local,

$$\begin{aligned}\psi^{1,0} - \psi^{0,1} &= (\mu - \beta)\partial \operatorname{Log} \rho - (\mu^* - \beta)\overline{\partial} \operatorname{Log} \rho + \text{ termes bornés} \\ &= (\operatorname{re} \mu - \beta)\sqrt{-1}\, d^c \operatorname{Log} \rho - (\operatorname{im} \mu)\sqrt{-1}\, d \operatorname{Log} \rho,\end{aligned}$$

d'où on déduit la première égalité puisque $\gamma = \beta - \operatorname{re} \mu$.

Pour obtenir la seconde égalité de la première formule, on remarque que l'intégrabilité $D^2 = 0$ implique

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_X \operatorname{tr}(D^2) \wedge \omega^{n-1} \\ &= deg_{\omega_0}(\mathcal{F}) + \sum_{\mathfrak{a}} \operatorname{tr}(\mu_{\mathfrak{a}}) < [\omega_0], \mathcal{D}_{\mathfrak{a}} > \\ &= p\text{-}deg_{\omega_0}(\mathcal{F}) + \sum_{\mathfrak{a}} \operatorname{tr}(\operatorname{re}\mu - \beta) < [\omega_0], \mathcal{D}_{\mathfrak{a}} >, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Passons à présent à la seconde formule. Par la même méthode, on a

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(G \wedge G) \wedge \omega^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2} \int_X d \operatorname{tr}\left((\psi^{1,0} - \psi^{0,1}) \wedge D(\psi^{1,0} - \psi^{0,1})\right) \wedge \omega_0^{n-2},$$

mais seuls interviennent dans l'intégration les termes

$$\operatorname{tr}\left((\operatorname{re}\mu - \beta)^2 \sqrt{-1}\, d^c \operatorname{Log}\rho \wedge \sqrt{-1}\, dd^c \operatorname{Log}\rho\right)$$

et on obtient comme contribution sur chaque composante

$$\frac{1}{8\pi^2}(\operatorname{tr}(\operatorname{re}\mu - \beta)^2)(-2\pi\sqrt{-1}) \int_{\mathcal{D}} R^N \wedge \omega_0^{n-2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\gamma^2)\, deg_{\omega_0}(N),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

En réalité, il y a de fortes restrictions sur les valeurs possibles de β et μ, dans le cas où $deg_{\omega_0}(N) \neq 0$. Cela est analogue au lemme 7.1. En effet, regardons le spécialisé de $(\mathcal{F}, D)$ sur l'une des composantes de $\mathcal{D}$. Le sous-espace primitif $P_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$, muni de sa connexion homogène $P_k D_{\beta,\mu}$, est plat, de résidu μ, si bien que la connexion

$$D_1 = P_k D_{\beta,\mu} - \mu \partial \operatorname{Log} \rho_N^2$$

est bien définie (non plate) au-dessus de $\mathcal{D}$, sur le même fibré holomorphe $P_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu$. On peut alors intégrer $\operatorname{tr}(D_1^2)$ sur $\mathcal{D}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} deg_{\omega_0}(P_k \mathrm{Gr}_\beta \mathcal{F}_\mu) &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{tr}(D_1^2) \wedge \omega_0^{n-1} \\ &= -(\operatorname{rang} P_k\, \mathrm{Gr}_\beta\, \mathcal{F}_\mu) \mu\, deg_{\omega_0}(N). \end{aligned}$$

On a donc démontré le lemme suivant.

LEMME 11.2. – *Soit $(\mathcal{F}, D)$ une connexion logarithmique intégrable. Sur une composante de $\mathcal{D}$ telle que $deg_{\omega_0}(N_{\mathfrak{a}}) \neq 0$, on a nécessairement*

$$\begin{aligned} &\operatorname{re}\mu = -\mu_{\omega_0}(P_k\, \mathrm{Gr}_\beta\, \mathcal{F}_\mu)/deg_{\omega_0}(N_{\mathfrak{a}}), \\ &\operatorname{im}\mu = 0. \end{aligned}$$

REMARQUE 11.3. – On peut comparer ces restrictions à celles qui existent du côté fibré de Higgs.

L'annulation de $\operatorname{im}\mu$ correspond à celle de $\operatorname{im}\lambda$ dans le lemme 7.1 (et du côté représentation, signifie que la valeur propre de la monodromie est de module 1).

La condition sur $\operatorname{re}\mu$ est équivalente à la condition $\alpha = -\mu_{\omega_0}(P_k\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda)/deg_{\omega_0}(N)$ du théorème 8.1 (quand $\mu_{\omega_0}(\mathcal{E}) = 0$, ce qui est nécessaire pour obtenir une connexion plate). On voit ainsi que cette condition était tout à fait nécessaire pour obtenir la correspondance.

Enfin, la condition du lemme 7.1 sur $\operatorname{re}\lambda$, qui est égale à $-\gamma/2$, n'a pas d'équivalent ici. C'est une condition que l'on posera sur γ pour obtenir la correspondance inverse.

De manière parallèle au théorème 8.1, on peut à présent énoncer le théorème suivant. Rappelons que, dans le cas compact, on dit qu'une connexion intégrable est semi-simple si elle n'admet de sous-connexion intégrable non triviale. Dans notre cas, il y a une condition de stabilité : on dit qu'une connexion logarithmique est stable si toute sous-connexion logarithmique non triviale a une pente strictement inférieure (on n'a pas besoin, dans ce sens, d'utiliser des sous-objets avec une régularité plus faible).

THÉORÈME 11.4. – *Soit $(\mathcal{F}, D)$ une connexion logarithmique intégrable, de degré parabolique nul. On suppose que les poids γ sur une composante $\mathcal{D}_\mathfrak{a}$ sont nuls quand $deg_{\omega_0}(N_\mathfrak{a}) \neq 0$, que chaque $(P_k\mathrm{Gr}_\beta\mathcal{F}_\mu, P_kD_{\beta,\mu})$ est semi-simple, et que $(\mathcal{F}, D)$ est p-μ_{ω_0}-stable.*

Alors $(\mathcal{F}, D)$ admet une unique métrique harmonique h' sur $X - \mathcal{D}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\Lambda G_{h'}^{(\mathcal{F},D)} = 0,$$

mutuellement bornée avec la métrique de référence h, et appartenant à un espace $\hat{C}_\delta^{2+\vartheta}$.

En fait, on a $G_{h'}^{(\mathcal{F},D)} = 0$ et cette métrique induit ainsi un fibré de Higgs logarithmique et donne la correspondance inverse de la proposition 9.3.

Enfin, la correspondance ainsi établie se spécialise sur le diviseur.

Démonstration. – Nous omettons la démonstration, qui est similaire à celle du théorème 8.1, en remplaçant D'', D' et D par D, D^c et D''. On commence par résoudre le problème sur les spécialisés, de sorte que la formule (11.4) fournit une métrique initiale avec $G \in L_\delta^p$. On minimise alors la fonctionnelle énergie,

$$\int_X |\psi|^2,$$

parmi les métriques dans un espace $C_\delta^{2+\vartheta}$, sous une contrainte sur $\Lambda G = i(D^+)^*\psi$.

Ce cas est en fait plus simple que celui de la construction d'une métrique de Hermite-Einstein sur les fibrés de Higgs, puisque la fonctionnelle à minimiser est évidente et que les objets limites, en cas de non-convergence, sont automatiquement réguliers, à cause de la nature plus forte de la loi de Leibniz pour l'opérateur D. Cela évite d'avoir à faire appel à un analogue du théorème de régularité des applications faiblement holomorphes de Uhlenbeck et Yau. □

Partie V

Conséquences

12. Cohomologie L^2

Nous montrons ici que les outils introduits pour la démonstration des théorèmes 8.1 et 11.4 conviennent bien pour étudier la déformation isomonodromique des fibrés de Higgs ou des connexions intégrables logarithmiques. Le terme « isomonodromique » signifie, du côté des représentations, que l'on déforme sans modifier la classe de conjugaison de la monodromie autour du diviseur (ni les poids).

12.A. FIBRÉS DE HIGGS. – Il est bien connu (*voir* par exemple [26], [5]), que l'espace tangent Zariski, en un point stable, à l'espace des modules des fibrés de Higgs logarithmiques (pour des poids fixés), est le $\mathbb{H}^1$ d'hypercohomologie du complexe

$$\mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \xrightarrow{[\cdot,\phi]} \boldsymbol{\Omega}^1_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \xrightarrow{[\cdot,\phi]} \boldsymbol{\Omega}^2_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \xrightarrow{[\cdot,\phi]} \cdots$$

Pour obtenir les déformations isomonodromiques, il est facile de voir qu'il suffit de considérer le sous-complexe

$$\left(\boldsymbol{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}\right)_{\mathrm{iso}},$$

qui est égal au précédent en dehors de $\mathcal{D}$ et qui est défini par le fait qu'une section locale,

$$\varphi = \frac{dz^0}{z^0} \wedge \varphi_0 + \varphi_1,$$

de $\boldsymbol{\Omega}^i_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}$ près de $\mathcal{D}$ est dans $(\boldsymbol{\Omega}^i_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\mathrm{iso}}$ si, sur $\mathcal{D}$, chaque $\mathrm{Gr}_\alpha\varphi_0$ est dans l'orbite infinitésimale de $\mathrm{Gr}_\alpha\mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\phi$, c'est-à-dire à valeurs dans l'image de $\mathrm{ad}(\mathrm{Gr}_\alpha\mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\phi)$.

Ainsi, notant $\mathcal{Q}^\bullet$ le quotient de $\boldsymbol{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}$ par $(\boldsymbol{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\mathrm{iso}}$,

$$(*) \qquad \mathcal{Q}^0 = 0,$$
$$(**) \qquad \mathcal{Q}^1 = \oplus_\alpha(\mathcal{E}nd\,\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E})/\mathrm{image}(\mathrm{ad}\,\mathrm{Gr}_\alpha\,\mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\phi).$$

Par exemple, supposons que chaque $\mathrm{Gr}_\alpha\mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\phi$ soit semi-simple, et les $\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$ stables (ce qui est le cas, en particulier, s'ils sont de rang 1). D'après $(*)$ et $(**)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^0(\mathcal{Q}^\bullet) &= 0,\\
\mathbb{H}^1(\mathcal{Q}^\bullet) &= \mathbb{H}^0(\oplus_\alpha(\mathcal{E}nd\,\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E})/\mathrm{image}(\mathrm{ad}\,\mathrm{Gr}_\alpha\,\mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\phi))\\
&= \mathbb{H}^0(\oplus_\alpha \ker(\mathrm{ad}\,\mathrm{Gr}_\alpha\,\mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\phi))\\
&= H^0(\oplus_{\alpha,\lambda}\mathcal{E}nd\,\mathrm{Gr}_\alpha\,\mathcal{E}_\lambda) = \oplus_{\alpha,\lambda}\mathbb{C}
\end{aligned}$$

et on déduit de la suite exacte longue d'hypercohomologie associée au quotient :

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}^1\big((\mathbf{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Log}\,\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\mathrm{iso}}\big) \longrightarrow \mathbb{H}^1\big(\mathbf{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Log}\,\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}\big) \longrightarrow \oplus_{\alpha,\lambda}\mathbb{C}.$$

Au niveau des déformations, la dernière flèche s'interprète comme la flèche qui à une déformation infinitésimale associe la déformation des valeurs propres de $\mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\phi$ dans chaque $\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}$. Si l'image d'une déformation infinitésimale par cette flèche est nulle, alors la déformation infinitésimale provient d'une déformation infinitésimale isomonodromique (on a exactement cette description grâce à la simplicité des $\mathrm{Gr}_\alpha\mathcal{E}_\lambda$).

On peut calculer l'hypercohomologie du complexe $(\mathbf{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Log}\,\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\mathrm{iso}}$ comme une cohomologie de Dolbeault.

THÉORÈME 12.1. – *Si h est une métrique adaptée sur le fibré de Higgs logarithmique $(\mathcal{E}, \phi)$, alors l'hypercohomologie de*

$$(\mathbf{\Omega}^\bullet_{\mathrm{Log}\,\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\mathrm{iso}}$$

est égale à la cohomologie $\hat{L}^\infty_\delta$ du complexe

$$\Omega^0 \xrightarrow{D''} \Omega^1 \xrightarrow{D''} \cdots$$

qui est aussi égale à sa cohomologie L^2 par le théorème 5.1. *On notera cette hypercohomologie $H^\bullet_{Dol}$.*

On va démontrer ce théorème en plusieurs étapes.

Un peu d'algèbre linéaire. – Soit Y un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E. L'action de $\mathrm{ad}\,Y$ sur $\mathrm{End}\,E$ est nilpotente et on obtient une filtration $W_k\,\mathrm{End}\,E$, en fait définie par

$$\varphi \in W_m\,\mathrm{End}\,E \text{ si } \varphi(W_kE) \subset W_{k+m}E.$$

Nous définissons de plus $\widehat{W}_{-1}\,\mathrm{End}\,E$, constitué des $\phi \in W_0\,\mathrm{End}\,E$ tels que

$$\oplus_k \mathrm{Gr}_k\phi,$$

qui est un élément de

$$\oplus_k\,\mathrm{End}\,\mathrm{Gr}_kE \subset \mathrm{End}\,(\oplus_k\mathrm{Gr}_kE),$$

commute avec Y; si on complète Y en une représentation (H, X, Y) de $\mathfrak{sl}_2$, alors $\widehat{W}_{-1}\,\mathrm{End}\,E$ se décompose en la somme directe de $W_{-1}\,\mathrm{End}\,E$ et du sous-espace primitif $P_0\,\mathrm{End}\,E$, qui est la composante où la représentation agit trivialement.

LEMME 12.2. – *Si Y est nilpotent, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{End}\,E/\widehat{W}_{-1}\,\mathrm{End}\,E \xrightarrow{\mathrm{ad}\,Y} \mathrm{image}\,(\mathrm{ad}\,Y)/W_{-3}\,\mathrm{End}\,E.$$

Démonstration. – La surjectivité est clair, et l'injectivité facile à voir si on prolonge Y en une représentation de $\mathfrak{sl}_2$ et si on applique la théorie standard des représentations de $\mathfrak{sl}_2$. □

Supposons à présent que $\tau \in \operatorname{End} E$ se décompose en $\tau = \tau^s + Y$ (parties semi-simple et nilpotente), on a alors une filtration W (et un $\widehat{W}_{-1}$) dans chaque $\operatorname{End} E_\lambda$, où les E_λ est l'espace propre de τ^s pour la valeur propre λ. Il n'est pas difficile à présent de déduire du lemme précédent :

LEMME 12.3. – *On a un isomorphisme*

$$\operatorname{End} E / \oplus_\lambda \widehat{W}_{-1} \operatorname{End} E_\lambda \xrightarrow{\operatorname{ad}\tau} \operatorname{image} \operatorname{ad}\tau / \oplus_\lambda W_{-3} \operatorname{End} E_\lambda.$$

Un nouveau complexe. – Introduisons à présent un nouveau complexe, mieux adapté à l'analyse qui a été développée dans ce papier. Si $(\mathcal{E}, \phi)$ est un fibré de Higgs, chaque $\mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}$ est muni de l'action de $\mathrm{Gr}_\alpha \mathrm{Res}_{\mathcal{D}} \phi$.

Nous définissons $(\mathbf{\Omega}^i_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\text{strict}}$ comme le sous-faisceau de $\mathbf{\Omega}^i_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}$, qui lui est égal en dehors de $\mathcal{D}$, et dont les sections locales près d'un point de $\mathcal{D}$ sont données par

$$\varphi = \frac{dz^0}{z^0} \wedge \varphi_0 + \varphi_1,$$

avec

$$\mathrm{Gr}_\alpha \varphi_0 \in \oplus_\lambda W_{-3} \mathcal{E}nd\, \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda,$$
$$\mathrm{Gr}_\alpha \varphi_{-1} \in \oplus_\lambda \widehat{W}_{-1} \mathcal{E}nd\, \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda.$$

LEMME 12.4. – *On a une inclusion*

$$((\mathbf{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\text{strict}}, [\cdot, \phi]) \hookrightarrow ((\mathbf{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\text{iso}}, [\cdot, \phi])$$

qui induit un isomorphisme en hypercohomologie.

Démonstration. – Il suffit de montrer que l'hypercohomologie du complexe quotient $(\mathcal{Q}^\bullet, [\cdot, \phi])$, qui est concentré sur $\mathcal{D}$, est triviale. Pour cela, nous montrons que ses faisceaux de cohomologie sont nuls : c'est donc un problème local.

Plaçons-nous près d'un point de $\mathcal{D}$, on a localement

$$\mathcal{Q}^i = \mathcal{Q}^i_0 \oplus \mathcal{Q}^i_1,$$

avec

$$\mathcal{Q}^i_0 = \mathbf{\Omega}^{i-1}_{\mathcal{D}} \otimes \oplus_\alpha (\operatorname{image}(\operatorname{ad} \mathrm{Gr}_\alpha \mathrm{Res}_{\mathcal{D}} \phi) / \oplus_\lambda W_{-3} \mathcal{E}nd\, \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E}_\lambda)$$
$$\mathcal{Q}^i_1 = \mathbf{\Omega}^i_{\mathcal{D}} \otimes \oplus_\alpha \Big(\mathcal{E}nd\, \mathrm{Gr}_\alpha \mathcal{E} / \oplus_\lambda \widehat{W}_{-1} \mathcal{E}nd\, \mathcal{E}_\lambda\Big)$$

avec différentielle $[\cdot, \phi]$ égale à, si $\phi = (\mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\, \phi) dz^0/z^0 + \phi_1$ sur $\mathcal{D}$,

$$\begin{pmatrix} [\cdot, \phi_1] & (-1)^i [\cdot, \mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\, \phi] \\ 0 & [\cdot, \phi_1] \end{pmatrix}.$$

Mais, par le lemme 12.3, on sait que $[\cdot, \mathrm{Res}_{\mathcal{D}}\, \phi]$ réalise un isomorphisme $\mathcal{Q}^i_1 \to \mathcal{Q}^{i+1}_0$. Maintenant, c'est un lemme facile que de voir que si on a deux complexes $(\mathcal{Q}^\bullet_0, d_0)$ et $(\mathcal{Q}^\bullet_1, d_1)$ avec un isomorphisme $u : (\mathcal{Q}^\bullet_1, d_1) \to (\mathcal{Q}^\bullet_0, d_0)$ de degré 1, alors le complexe

$$\left(\mathcal{Q}^\bullet_0 \oplus \mathcal{Q}^\bullet_1, \begin{pmatrix} d & u \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)$$

a ses faisceaux de cohomologie triviaux. □

Cohomologies $\hat{L}^\infty_\delta$ et L^2. – Tout d'abord, on a la relation importante suivante entre nos faisceaux « stricts » et les espaces d'analyse qui avaient été construits.

LEMME 12.5. – *Soit $(\mathcal{E},\phi)$ un fibré de Higgs avec une métrique adaptée h. Alors, localement près de $\mathcal{D}$, une $(i,0)$-forme φ, définie en dehors de $\mathcal{D}$, à valeurs dans* $\operatorname{End}\mathcal{E}$, *définit une section de $(\mathbf{\Omega}^i_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\text{strict}}$ si et seulement si $\overline{\partial}^{\mathcal{E}}\varphi = 0$ et $\varphi \in \hat{L}^\infty_\delta$.*

Démonstration. – Soit une base locale holomorphe (s_j) de $\mathcal{E}$, adaptée à la décomposition $\mathcal{E} = \oplus\mathcal{E}_\lambda$, et aux filtrations. Une métrique adaptée sur $\mathcal{E}$ est nécessairement mutuellement bornée avec la métrique diagonale

$$\big(r^{2\alpha_j}(-\operatorname{Log} r^2)^{k_j}\big).$$

Soit $\varphi \in \hat{L}^\infty_\delta$ une $(i,0)$-forme holomorphe à valeurs dans $\operatorname{End}\mathcal{E}$. Dans cette base, écrivons

$$\varphi_i^j = \frac{dz^0}{z^0} \wedge (\varphi_0)_i^j + (\varphi_1)_i^j,$$

alors, dans la base orthonormale $e_j = s_j/r^{\alpha_j}(-\operatorname{Log} r^2)^{k_j/2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_i^j &= r^{\alpha_i-\alpha_j}(-\operatorname{Log} r^2)^{(k_i-k_j)/2}\left(\frac{dz^0}{z^0} \wedge (\varphi_0)_i^j + (\varphi_1)_i^j\right)\\ &= \frac{dz^0}{z^0} \wedge (\varphi_0')_i^j + (\varphi_1')_i^j,\end{aligned}$$

avec $(-\operatorname{Log} r^2)\varphi_0' \in L^\infty_\delta$ et $\varphi_1' \in \hat{L}^\infty_\delta$, ce qui implique

$$\begin{aligned}|\varphi_0'| &= O\big((-\operatorname{Log}{}^2)^{-1-\delta}\big),\\ |\varphi_1' - (\varphi_1')_{\mathcal{D}}| &= O\big((-\operatorname{Log}{}^2)^{-\delta}\big),\end{aligned}$$

avec $(\varphi_1')_{\mathcal{D}}$ constitué uniquement de composantes à $\alpha_i = \alpha_j$ et à valeurs dans $\ker(\tau,\sigma)$ (*voir* section 4), ce qui signifie que les composantes à $k_i \neq k_j$ sont nulles (donc $[H,(\varphi_1')_{\mathcal{D}}] = 0$) et $[Y,(\varphi_1')_{\mathcal{D}}] = 0$.

Revenant à la base holomorphe (s_j), on déduit que $(\varphi_0)_i^j$ et $(\varphi_1)_i^j$ sont holomorphes jusque sur $\mathcal{D}$, et sont nuls sur $\mathcal{D}$

(1) si $\alpha_i < \alpha_j$ (donc ils respectent la filtration parabolique),

(2) si $\alpha_i = \alpha_j$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ (donc les gradués commutent avec $(\operatorname{Res}_{\mathcal{D}}\phi)^s$);

(3) enfin, si $\alpha_i = \alpha_j$ et $\lambda_i = \lambda_j$, $(\varphi_0)_i^j$ s'annule si $k_i - k_j + 2 \geq 0$ (donc on envoie W_k dans W_{k-3}), $(\varphi_1)_i^j$ s'annule si $k_i - k_j > 0$ (donc on envoie W_k dans W_k) et de plus, si $k_i = k_j$, alors $((\varphi_1)_i^j)_{k_i=k_j}$ doit commuter à Y.

On trouve ainsi exactement la description d'une section de $(\mathbf{\Omega}^i_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\text{strict}}$. La réciproque est facile. □

A présent, terminons la démonstration du théorème 12.1. Montrons que l'hypercohomologie du complexe

$$(\mathcal{Y}^\bullet,[\cdot,\phi]) = ((\mathbf{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{E})_{\text{strict}}, [\cdot,\phi])$$

se calcule bien par des résolutions de type Dolbeault. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{Y}^0 & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \mathcal{Y}^1 & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \mathcal{Y}^2 & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\hat{L}_\delta^\infty\Omega^{0,0} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \hat{L}_\delta^\infty\Omega^{1,0} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \hat{L}_\delta^\infty\Omega^{2,0} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \cdots \\
\overline{\partial}\downarrow & & \overline{\partial}\downarrow & & \overline{\partial}\downarrow & & \\
\hat{L}_\delta^\infty\Omega^{0,1} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \hat{L}_\delta^\infty\Omega^{1,1} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \hat{L}_\delta^\infty\Omega^{2,1} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \cdots \\
\overline{\partial}\downarrow & & \overline{\partial}\downarrow & & \overline{\partial}\downarrow & & \\
\hat{L}_\delta^\infty\Omega^{0,2} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \hat{L}_\delta^\infty\Omega^{1,2} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \hat{L}_\delta^\infty\Omega^{2,2} & \xrightarrow{[\cdot,\phi]} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Par le lemme précédent et la résolution du problème de $\overline{\partial}$ effectué dans la section 9.A, chaque verticale est exacte. Cela implique que l'hypercohomologie recherchée est calculée par la cohomologie des sections globales du complexe simple issu du double complexe des $\hat{L}_\delta^\infty\Omega^{p,q}\operatorname{End}\mathcal{E}$. On n'obtient rien d'autre que le complexe

$$\Omega^0\operatorname{End}E \xrightarrow{D''} \Omega^1\operatorname{End}E \xrightarrow{D''} \Omega^2\operatorname{End}E \xrightarrow{D''} \cdots$$

avec la régularité $\hat{L}_\delta^\infty$. Un lemme évident d'homotopie montre que la cohomologie des sections globales peut être calculée à l'aide de formes avec régularité $\hat{C}_\delta^{1+\vartheta}$, et donc à l'aide de formes harmoniques grâce au théorème 5.1 (le théorème est valable aussi pour le laplacien associé à l'opérateur D'', *voir* la remarque 5.2). Le même théorème implique que cette cohomologie est égale à la cohomologie L^2. $\square$

12.B. Connexions intégrables. – Du côté connexions intégrables logarithmiques, on a la même description. Les déformations générales d'une connexion intégrable logarithmique $(\mathcal{F}, D)$ sont données par le complexe

$$(\mathbf{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}}\otimes\mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{F}, D),$$

alors que les déformations isomonodromiques sont donnés par le complexe

$$((\mathbf{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}}\otimes\mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{F})_{\mathrm{iso}}, D),$$

égal au précédent en dehors de $\mathcal{D}$, et, au voisinage d'un point de $\mathcal{D}$, on demande qu'une section locale de $(\mathbf{\Omega}^i_{\operatorname{Log}\mathcal{D}}\otimes\mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{F})_{\mathrm{iso}}$ s'écrive

$$\varphi = \frac{dz^0}{z^0}\wedge\varphi_0 + \varphi_1,$$

avec φ_0 dans l'orbite infinitésimale de $\operatorname{Gr}_\beta\operatorname{Res}_{\mathcal{D}}D$ dans chaque $\operatorname{Gr}_\beta\mathcal{F}$. On peut ici aussi construire un complexe $(\mathbf{\Omega}^\bullet_{\operatorname{Log}\mathcal{D}}\otimes\mathcal{P}ar\,\mathcal{E}nd\,\mathcal{F})_{\mathrm{strict}}$, et on obtient alors de même le théorème suivant.

THÉORÈME 12.6. – *Si h est une métrique adaptée pour la connexion intégrable logarithmique $(\mathcal{F}, D)$, alors l'hypercohomologie de*

$$(\mathbf{\Omega}^{\bullet}_{\mathrm{Log}\,\mathcal{D}} \otimes \mathcal{P}ar\, \mathcal{E}nd\, \mathcal{E})_{\mathrm{iso}}$$

est égale à la cohomologie $\hat{L}^{\infty}_{\delta}$ du complexe

$$\Omega^0 \xrightarrow{D} \Omega^1 \xrightarrow{D} \cdots$$

qui est aussi égale à sa cohomologie L^2 par le théorème 5.1. *on notera cette hypercohomologie $H^{\bullet}_{\mathrm{DR}}$.*

12.C. MÉTRIQUES HARMONIQUES. – Supposons à présent que $(\mathcal{E}, \phi)$ et $(\mathcal{F}, D)$ se correspondent via les théorèmes 8.1 et 11.4, de sorte que l'on dispose d'une métrique harmonique h.

On sait alors que les divers laplaciens

$$\begin{aligned} \Delta &= DD^* + D^*D, & \Delta'' &= D''(D'')^* + (D'')^*D'', \\ \Delta^c &= D^c(D^c)^* + (D^c)^*D^c, & \Delta' &= D'(D')^* + (D')^*D', \end{aligned}$$

sont tous égaux :

$$\Delta = \Delta^c = 2\Delta'' = 2\Delta'.$$

Par les théorèmes précédents sur l'hypercohomologie, on dispose d'une théorie de Hodge pour les hypercohomologies des complexes « iso ».

On peut alors tirer les mêmes conclusions que Simpson [29, pages 22-25]. En particulier, on dispose

- du principe des deux types

$$\ker(D') \cap \ker(D'') \cap (\mathrm{im}\,(D'') + \mathrm{im}\,(D')) = \mathrm{im}\,(D'D'')$$

- de quasi-isomorphismes

$$(\ker(D'), D'') \sim (H^{\bullet}_{DR}, 0) \sim (H^{\bullet}_{Dol}, 0).$$

La théorie développée par Goldman et Millson [14] s'applique. Ecrivons le corollaire dans le cas des connexions intégrables.

COROLLAIRE 12.7. – *L'espace des déformations isomonodromiques d'une connexion intégrable logarithmique $(\mathcal{F}, D)$ satisfaisant les hypothèses du théorème* 11.4 *est quadratique en $(\mathcal{F}, D)$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. Biquard, *Fibrés paraboliques stables et connexions singulières plates* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 119, 1991, p. 231-257).

[2] O. Biquard, *Prolongement d'un fibré holomorphe hermitien à courbure L^p sur une courbe ouverte* (*Int. J. Math.*, vol. 3, 1992, p. 441-453).

[3] O. Biquard, *Sur les fibrés paraboliques sur une surface complexe* (*J. London Math. Soc.*, vol. 53, 1996, p. 302-316).

[4] O. Biquard, *Sur les équations de Nahm et la structure de Poisson des algèbres de Lie semi-simples complexes* (*Math. Ann.*, vol. 304, 1996, p. 253-276).

[5] I. Biswas et S. Ramanan, *An infinitesimal study of the moduli of Hitchin pairs* (*J. London Math. Soc.*, vol. 49, 1994, p. 219-231).

[6] E. Cattani, A. Kaplan et W. Schmid, *L^2 and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure* (*Inventiones math.*, vol. 87, 1987, p. 217-252).

[7] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics* (*J. Differential Geom.*, vol. 28, 1988, p. 361-382).

[8] M. Cornalba et P. Griffiths, *Analytic cycles and vector bundles on non-compact algebraic varieties* (*Inventiones math.*, vol. 28, 1975, p. 1-106).

[9] S. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri,* (*J. Differential Geom.*, vol. 18, 1983, p. 269-277).

[10] S. Donaldson, *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles* (*Proc. London Math. Soc.*, (3) 50, 1985, p. 1-26).

[11] S. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature* (*Duke Math. J.*, vol. 54, 1987, p. 231-247).

[12] S. Donaldson, *Twisted harmonic maps and self-duality equations* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. 55, 1987, p. 127-131).

[13] A. Fujiki, *Hyper-Kähler structure on the moduli space of flat bundles* (*Prospects in complex geometry (Katata and Kyoto, 1989*), 1-83, L.N.M. 1468, Springer (Berlin 1991)).

[14] W. Goldman et J. Millson, *The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 67, 1988, p. 43-96).

[15] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. 55, 1987, p. 59-126).

[16] J. Jost et K. Zuo, *Harmonic maps and $S\ell(r,\mathbb{C})$-representations of fundamental groups of quasiprojective manifolds* (*J. Algebr. Geom.,* vol. 5, 1996, p. 77-106).

[17] J. Jost et K. Zuo, *Harmonic maps of infinite energy and rigidity results for archimedean and nonarchimedean representations of fundamental groups of quasiprojective varieties,* preprint.

[18] M. Kashiwara et T. Kawai, *The Poincaré lemma for variations of polarized Hodge structure* (*Publ. RIMS Kyoto Univ.*, vol. 23, 1987, p. 345-407).

[19] P. Kronheimer et M. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces, I* (*Topology*, vol. 32, 1993, p. 773-826).

[20] J. Le Potier, *Fibrés de Higgs et systèmes locaux* (*Séminaire Bourbaki*, exposé 737, 1991).

[21] R. Lockart et R. McOwen, *Elliptic differential operators on noncompact manifolds* (*Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, (4) 12, 1985, p. 409-447).

[22] C. Margerin, *Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein*, d'après S. K. Donaldson, K. K. Uhlenbeck et S. T. Yau (*Séminaire Bourbaki*, exposé 683, 1987).

[23] V. Maz'ya et B. Plamenevskii, *Estimates in L_p and in Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary* (*Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 123, 1984, p. 1-56).

[24] V. Mehta et C. Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures* (*Math. Ann.*, vol. 248, 1980, p. 205-239).

[25] M. Narasimhan et C. Seshadri, *Stable and unitary bundles on a compact Riemann surface* (*Ann. Math.*, vol. 82, 1965, p. 540-564).

[26] N. Nitsure, *Moduli of semistable logarithmic connections* (*J. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, 1993, p. 597-609).

[27] C. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization* (*J. Amer. Math. Soc.*, vol. 1, 1988, p. 867-918).

[28] C. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves* (*J. Amer. Math. Soc.*, vol. 3, 1990, p. 713-770).

[29] C. Simpson, *Higgs bundles and local systems* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 75, 1992, p. 5-95).

[30] K. Uhlenbeck et S. T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles* (*Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 39S, 1986, p. 257-293).

[31] K. Uhlenbeck et S. T. Yau, *A note on our previous paper: on the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles* (*Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 42, 1989, p. 703-707).

[32] S. Zucker, *Hodge theory with degenerating coefficients : L^2 cohomology in the Poincaré metric* (*Ann. Math.*, (2) 109, 1979, p. 415-476).

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1995.)

O. Biquard
CMAT,
École Polytechnique,
F-91128 Palaiseau C.