ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BẢO CHÂU NGÔ

Faisceaux pervers, homomorphisme de changement de base et lemme fondamental de Jacquet et Ye

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 32, nº 5 (1999), p. 619-679

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1999_4_32_5_619_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 32, 1999, p. 619 à 679.

FAISCEAUX PERVERS, HOMOMORPHISME DE CHANGEMENT DE BASE ET LEMME FONDAMENTAL DE JACQUET ET YE

PAR Báo Châu NGÔ

ABSTRACT. – We give a geometric interpretation of the base change homomorphism between the Hecke algebra of $\mathrm{GL}(n)$ for an unramified extension of local fields of positive characteristic. For this, we use some results of Ginzburg, Mirkovic and Vilonen related to the geometric Satake isomorphism. We give a new proof of these results in the positive characteristic case.

By using that geometric interpretation of the base change homomorphism, we prove the fundamental lemma of Jacquet and Ye for arbitrary Hecke function in the equal characteristic case. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – On propose une interprétation géométrique de l'homomorphisme de changement de base entre les algèbres de Hecke de $\mathrm{GL}(n)$ pour une extension non ramifiée de corps locaux de caractéristiques positives. Pour cela, on utilise des résultats de Ginzburg, Mirkovic et Vilonen sur l'isomorphisme de Satake géométrique. On propose une nouvelle preuve de ces résultats valable en caractéristique positive.

En utilisant cette interprétation géométrique de l'homomorphisme de changement de base, on démontre, dans le cas d'égales caractéristiques, un lemme fondamental conjecturé par Jacquet et Ye pour une fonction de Hecke arbitraire. © Elsevier, Paris

Introduction

Soient F un corps local de caractérisitique $p > 0$, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers et $k = \mathbb{F}_q$ son corps résiduel. Notons $\mathcal{H}^+$ l'algèbre des fonctions complexes à support compact dans

$$\mathrm{GL}(n, F)^+ = \mathrm{GL}(n, F) \cap \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O})$$

qui sont bi-$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$-invariantes. D'après Satake ([Sa]), on a un isomorphisme entre $\mathcal{H}^+$ et l'algèbre des polynômes symétriques :

$$\mathcal{H}^+ \tilde{\to} \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]^{\mathfrak{S}_n}.$$

Soient r un entier naturel, F_r l'extension non ramifiée de degré r de F, $\mathcal{O}_r$ son anneau des entiers et $k_r = \mathbb{F}_{q^r}$ son corps résiduel. Notons $\mathcal{H}_r^+$ l'algèbre des fonctions complexes à support compact dans $\mathrm{GL}(n, F_r)^+$ qui sont bi-$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_r)$-invariantes. On a comme précédemment un isomorphisme de Satake

$$\mathcal{H}_r^+ \tilde{\to} \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]^{\mathfrak{S}_n}.$$

Compte tenu des isomorphismes de Satake pour $\mathcal{H}^+$ et pour $\mathcal{H}_r^+$, l'homomorphisme de changement de base $b : \mathcal{H}_r^+ \to \mathcal{H}^+$ est défini par l'homomorphisme

$$\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]^{\mathfrak{S}_n} \to \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

qui envoie t_i sur z_i^r.

D'après la décomposition de Cartan

$$\mathrm{GL}(n, F_r)^+ = \coprod_{\lambda=(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)} \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_r)\varpi^\lambda \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_r)$$

ϖ^λ étant la matrice diagonale $\mathrm{diag}\,(\varpi^{\lambda_1}, \dots, \varpi^{\lambda_n})$, les fonctions caractéristiques $c_{r,\lambda}$ des doubles classes $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_r)\varpi^\lambda \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_r)$ forment une base de $\mathcal{H}_r^+$. On ne connaît pas d'expression explicite pour les fonctions $b(c_{r,\lambda})$ mis à part le cas trivial $\lambda = (0, \dots, 0)$ où $b(c_{r,\lambda}) = c_\lambda$ et le cas $\lambda = (1, 0, \dots, 0)$ où $b(c_{r,\lambda})$ est la fonction de Drinfeld ([Lau1]).

On sait d'après Lusztig ([Lus]) que $(\mathrm{GL}(n, F) \cap \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}))/\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$ s'identifie naturellement à l'ensemble des points rationnels d'un schéma X qui est une réunion disjointe de k-schémas projectifs X_d. L'action de $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$ sur $(\mathrm{GL}(n, F) \cap \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}))/\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$ se déduit d'une action d'un groupe algébrique de dimension infinie G sur X, G agissant sur chacune des composante connexe X_d à travers un quotient G_d de type fini sur k.

On peut paramétrer les orbites de X_d par les n-partitions $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ de d. La décomposition en orbites $X_d = \coprod_{|\lambda|=d} X_\lambda$ reflète bien entendu la décomposition de Cartan. L'adhérence $\bar{X}_\lambda$ de l'orbite X_λ étant en général singulière, il est naturel de considérer son complexe d'intersection ℓ-adique $\mathcal{A}_\lambda = \mathrm{IC}(\bar{X}_\lambda, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. Le faisceau pervers $\mathcal{A}_\lambda$ est alors défini sur k et G-équivariant.

On définit à la suite de Lusztig les fonctions

$$a_{r,\lambda} : X(k_r) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

par

$$a_{r,\lambda}(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_{q^r}, (\mathcal{A}_\lambda)_x).$$

Choisissons [1] une fois pour toutes un isomorphisme $\bar{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$. On peut alors considérer ces fonctions $a_{r,\lambda}$ comme des éléments de $\mathcal{H}_r^+$. La matrice de passage des fonctions $c_{r,\lambda}$ aux fonctions $a_{r,\lambda}$ étant triangulaire supérieure, les fonctions $a_{r,\lambda}$ forment aussi une base de $\mathcal{H}_r^+$.

Notre premier objectif consiste à interpréter géométriquement les fonctions $b(a_{r,\lambda})$.

A la suite de Lusztig, Ginzburg, Mirkovic et Vilonen, on peut définir un produit de convolution des faisceaux pervers de type $\mathcal{A}_\lambda$, et donc, pour chaque λ, la r-ième puissance convolée

$$\mathcal{A}_\lambda^{*r} = \underbrace{\mathcal{A}_\lambda * \cdots * \mathcal{A}_\lambda}_{r \text{ fois}}.$$

Ce produit de convolution étant commutatif, on a un automorphisme κ' de $\mathcal{A}_\lambda^{*r}$:

$$\kappa' : \mathcal{A}_{\lambda,1} * \mathcal{A}_{\lambda,2} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,r} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{A}_{\lambda,r} * \mathcal{A}_{\lambda,1} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,r-1} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_{\lambda,1} * \mathcal{A}_{\lambda,2} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,r}$$

([1]) Ce choix n'est en fait pas important car toutes nos traces sont rationnelles.

où $\mathcal{A}_{\lambda,1},\ldots,\mathcal{A}_{\lambda,r}$ sont r copies de $\mathcal{A}_\lambda$, où κ est l'isomorphisme de commutativité de Drinfeld, Ginzburg, Mirkovic et Vilonen et où ι se déduit des isomorphismes évidents $\mathcal{A}_{\lambda,i}\to\mathcal{A}_{\lambda,i+1}$, l'indice i étant prise parmi les classes modulo r. On définit pour chaque λ, la fonction $\phi_{r,\lambda}\in\mathcal{H}^+$ comme la trace de $\mathrm{Fr}\circ\kappa'$ sur les fibres de $\mathcal{A}_\lambda^{*r}$ au-dessus des points fixés par Fr.

THÉORÈME 3. – *Pour toute n-partition λ, on a $b(a_{r,\lambda})=\phi_{r,\lambda}$.*

On utilise ce théorème 3 pour généraliser le résultat principal de [Ngo1]. Pour l'énoncer précisément, fixons quelques notations.

Notons A le sous-groupe diagonal de $\mathrm{GL}(n)$ et N son sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Notons $\theta : N(F)\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ le caractère

$$\theta(x)=\Psi\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_{i,i+1}\right)$$

où $\Psi : F\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est un caractère additif de conducteur $\mathcal{O}$.

Pour toute fonction $\phi\in\mathcal{H}^+$ et pour tout $a\in A(F)$, posons

$$I(a,\phi)=\int_{N(F)\times N(F)}\phi({}^{\mathrm{t}}x_1ax_2)\theta(x_1)\theta(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

où la mesure de Haar normalisé $\mathrm{d}x$ de $N(F)$ attribue à $N(\mathcal{O})$ le volume 1.

Cette intégrale intervient comme une intégrale orbitale dans une formule des traces relative de Jacquet. Il s'agit d'une intégrale de Kloosterman si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathrm{GL}(n,\mathcal{O})$.

Soient F_2 l'extension quadratique non ramifiée de F et $\mathcal{O}_2$ son anneau des entiers. Notons $\theta' : N(F_2)\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ le caractère défini par

$$\theta'(x)=\Psi\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i,i+1}+\bar{x}_{i,i+1})\right)$$

où $x\mapsto\bar{x}$ est l'élément non trivial du groupe $\mathrm{Gal}\,(F_2/F)$.

Soit $S(F)$ l'ensemble des matrices $g\in\mathrm{GL}(n,F_2)$ telles que ${}^{\mathrm{t}}\bar{g}=g$. Le groupe $\mathrm{GL}(n,F_2)$ agit sur $S(F)$ par $g.s={}^{\mathrm{t}}\bar{g}sg$. Notons $\mathcal{H}'^+$ l'espace des fonctions à support compact dans

$$S(F)^+=S(F)\cap\mathfrak{gl}(n,\mathcal{O}_2)$$

qui sont invariantes sous l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}_2)$.

Pour toute fonction $\phi'\in\mathcal{H}'^+$ et pour toute matrice diagonale $a\in A(F)$, posons

$$J(a,\phi')=\int_{N(F_2)}\phi'({}^{\mathrm{t}}\bar{x}ax)\theta'(x)\mathrm{d}x$$

où la mesure de Haar normalisée $\mathrm{d}x$ de $N(F_2)$ attribue à $N(\mathcal{O}_2)$ le volume 1.

Soit $b : \mathcal{H}_2^+ \to \mathcal{H}^+$ l'homomorphisme de changement de base. Soit $b' : \mathcal{H}_2^+ \to \mathcal{H}'^+$ l'application définie par $b'(f) = \phi'$ où

$$\phi'(g\,{}^{\mathrm{t}}\bar{g}) = \int_{H(\mathcal{O})} f(gh)\mathrm{d}h$$

où $H(\mathcal{O})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_2)$ formé des matrices g telles que ${}^{\mathrm{t}}\bar{g} = g^{-1}$. Il est clair que la valeur $\psi'(g\,{}^{\mathrm{t}}\bar{g})$ ainsi définie ne dépend pas du choix de g. Si $s \in S(F)$ ne s'écrit pas sous la forme $s = g\,{}^{\mathrm{t}}\bar{g}$, nous posons $\phi'(s) = 0$.

THÉORÈME 4. – *Pour toute matrice*

$$a = \mathrm{diag}\,(a_1, a_1^{-1}a_2, \ldots, a_{n-1}^{-1}a_n) \in A(F)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_2^+$, *on a*

$$I(a, b(f)) = (-1)^{\mathrm{val}(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})} J(a, b'(f))$$

où val *est la valuation de* F.

On démontre finalement le lemme fondamental de Jacquet et Ye pour l'élément long w_0 du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_n$. Pour toute $\phi \in \mathcal{H}^+$, pour toute $\phi' \in \mathcal{H}'^+$ et pour tout élément central $a \in A(F_\varpi)$, on introduit, à la suite de Jacquet et Ye, les intégrales orbitales relatives

$$I(w_0 a, \phi) = \int_{N(F)\times N(F)/(N(F)\times N(F))^{w_0 a}} \phi({}^{\mathrm{t}}x w_0 a x')\theta(xx')\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,;$$
$$J(w_0 a, \phi') = \int_{N(F_2)/N(F y_2)^{w_0 a}} \phi'({}^{\mathrm{t}}\bar{x} w_0 a x)\theta'(x)\mathrm{d}x\,.$$

THÉORÈME 5. – *Pour un élément central* $a = \mathrm{diag}\,(\varpi^d, \varpi^d, \ldots, \varpi^d) \in A(F_\varpi)$ *pour toute fonction* $f \in \mathcal{H}_2^+$, *on a*

$$I(w_0 a, b(f)) = (-1)^{d(1+2+\cdots+(n-1))} J(w_0 a, b'(f)).$$

Ces énoncés jouent le rôle d'un lemme fondamental dans une formule des traces relative. Ils ont été conjecturés par Jacquet et Ye dans [JY] pour un corps local F de caractéristique arbitraire. Ils les ont démontrés pour $n = 2$ et $n = 3$ dans loc.cit. Dans [Ngo1], sous l'hypothèse que la caractéristique de F est positive, on a démontré le théorème 4 dans le cas particulier où f est l'unité de l'algèbre $\mathcal{H}_2^+$.

Grâce au théorème 3, on sait interpréter géométriquement b. L'application b' étant définie comme une intégrale le long des fibres, elle admet aussi une interprétation géométrique.

Ayant une traduction géométrique des applications b et b', on démontre le théorème 4 en adaptant les arguments de [Ngo1] et le théorème 5 en utilisant la preuve d'une conjecture de Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen ([Ngo3]).

L'article est divisé en deux parties.

Dans la première partie, on propose une nouvelle démonstration valable en caractéristique positive des résultats de Ginzburg, Mirkovic et Vilonen ([Gin],[M-V]) sur lesquels s'appuierait notre théorème 3. L'idée principale est de déformer en considérant une situation globale. On exploite aussi une analogie avec la correspondance de Springer.

On rappelle en 1.1 la définition du schéma des réseaux de Lusztig ([Lus]) ou plutôt sa variante globale. Désormais, on note $\mathcal{O} = k[\varpi]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans k et à une variable ϖ, F son corps des fractions, $\mathcal{O}_\varpi$ et F_ϖ leurs complétés en ϖ. Notons Q_d le k-schéma affine dont l'ensemble des k-points est celui des polynômes unitaires de degré d à coefficients dans k. Soit X_d le k-schéma dont l'ensemble des k-points est celui des réseaux $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}^n$ tel que $\dim(\mathcal{O}^n : \mathcal{R}) = d$. On a un morphisme propre $\phi : X_d \to Q_d$ défini par le déterminant. Ce morphisme est en général singulier en dehors de l'ouvert $Q_{d,rss}$ des polynômes unitaires séparables. La fibre de ϕ en $\varpi^d \in Q_d(k)$ qu'on notera $X_{d,\varpi}$, s'identifie à la composante connexe indexée par d du schéma des réseaux $\mathcal{R}_\varpi \subset \mathcal{O}_\varpi^n$ considéré par Lusztig. C'est la fibre la plus intéressante.

On introduit en 1.2 en imitant [Lau], une résolution simultanée $\pi : \tilde{X}_d \to X_d$ des fibres de ϕ. Le morphisme π est petit, génériquement un $\mathfrak{S}_d$-torseur, sa restriction à toutes les fibres de ϕ est semi-petite : il est complètement analogue à la résolution simultanée de Grothendieck-Springer.

Ainsi, pour chaque représentation ℓ-adique de dimension finie ρ de $\mathfrak{S}_d$, on peut construire un faisceau pervers $\mathcal{A}_\rho$ sur X_d dont les restrictions à toutes les fibres de ϕ sont encore perverses, à décalage près (1.3). Si V_ρ est l'espace sous-jacent de la représentation ρ, $\mathcal{A}_\rho$ est un facteur direct du faisceau pervers

$$\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(X_d)](\dim(X_d)/2) \boxtimes V_\rho.$$

Cette remarque très simple se révèle cruciale dans la suite de l'article.

Le but de la section 2 est d'établir une correspondance à la Springer pour X_d. Si cette correspondance est certainement connue des spécialistes, nous n'avons pas pu trouver de démonstration détaillée dans la littérature. En 3.1 on démontre que les complexes $\mathcal{A}_\rho$ sont équivariants relativement à l'action d'un schéma en groupes lisse $G_d \to Q_d$. Grâce à cette propriété d'équivariance, nous montrons en 3.2 que les $\mathcal{A}_\rho$ sont en quelques sortes indépendants de n. En 3.3, on établit dans le cas $n = d$, le lien avec la correspondance de Springer habituelle due à Lusztig, Borho et MacPherson ([Lus],[B-M]).

A la suite de Lusztig, Mirkovic et Vilonen, pour tous $d', d'' \in \mathbb{N}$ tels que $d' + d'' = d$, on introduit en 3.1 le produit tordu $X_{d'} \tilde{\times} X_{d''} \to X_d$ à l'aide duquel est défini le complexe produit de convolution $\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}$ sur X_d. Du fait que la résolution simultanée se factorise à travers $X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}$, le complexe $\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}$ est un faisceau pervers. On définit en 3.3 un isomorphisme de commutativité

$$\kappa : \mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''} \tilde{\to} \mathcal{A}_{\rho''} * \mathcal{A}_{\rho'}$$

en utilisant le prolongement intermédiaire à partir de l'ouvert $Q_{d,rss}$. Il est vraisemblable que κ coïncide avec l'isomorphisme de commutativité défini de manière différente par Drinfeld, Mirkovic et Vilonen ([M-V]).

La section 4 est consacrée à l'étude du complexe $\mathrm{R}\phi_*\mathcal{A}_\rho$. Le but est de démontrer que ce complexe est complètement déterminé par sa restriction à n'importe quel ouvert dense. En fait, il satisfait à un ensemble de propriétés plus précises que nous regroupons sous le nom de la propriété $(*)$. Un complexe borné $\mathcal{C}$ de faisceaux constructibles ℓ-adiques sur un schéma X de type fini sur k a la propriété $(*)$ si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes.

- $\mathcal{C} = \bigoplus_i \mathrm{H}^i(\mathcal{C})[-i]$;
- pour toute immersion $j : U \hookrightarrow X$ d'un ouvert dense U de X, le morphisme d'adjonction $\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) \to j_* j^* \mathrm{H}^i(\mathcal{C})$ est un isomorphisme ;
- Pour tout $x \in X(\mathbb{F}_{q^r})$, Fr^r agit dans $\mathrm{H}^i(\mathcal{C})$ comme la multiplication par $q^{ir/2}$.

Dans tous nos exemples, les faisceaux de cohomologie $\mathrm{H}^i(\mathcal{C})$ sont aussi les faisceaux pervers, et on peut remplacer le j_* par le $j_{!*}$. De plus, le complexe $\mathcal{C}$ est concentré en des degrés ayant une parité fixe. Toutefois, nous n'avons pas besoin de ces renseignements supplémentaires.

On démontre en 4.1 que la propriété $(*)$ se conserve par passage aux facteurs directs, par image directe par un morphisme fini et par le produit tensoriel externe. On évoque aussi le théorème de Jouanolou sur la cohomologie des fibrés projectifs qui vérifie la propriété $(*)$. On démontre en 4.2 le résultat principal de la section 4 :

THÉORÈME 1. – *Le complexe* $\mathrm{R}\phi_* \mathcal{A}_\rho$ *a la propriété* $(*)$.

On démontre d'abord cet énoncé lorsque $\mathcal{A}_\rho = \mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell[nd](nd/2)$ en utilisant le théorème de Jouanolou. On peut en déduire le cas général parce que $\mathcal{A}_\rho$ est un facteur direct de $\mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell[nd](nd/2) \boxtimes V_\rho$.

Comme application du théorème 1, on construit en 4.3 un isomorphisme

$$\begin{gathered}\mathrm{R}\Gamma_c(X_{d,\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \\ \mathrm{R}\Gamma_c(X_{d',\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho'}) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(X_{d'',\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho''})\end{gathered}$$

en prolongeant l'isomorphisme évident sur l'ouvert $Q_{d,rss}$. Ici $X_{d,\varpi}$ désigne la fibre de X_d au-dessus de $\varpi^d \in Q_d(k)$. Sur $\mathbb{C}$, cet isomorphisme a été obtenu de manière différente par Ginzburg, Mirkovic et Vilonen.

La section 5 est consacrée à l'étude cohomologique des termes constants. On note N le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n)$ des matrices triangulaires supérieures unipotentes, A son sous-groupe diagonal, $B = AN$ son sous-groupe de Borel standard. Soit $\mathcal{H}^+$ l'algèbre des fonctions à support compact dans $\mathrm{GL}(n, F_\varpi)^+$ qui sont bi-$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\varpi)$-invariantes. Rappelons que le terme constant de $f \in \mathcal{H}^+$ est une fonction $A(\mathcal{O}_\varpi)$-invariante $f^B : A(F_\varpi) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ définie par

$$f^B(\varpi^{\underline{d}}) = q^{-\langle \underline{d}, \delta \rangle} \int_{N(F_\varpi)} f(\varpi^{\underline{d}} x) \mathrm{d}x$$

où

$$\delta = \frac{1}{2}(n-1, n-3, \ldots, 1-n),$$

où $\varpi^{\underline{d}} = \mathrm{diag}(\varpi^{d_1}, \ldots, \varpi^{d_n}) \in A(F_\varpi)$ et où la mesure de Haar normalisée $\mathrm{d}x$ de $N(F_\varpi)$ attribue à $N(\mathcal{O}_\varpi)$ le volume 1. Pour tout $\underline{d} \in \mathbb{N}^n$ avec $|\underline{d}| = d$, Mirkovic et Vilonen ont introduit un sous-schéma localement fermé $S_{\underline{d},\varpi}$ de $X_{d,\varpi}$ tel que, si a_ρ est la fonction trace de Frobenius d'un complexe $\mathcal{A}_\rho$ sur $X_{d,\varpi}$, on a

$$a_\rho^B(\varpi^{\underline{d}}) = q^{-\langle \underline{d}, \delta \rangle} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho)).$$

On introduit en 5.2 une variante globale de $S_{\underline{d},\varpi}$ contenue dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} S_{\underline{d}} \arrow[r, "i_{\underline{d}}"] \arrow[d, "s_{\underline{d}}"'] & X_d \arrow[d, "\phi"] \\ Q_{\underline{d}} \arrow[r, "m"'] & Q_d \end{tikzcd}$$

où $Q_{\underline{d}} = Q_{d_1} \times \cdots \times Q_{d_n}$ et où $m : Q_{\underline{d}} \to Q_d$ est le morphisme défini par $m(P_1, \ldots, P_n) = P_1 \ldots P_n$. La fibre de $S_{\underline{d}}$ au-dessus de $(\varpi^{d_1}, \ldots, \varpi^{d_n}) \in Q_{\underline{d}}(k)$ s'identifie à $S_{\underline{d},\varpi}$. On démontre en 5.2 le résultat principal de la section 5.

THÉORÈME 2. – *Le complexe* $\mathrm{R}s_{\underline{d},!}i_{\underline{d}}^*\mathcal{A}_\rho$ *est concentré en degré* $-d + 2\langle \underline{d}, \delta\rangle$ *et a la propriété* $(*)$.

En particulier

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho[-d](-d/2))$$

est concentré en degré $2\langle \underline{d}, \delta\rangle$. Sur $\mathbb{C}$, cette assertion a été démontré par Mirkovic et Vilonen ([M-V]). De plus, l'endomorphisme Fr agit dans

$$H_c^{2\langle \underline{d},\delta\rangle}(S_{\underline{d}}(\varpi^{\underline{d}}) \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho[-d](-d/2))$$

comme la multiplication par $q^{\langle \underline{d},\delta\rangle}$. La parité du degré $2\langle \underline{d}, \delta\rangle$ dépend uniquement de d, et en fait égale à celle de $d(n-1)$. Par conséquent, si a_ρ est la fonction trace Frobenius sur $\mathcal{A}_{\rho,\varpi} = \mathcal{A}_\rho[-d](-d/2)$ restreint à $X_d(\varpi^d)$, la transformation de Satake de $(-1)^{d(n-1)}a_\rho$ est un polynôme symétrique dont les coefficients sont des entiers naturels. Cette assertion a été démontrée par Lusztig de manière différente ([Lus]).

En utilisant le théorème 2, on démontre en 5.3 l'isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma(X_{d,\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho) \tilde{\to} \bigoplus_{\substack{\underline{d}\in\mathbb{N} \\ |\underline{d}|=d}} \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho)$$

dû à Mirkovic et Vilonen sur $\mathbb{C}$ ([M-V]).

On démontre enfin en 5.4 qu'il existe un isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \bigoplus_{\substack{|\underline{d}'|=d',\, |\underline{d}''|=d'' \\ \underline{d}'+\underline{d}''=\underline{d}}} \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d}',\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho'}) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d}'',\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho''}).$$

Si cet isomorphisme n'apparaît pas explicitement dans [M-V], K. Vilonen m'a informé qu'il sait le démontrer sur $\mathbb{C}$. Cela m'a donné la confiance nécessaire pour chercher à le démontrer sur $\mathbb{F}_q$.

Dans la seconde partie de l'article on propose certaines applications de la théorie de Ginzburg, Mirkovic et Vilonen dans le problème dit "lemme fondamental".

La section 6 est consacrée à la démonstration du théorème 3 évoqué plus haut. Pour cela, on introduit les "nouvelles" fonctions $f_{r,\lambda} \in \mathcal{H}_r^+$ définies comme suit.

On peut identifier $X_\varpi(k_r)$ à l'ensemble des points fixés par l'endomorphisme $\mathrm{Fr}\circ\sigma$ de X_ϖ^r où l'endomorphisme

$$\sigma : \underbrace{X_\varpi \times \cdots \times X_\varpi}_{r \text{ fois}} \to \underbrace{X_\varpi \times \cdots \times X_\varpi}_{r \text{ fois}}$$

est défini par

$$\sigma(x_1,\ldots,x_r) = (x_r, x_1, \ldots, x_{r-1}).$$

En effet on peut faire correspondre un élément $x \in X_\varpi(k_r)$ à l'élément

$$(x, \mathrm{Fr}(x), \ldots, \mathrm{Fr}^{r-1}(x)) \in \mathrm{Fix}\,(\mathrm{Fr}\circ\sigma, X_\varpi^r).$$

Pour chaque λ, l'endomorphisme σ se relevant naturellement sur le faisceau pervers $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}^{\boxtimes r}$ au-dessus X_ϖ^r, on définit la fonction $f_{r,\lambda} \in \mathcal{H}_r^+$ comme la trace de $\mathrm{Fr}\circ\sigma$ agissant sur la fibre de $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}^{\boxtimes r}$ au-dessus des points fixés par $\mathrm{Fr}\circ\sigma$.

On démontre ensuite l'identité $b(f_{r,\lambda}) = \phi_{r,\lambda}$ qui est l'analogue tordu du fait bien connu suivant. Si on remplace F_r par le produit de r copies de F, l'homomorphisme b envoie la fonction $f_1 \boxtimes \cdots \boxtimes f_r$ sur la fonction $f_1 * \cdots * f_r$. L'isomorphisme de la section 5.4 intervient de manière cruciale dans la démonstration de l'identité $b(f_{r,\lambda}) = \phi_{r,\lambda}$.

On démontre finalement que $f_{r,\lambda} = a_{r,\lambda}$ en comparant leurs transformés de Satake.

A partir de la section 7, on ne considère que les extensions de degré $r = 2$. On peut ainsi libérer la lettre r pour d'autres utilisations. On notera f_λ et ϕ_λ pour $f_{2,\lambda}$ et $\phi_{2,\lambda}$.

On prépare dans la section 7 les ingrédients nécessaires pour interpréter géométriquement l'application $b' : \mathcal{H}_2^+ \to \mathcal{H}'^+$. Notamment, on veut comprendre le comportement de la transposition $\tau(g) = {}^{\mathrm{t}}g$ vis-à-vis des faisceaux pervers $\mathcal{A}_\rho$.

La transposition $\tau(g) = {}^{\mathrm{t}}g$ n'étant pas définie sur le schéma des réseaux X_d, on doit introduire en 7.1 le substitut $\mathfrak{g}_{d,r}$. Il s'agit d'un $Q_{d,r}$-schéma où $Q_{d,r}(k)$ est l'ensemble des couples de polynômes unitaires (P,R) avec P divisant R, qui sont de degré respectivement $d < r$. L'ensemble des k-points de $\mathfrak{g}_{d,r}$ au-dessus de $(P,R) \in Q_{d,r}(k)$ est l'ensemble

$$\mathfrak{g}_{d,r}(P,R)(k) = \{g \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}/R\mathcal{O}) \mid \det(g) \in P(\mathcal{O}/R\mathcal{O})^\times\}.$$

Les variables auxiliaires r et R sont nécessaires pour la finitude. Le morphisme naturel $\mathfrak{g}_{d,r} \to X_d$ qui envoie g sur $g\mathcal{O}^n$ est lisse, à fibres géométriquement connexes et équivariant relativement à l'action de G_r. On notera $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ l'image inverse de $\mathcal{A}_\rho$ sur $\mathfrak{g}_{d,r}$.

Puis, on définit le relèvement $\tilde{\tau}_\rho$ de τ sur $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ en imposant la condition que la restriction de $\tilde{\tau}_\rho$ à une fibre de $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ au-dessus d'un élément régulier, semi-simple et symétrique soit l'identité. Sa définition apparemment simple cache certains aspects assez mystérieux de $\tilde{\tau}_\rho$. Mais on reportera cette discussion à la dernière section de l'article.

On étudie en 7.3 le produit de convolution de $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ sur $\mathfrak{g}_{d,r}$ qui est complètement analogue au produit de convolution entre les fonctions. En fait, on démontre ainsi que le produit de convolution entre les $\mathcal{A}_\rho$ défini dans la section 3 correspond bien au produit de convolution habituel via le dictionnaire faisceaux-fonctions de Grothendieck.

On étudie en 7.4 le comportement des $\tilde{\tau}_\rho$ vis-à-vis de l'isomorphisme de commutativité κ. Il s'agit en fait de traduire cohomologiquement le calcul bien connu suivant prouvant la commutativité de l'algèbre de Hecke

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{G(F_\varpi)} f(xy^{-1})g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{G(F_\varpi)} f({}^{\mathrm{t}}y^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}x)g({}^{\mathrm{t}}y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{G(F_\varpi)} g({}^{\mathrm{t}}y)f({}^{\mathrm{t}}y^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}x)\mathrm{d}y \\ &= (g*f)({}^{\mathrm{t}}x) \\ &= (g*f)(x).\end{aligned}$$

On introduit dans la section 8 une autre réalisation géométrique des fonctions $a_{2,\lambda}$. On peut identifier $\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}(k_2)$ à l'ensemble des points fixes de $\mathrm{Fr}\circ\sigma\circ(\tau\times\tau)$ dans $\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}\times\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}$ en envoyant un point $x\in\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}(k_2)$ sur

$$(x,\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(x))\in\mathrm{Fix}\,(\mathrm{Fr}\circ\sigma\circ(\tau\times\tau),\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}\times\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}).$$

On définit la fonction $f'_\lambda:\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ par

$$f'_\lambda(x)=\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}\circ\tilde{\sigma}\circ(\tilde{\tau}_\lambda\times\tilde{\tau}_\lambda),(\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}\quad\mathcal{A}_{\lambda,\varpi})_{(x,\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(x))}).$$

On introduit aussi la fonction $\phi'_\lambda:\mathrm{Fix}\,(\mathrm{Fr}\circ\tau,\mathfrak{g}_{2d,r,\varpi})\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ définie par

$$\phi'_\lambda(x)=\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}\circ\kappa'\circ\tilde{\tau}_\rho,(\tilde{\mathcal{A}}_\rho)_x)$$

où ρ est la représentation induite de $\mathfrak{S}_{2d}$

$$\rho=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{2d}}(\rho_\lambda\times\rho_\lambda)$$

et où κ' se déduit de l'automorphisme de commutativité de $\mathcal{A}_\rho=\mathcal{A}_\lambda*\mathcal{A}_\lambda$. Ces fonctions ϕ'_λ s'identifient naturellement à des éléments de $\mathcal{H}'^{+}$.

On démontre en utilisant la formule des traces de Grothendieck, l'identité $b'(f'_\lambda)=\phi'_\lambda$. Le résultat de la section 7.4 fournit la compatiblité des divers endomorphismes de Frobenius tordus.

On démontre ensuite que $f_\lambda=f'_\lambda$ en tant qu'éléments de $\mathcal{H}_2^+$ si bien qu'on a aussi $f'_\lambda=a_{2,\lambda}$.

Puisque les $a_{2,\lambda}$ forment une base de $\mathcal{H}_2^+$, pour démontrer l'identité

$$I(a,b(f))=(-1)^{\mathrm{val}_\varpi(a_1\ldots a_{n-1})}J(a,b'(f))$$

pour toute $f\in\mathcal{H}_2^+$, il suffit de démontrer

$$I(a,\phi_\lambda)=(-1)^{\mathrm{val}_\varpi(a_1\ldots a_{n-1})}J(a,\phi'_\lambda)$$

pour toute n-partition λ.

Le triplet $(\mathcal{X}_\varpi(a), h, \tau)$, où $\mathcal{X}_\varpi(a)$ est un schéma de type fini sur k avec

$$\mathcal{X}_\varpi(a)(k) = \{(x, x') \in (N(F_\varpi)/N(\mathcal{O}_\varpi))^2 \mid {}^{\mathrm{t}}x_1 a x_2 \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_\varpi)\},$$

où h est le morphisme $\mathcal{X}_\varpi(a) \to \mathbb{G}_a$ défini par la formule

$$h(x, x') = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{res}(x_{i,i+1} + x'_{i,i+1})$$

et où τ est une involution de $\mathcal{X}_\varpi(a)$ avec $\tau(x, x') = (x', x)$ a été défini dans [Ngo1].

Les complexes $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ ne sont pas définis à priori sur $\mathcal{X}_\varpi(a)$. Néanmoins, pour un entier r assez grand, on peut construire un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{r,\varpi}(a) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p_r"'] & \mathfrak{g}_{d_n, r, \varpi} \\ \mathcal{X}_\varpi(a) & \end{tikzcd}$$

où ι est une immersion fermée et où p_r est morphisme lisse dont les fibres géométriques sont isomorphes à des espaces affines. Du fait que les restrictions de $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ dans ces fibres géométriques sont constantes, il peut se descendre en un complexe $\dot{\mathcal{A}}_\rho$ sur $\mathcal{X}_\varpi(a)$. L'involution $\tilde{\tau}_\rho$ se descend aussi en une involution

$$\dot{\tau}_\rho : \tau^* \dot{\mathcal{A}}_\rho \to \dot{\mathcal{A}}_\rho.$$

Grâce à la formule des traces de Grothendieck, on a alors

$$I(a, \phi_\lambda) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Fr} \circ \kappa, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_\varpi(a) \otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h^* \mathcal{L}_\psi))$$
$$J(a, \phi'_\lambda) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Fr} \circ \kappa \circ \dot{\tau}_\rho, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_\varpi(a) \otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h^* \mathcal{L}_\psi))$$

où ρ est la représentation induite

$$\rho = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{2d}} (\rho_\lambda \times \rho_\lambda)$$

avec $d = |\lambda| = d_n/2$. Rappelons que pour cette représentation ρ on a $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}_\lambda * \mathcal{A}_\lambda$.

Le théorème 4 résulte alors de l'énoncé géométrique suivant.

THÉORÈME 4A. – *L'involution $\dot{\tau}_\rho$ agit dans $\mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_\varpi(a) \otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h^* \mathcal{L}_\psi)$ comme la multiplication par $(-1)^{\mathrm{val}_\varpi(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})}$.*

La démonstration de ce théorème occupe la fin de la section 9 et la section 10. Il s'agit d'adapter les arguments de [Ngo1] à une situation plus générale. On renvoie à l'introduction de loc.cit. pour les grandes lignes de cette démonstration.

Dans la dernière section 11, on propose un problème combinatoire concernant un signe ε_λ dépendant de la partition λ, inhérent à la définition du relèvement $\tilde{\tau}_\lambda$. On utilise le théorème 4 pour montrer que pour $\lambda = (d, \ldots, d)$ on a

$$\varepsilon_\lambda = (-1)^{d(1+2+\cdots+(n-1))}.$$

En combinant cette identité avec la preuve de la conjecture de Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen pour les groupes linéaires ([Ngo3]), on démontre enfin le théorème 5.

Je remercie K. Vilonen pour une correspondance très utile. Je remercie Y. Flicker de m'avoir signalé certaines fautes typographiques. Je remercie J.-L. Waldspurger dont une question m'a permis d'améliorer sensiblement l'énoncé du théorème 3. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers G. Laumon qui m'a constamment encouragé durant la préparation de cet article.

Partie I
La théorie de Ginzburg-Mirkovic-Vilonen

1. La situation géométrique

1.1. Le schéma des réseaux de Lusztig

Soient k le corps fini $\mathbb{F}_q$, $\bar{k}$ sa clôture algébrique. Notons $\mathcal{O}$ l'anneau des polynômes à une variable ϖ et à coefficients dans k et F son corps des fractions.

Fixons un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des réseaux $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}^n$ s'identifie naturellement à celui des k-points d'un schéma X localement de type fini sur k. En fait, X est la réunion disjointe infinie des schémas X_d de type fini sur k dont l'ensemble des k-points est

$$\begin{aligned} X_d(k) &= \{\mathcal{R} \subset \mathcal{O}^n \mid \dim_k(\mathcal{O}^n : \mathcal{R}) = d\} \\ &= \{g\,\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}) \in \mathrm{GL}(n,F)^+/\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}) \mid \deg(\det g) = d\} \end{aligned}$$

où le polynôme $\det g$ est bien défini modulo un scalaire inversible. Si on note Q_d l'espace affine des polynômes unitaires de degré d, le déterminant définit un morphisme

$$\phi : X_d \to Q_d.$$

Pour un polynôme unitaire $P \in Q_d(k)$ et pour un réseau $\mathcal{R} \in X_d(P)$, d'après le théorème de Cramer, on a $\mathcal{O}^n \supset \mathcal{R} \supset (P)^n$. Le réseau $\mathcal{R}$ est donc déterminé par son image dans le quotient $(\mathcal{O}/(P))^n$ si bien que la fibre $X_d(P)$ s'identifie naturellement au schéma des sous-espaces vectoriels de codimension d de $(\mathcal{O}/(P))^n$ qui sont stables sous la multiplication par ϖ. En particulier le morphisme ϕ est propre.

Soient $\mathcal{O}_\varpi$ le complété de $\mathcal{O}$ en ϖ et F_ϖ son corps des fractions. L'ensemble des réseaux $\mathcal{R}_\varpi \subset \mathcal{O}_\varpi^n$ tels que $\dim_k(\mathcal{O}_\varpi^n : \mathcal{R}_\varpi) = d$ s'identifie naturellement à celui des k-points de la fibre $X_{d,\varpi}$ du morphisme ϕ au-dessus du k-point $\varpi^d \in Q_d(k)$.

1.2. Une résolution simultanée, d'après Laumon

Le morphisme ϕ_d n'est pas lisse. Ses fibres admettent néanmoins une altération simultanément semi-petite au sens de Goresky et MacPherson, complètement analogue à la résolution simultanée de Grothendieck-Springer. A la suite de Laumon ([Lau]), considérons le schéma $\tilde{X}_d$ avec

$$\tilde{X}_d(k) = \{\mathcal{O}^n = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d \mid \dim_k(\mathcal{R}_{i-1} : \mathcal{R}_i) = 1\}$$

et le morphisme $\pi_d : \tilde{X}_d \to X_d$ avec

$$\pi_d\,(\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d) = \mathcal{R}_d.$$

Soit $\tilde{\phi}_d : \tilde{X}_d \to \mathbb{A}^d$ le morphisme qui envoie le drapeau $(\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d)$ sur le point de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ tel que le quotient $\mathcal{R}_{i-1}/\mathcal{R}_i$ est supporté par le point x_i. On renvoie à [Lau] pour la démonstration de l'énoncé suivant ; voir aussi la fin de 2.3 pour une démonstration indirecte via la résolution simultanée de Grothendieck-Springer.

PROPOSITION 1.2.1. – *Soit $\mathbb{A}^d_{rss}$ l'ouvert dense de $\mathbb{A}^d$ constitué des points de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ deux à deux différentes. Cet ouvert étant stable sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$, posons $Q_{d,rss} = \mathbb{A}^d_{rss}/\mathfrak{S}_d$*

1. *Au-dessus de l'ouvert dense $Q_{d,rss}$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_d \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{A}^d \arrow[d, "\pi_Q"] \\ X_d \arrow[r, "\phi"'] & Q_d \end{tikzcd}$$

   est cartésien.
2. *Le morphisme $\tilde{\phi}_d$ est lisse.*
3. *Le morphisme π est petit au sens de Goresky et MacPherson.*
4. *Pour tout point géométrique x de $\mathbb{A}_d$, la fibre $\tilde{\phi}^{-1}(x)$ est une altération semi-petite de la fibre $\phi^{-1}(\pi_Q(x))$. Si de plus $x = (0, \ldots, 0)$ et $\pi_Q(x) = \varpi^d$, c'est une résolution semi-petite.*

1.3. Les complexes $\mathcal{A}_\rho$

Il résulte de la proposition précédente que $\tilde{X}_{d,rss}$ est un $\mathfrak{S}_d$-torseur au-dessus de $X_{d,rss}$. On peut donc associer à chaque représentation ℓ-adique de dimension finie $\rho : \mathfrak{S}_d \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation du groupe fondamental de $X_{d,rss}$ et donc un système local $\mathcal{L}_\rho$ sur $X_{d,rss}$. Ce système local peut aussi être défini par $\mathcal{L}_\rho = (\pi_{rss,*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes V)^{\mathfrak{S}_d}$, les invariants étant pris relativement à l'action diagonale de $\mathfrak{S}_d$. Notons $\mathcal{A}_\rho$ le faisceau pervers qui est le prolongement intermédiaire de $\mathcal{L}_\rho[\dim X_d](\dim X_d/2)$.

COROLLAIRE 1.3.1. – *1. Le complexe*

$$\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\dim X_d](\dim X_d/2)$$

est un faisceau pervers, prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $X_{d,rss}$. De plus, pour tout point géométrique $x \in Q_d(\bar{k})$, la restriction de

$$\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\dim X_d - d](\dim X_d/2 - d/2)$$

à la fibre $\phi^{-1}(x)$ est encore un faisceau pervers.

2. *On a un isomorphisme $\mathcal{A}_\rho \simeq (\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell \quad V)^{\mathfrak{S}_d}[\dim X_d](\dim X_d/2)$. De plus, pour tout point géométrique $x \in Q_d(\bar{k})$, la restriction de*

$$\mathcal{A}_\rho[-d](-d/2)$$

à la fibre $\phi^{-1}(x)$ est encore un faisceau pervers.

Démonstration. – L'assertion 1 résulte de la proposition 1.2.1. On déduit les mêmes propriétés pour $(\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell \quad V)^{\mathfrak{S}_d}[\dim X_d](\dim X_d/2)$; celles-ci étant conservées par le produit extérieur $\quad V$ et pour les facteurs directs. Par la définition du système local $\mathcal{L}_\rho$ on a un isomorphisme

$$\mathcal{A}_\rho \simeq (\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell \quad V)^{\mathfrak{S}_d}[\dim X_d](\dim X_d/2)$$

au-dessus de l'ouvert $X_{d,rrs}$. On en déduit l'isomorphisme sur X_d entier par la fonctorialité du prolongement intermédiaire. □

2. Une correspondance à la Springer

2.1. La propriété $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$-équivariante

Les fonctions traces de Frobenius des $\mathcal{A}_\rho$ sont des fonctions sur

$$(\mathrm{GL}(n, F) \cap \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}))/\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$$

qui sont $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$-invariantes à gauche. Pour exprimer géométriquement cette propriété, introduisons le schéma en groupes $G_d \to Q_d$ dont la fibre au-dessus d'un point $P \in Q_d(k)$ a pour l'ensemble des k-points l'ensemble $G_d(P)(k) = \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}/(P))$.

LEMME 2.1.1. – *Le schéma en groupes $G_d \to Q_d$ est lisse à fibres géométriques connexes de dimension n^2d.*

Démonstration. – Le schéma en groupes G_d est naturellement un ouvert du Q_d-schéma M_d défini tel que pour chaque $P \in Q_d(k)$ on a $M_{d,n}(P)(k) = \mathfrak{gl}(n, O/(P))$. Il suffit de démontrer l'assertion pour $M_{d,n}$. La dimension relative de $M_{d,n}$ est clairement n^2d. Pour démontrer que $M_{d,n}$ est lisse, il suffit de le faire pour $n = 1$. Par la division euclidienne, chaque classe modulo (P) est représentée par un unique polynôme de degré strictement inférieur à d si bien que $M_{d,1}$ est isomorphe au fibré vectoriel trivial de rang d sur Q_d. En particulier le morphisme $M_{d,1} \to Q_d$ est lisse. □

Un réseau $\mathcal{R} \in X_d(k)$ avec $\phi(\mathcal{R}) = P$ contient d'après le théorème de Cramer le réseau $(P)^n$ et donc est déterminé par son quotient $\mathcal{R}/(P)^n \subset \mathcal{O}^n/(P)^n$. On en déduit une action naturelle

$$G_d \times_{Q_d} X_d \to X_d.$$

COROLLAIRE 2.1.2. – *Les faisceaux pervers $\mathcal{A}_\rho$ sont naturellement G_d-équivariants.*

Démonstration. – G_d agit aussi sur $\tilde{X}_d$. Au-dessus de l'ouvert $\tilde{X}_{d,rss}$ cette action commute à l'action de $\mathfrak{S}_d$ si bien que le système local $\mathcal{L}_\rho$ est naturellement G_d-équivariant. Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_d & X_d \times_{Q_d} G_d \arrow[l, "act"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{X_d}"] \arrow[d] & X_d \arrow[d] \\ Q_d \arrow[u, leftarrow] & G_d \arrow[l] \arrow[r] & Q_d \end{tikzcd}$$

où les deux carrés sont cartésiens. Le morphisme $G_d \to Q_d$ étant lisse et à fibres géométriquement connexes, il en est de même des morphismes act et pr_{X_d}. Les images inverses $act^*\mathcal{A}_\rho$ et $\mathrm{pr}_{X_d}^*\mathcal{A}_\rho$ sont donc à décalage près les prolongements intermédiaires de $act^*\mathcal{L}_\rho$ et de $\mathrm{pr}_{X_d}^*\mathcal{L}_\rho$. L'isomorphisme $act^*\mathcal{L}_\rho \to \mathrm{pr}_{X_d}^*\mathcal{L}_\rho$ induit donc par fonctorialité un isomorphisme $act^*\mathcal{A}_\rho \to \mathrm{pr}_{X_d}^*\mathcal{A}_\rho$. $\square$

2.2. La dépendance des $\mathcal{A}_\rho$ en n

Ajoutons dans ce paragraphe l'indice n à toutes nos notations précédemment posées. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'homomorphisme $\mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}(n+m)$ qui envoie g sur $\mathrm{diag}\,(g, \mathrm{Id}_m)$ induit une immersion fermée $X_{d,n} \to X_{d,n+m}$ au-dessus de Q_d.

LEMME 2.2.1. – *Le fermé $X_{d,n}$ est transverse à l'action du schéma en groupes $G_{d,m+n}$ sur $X_{d,m+n}$. Plus précisément le morphisme $X_{d,n} \times_{Q_d} G_{d,m+n} \to X_{d,m+n}$ induit par l'action, est lisse et ses fibres géométriques sont connexes. Si de plus $n \geq d$, il est surjectif.*

Démonstration. – On démontre d'abord que l'image géométrique de ce morphisme est ouvert et que toutes ses fibres géométriques sont lisses, connexes et ont la même dimension.

Fixons un polynôme unitaire $P \in Q_d(\bar{k})$ avec

$$P(\varpi) = \prod (\varpi - \gamma_i)^{m_i}$$

où les $\lambda_i \in \bar{k}$ sont deux à deux différents. Les orbites de $G_{d,n}(P)(\bar{k})$ (resp. $G_{d,n+m}(P)(\bar{k})$ dans $X_{d,n}(P)(\bar{k})$ (resp. $X_{d,n+m}(P)(\bar{k})$) sont paramétrées par la donnée d'une n-partition $\lambda_i = (\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,n})$ (resp. une $n+m$-partition $\lambda_i' = (\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,n+m})$) de m_i pour chaque i. L'ordre partiel défini par la relation d'inclusion d'une orbite dans l'adhérence d'une autre correspond à l'ordre habituel entre les partitions. De plus, l'orbite dans $X_{d,n+m}(P)(\bar{k})$ coupe $X_{d,n}(P)(\bar{k})$ si et seulement si $\lambda_{i,n+1} = \ldots = \lambda_{i,n+m} = 0$ pour tout i et dans ce cas l'intersection est l'orbite correspondant à $(\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,n})$.

On déduit notamment que l'image géométrique du morphisme

$$X_{d,n} \times_{Q_d} G_{d,n+m} \to X_{d,n+m}$$

est un ouvert dense lequel est $X_{d,n+m}$ tout entier si $n \geq d$ et que ses fibres géométriques sont toutes lisses et connexes. Pour démontrer qu'elles ont la même dimension, il faut démontrer que si

$$\lambda_i' = (\lambda_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$$

pour tout i, la différence entre la dimension de l'orbite dans $X_{d,n+m}(P)(\bar{k})$ de paramètre λ_i' et celle de l'orbite dans $X_{d,n}(P)(\bar{k})$ de paramètre λ_i est une constante.

La dimension de l'orbite de paramètre λ_i est égale à

$$(n-1)d - 2\sum_i \langle \lambda_i, (0, 1, \ldots, n) \rangle$$

et celle de l'orbite correspondant à λ_i' est égale à

$$(n+m-1)d - 2\sum_i \langle \lambda_i', (0, 1, \ldots, n+m) \rangle$$

si bien que la différence des deux dimensions est égale à md du fait que $\lambda_{i,n+1} = \ldots = \lambda_{i,n+m} = 0$.

Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit de démontrer que la source du morphisme est lisse. Le schéma en groupes $G_{d,n+m} \to Q_d$ étant lisse, il suffit de démontrer le lemme suivant.

LEMME 2.2.2. – *Le schéma $X_{d,n}$ est lisse et de dimension nd.*

Démonstration. – On va couvrir $X_{d,n}$ par des ouverts lisses.

Choisissons une n-partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de d. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la $\mathcal{O}$-base standard de $\mathcal{O}^n$. Notons V le sous-k-espace vectoriel de $\mathcal{O}^n$ défini par

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=0}^{\lambda_i - 1} \varpi^j e_i k.$$

Pour tout polynôme unitaire P de degré d, V s'envoie injectivement dans le quotient $(\mathcal{O}/(P))^n$. Pour tout réseau $\mathcal{R} \in \phi^{-1}(P)$, l'image de $\mathcal{R}$ dans $(\mathcal{O}/(P))^n$ est de codimension d. Génériquement ces deux sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{O}/(P))^n$ se coupent donc en 0 ; notons U l'ouvert de $X_{d,n}$ des réseaux $\mathcal{R}$ qui coupent V en 0. On peut associer à chaque point $\mathcal{R} \in U$ n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ tels que pour tout i, $\varpi^{\lambda_i} e_i + v_i \in \mathcal{R}$.

En fait ces $\varpi^{\lambda_i} e_i + v_i$ engendrent $\mathcal{R}$. On a

$$\bigoplus_{i=1}^{n} (\varpi^{\lambda_i} e_i + v_i)\mathcal{O} = g\mathcal{O}^n$$

où pour tout i on a $\deg(g_{ii}) = \lambda_i$ et pour tout $j \neq i$ on a $\deg(g_{j,i}) < \lambda_j$ (le polynôme nul ayant par convention le degré $-\infty$). Un calcul de déterminant évident montre que $\deg(\det(g)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, et donc que $\dim(\mathcal{O}^n / g\mathcal{O}^n) = d$. Mais $g\mathcal{O}^n \subset \mathcal{R}$, on a donc $g\mathcal{O}^n = \mathcal{R}$.

Le morphisme $U \to V^n$ est donc un isomorphisme. En particulier U est lisse est de dimension nd. Quitte à changer la $\mathcal{O}$-base de $\mathcal{O}^n$, on couvre $X_{d,n}$ par des ouverts lisses analogues à U. $\square$

COROLLAIRE 2.2.3 . – *Pour toute représentation ρ de $\mathfrak{S}_d$, notons $\mathcal{A}_{d,n,\rho}$ le faisceau pervers correspondant sur $X_{d,n}$. Si $n \leq d$, $\mathcal{A}_{d,n,\rho}$ est canononiquement isomorphe à la restriction $\mathcal{A}_{d,d,\rho}[(n-d)d]$ à $X_{d,n}$. Si $n \geq d$, $\mathcal{A}_{d,n,\rho}$ est l'unique faisceau pervers défini à un unique isomorphisme près tel que* $\mathrm{pr}^* \mathcal{A}_{d,d\rho}[(n-d)d] \cong \mathrm{act}^* \mathcal{A}_{d,n,\rho}$ *où* $\mathrm{pr} : X_{d,d} \times_{Q_d} G_{d,n} \to X_{d,d}$ *est la projection naturelle et* $\mathrm{act} : X_{d,d} \times_{Q_d} G_{d,n} \to X_{d,n}$ *est la restriction du morphisme action.*

2.3. Une correspondance à la Springer pour $X_{d,n}$

Précisons davantage la construction précédente dans le cas $d = n$ et $\lambda = (1, \ldots, 1)$. Dans ce cas $V = e_1 k \oplus \cdots \oplus e_n k$. On a une immersion ouverte $\mathrm{End}\,(V) \to X_{n,n}$ définie par $g \mapsto (g + \varpi \mathrm{Id})\mathcal{O}^n$. La démonstration du lemme suivant est facile et sera omise. Notons aussi que ce lemme est une variante d'une compactification de la variété des matrices unipotentes due à Lusztig ([Lus]).

LEMME 2.3.1. – *1. La restriction de ϕ à l'ouvert* $\mathrm{End}\,(V)$ *est l'application polynôme caractéristique modulo la convention de signe.*

2. *Pour tout* $P \in Q_d(\bar{k})$, *toute orbite de* $G_{n,n}(P)(\bar{k})$ *dans* $\phi^{-1}(P)$ *coupe* $\mathrm{End}\,(V)$ *en une orbite adjointe de* $\mathrm{GL}(V)$ *dans* $\mathrm{End}\,(V)$. *Cette correspondance est compatible à la paramétrisation de ces deux sortes d'orbites par la donnée de* n*-partitions* λ_i *de la multiplicité* m_i *de chaque racine* γ_i *de* P.
3. *La restriction de* $\tilde{X}_{n,n} \to X_{n,n}$ *à* $\mathrm{End}\,(V)$ *est la résolution de Grothendieck-Springer de* $\mathrm{End}\,(V)$.

Rappelons que les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ sont paramétrisées par les partitions $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots)$ de d. Notons $\lg(\lambda)$ le nombre entier maximal n tel que $\lambda_n > 0$.

PROPOSITION 2.3.2. – *Soient* $d, n \in \mathbb{N}$ *arbitraires,* λ *une partition de* d, ρ_λ *la représentation irréductible correspondant de* $\mathfrak{S}_d$. *Si* $\lg(\lambda) \leq n$ *alors la restriction de* $\mathcal{A}_{\rho_\lambda}[-d](-d/2)$ *à la fibre* $X_{d,\varpi} = X_d(\varpi^d)$ *est isomorphe au complexe d'intersection de l'adhérence de l'orbite de* $X_{\lambda,\varpi}$ *paramétrée par la* n*-partition obtenue de* λ *en tronquant les* λ_i *avec* $i \geq n$ *(qui sont nuls). Si* $\lg(\lambda) > n$, *cette restriction est nulle.*

Démonstration. – En combinant le théorème de Borho-MacPherson ([B-M]) avec le lemme précédent, on obtient le cas $d = n$. Le cas général s'en déduit grâce au corollaire 2.2.3. □

Notons aussi qu'en combinant les lemmes 2.2.1 et 2.3.1 on retrouve la proposition 1.2.1.

3. Le produit de convolution

3.1. Définition

A la suite de Lusztig, Mirkovic et Vilonen ([M-V]), considérons le schéma $X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}$ dont l'ensemble des k-points est

$$X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}(k) = \{\mathcal{O}^n \supset \mathcal{R}' \supset \mathcal{R} \mid \dim(\mathcal{O}^n/\mathcal{R}') = d' \text{ et } \dim(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = d''\}$$

où $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$ sont des sous-réseaux de $\mathcal{O}^n$. Si $g, g' \in \mathrm{GL}(n, F)$ tels que $\mathcal{R} = g\mathcal{O}^n$ et $\mathcal{R}' = g'\mathcal{O}^n$ alors g' et $g'' = {g'}^{-1}g$ appartiennent à $\mathfrak{gl}(n, \mathcal{O})$. Les déterminants $P' = \det(g')$ et $P'' = \det(g'')$ sont respectivement des polynômes de degré d' et d'' indépendants des choix de g' et de g''. On en déduit un morphisme $X_{d'} \tilde{\times} X_{d''} \to Q_{d'} \times Q_{d''}$.

LEMME 3.1.1. – *Au-dessus de l'ouvert* $U \subset Q_{d'} \times Q_{d''}$ *avec*

$$U(k) = \{(P', P'') \in Q_{d'} \times Q_{d''}(k) \mid \mathrm{pgcd}\,(P', P'') = 1\}$$

on a un isomorphisme

$$(X_{d'} \times X_{d''}) \times_{Q_{d'} \times Q_{d''}} U \tilde{\to} (X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}) \times_{Q_{d'} \times Q_{d''}} U.$$

Démonstration. – Soient $\mathcal{R}' \in X_{d'}$ et $\mathcal{R}'' \in X_{d''}$ tels que $\phi(\mathcal{R}') = P'$ et $\phi(\mathcal{R}'') = P''$. Sous l'hypothèse $\mathrm{pgcd}\,(P', P'') = 1$, si $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \cap \mathcal{R}''$ on a $\dim(\mathcal{O}^n/\mathcal{R}) = d$ avec $d = d' + d''$. On vérifie facilement que le morphisme

$$(X_{d'} \times X_{d''}) \times_{Q_{d'} \times Q_{d''}} U \to (X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}) \times_{Q_{d'} \times Q_{d''}} U$$

ainsi défini est un isomorphisme. □

Notons $(Q_{d'} \times Q_{d''})_{rss}$ l'ouvert des (P', P'') tels que le polynôme $P'P''$ n'a pas de racines multiples, $(X_{d'} \times X_{d''})_{rss}$ son image réciproque. D'après le lemme, on a deux immersions ouvertes

$$j : (X_{d'} \times X_{d''})_{rss} \hookrightarrow X_{d'} \times X_{d''}$$

et

$$\tilde{j} : (X_{d'} \times X_{d''})_{rss} \hookrightarrow X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}.$$

Pour toutes représentations ρ' (resp. ρ'') de $\mathfrak{S}_{d'}$ (resp. de $\mathfrak{S}_{d''}$), la restriction de $\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathcal{A}_{\rho''}$ à $(X_{d'} \times X_{d''})_{rss}$ est à décalage près la restriction du système local $\mathcal{L}_{\rho'} \boxtimes \mathcal{L}_{\rho''}$. Notons $\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''}$ son prolongement intermédiaire à $X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}$

$$\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''} = \tilde{j}_{!*} j^* \mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathcal{A}_{\rho''}.$$

Notons $\mu : X_{d'} \tilde{\times} X_{d''} \to X_d$ le morphisme

$$\mu(\mathcal{O}^n \supset \mathcal{R}' \supset \mathcal{R}) = \mathcal{R}.$$

Le produit de convolution est défini par

$$\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''} = \mathrm{R}\mu_*(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''}).$$

3.2. La perversité du produit de convolution

Le résultat suivant est du à Lusztig, Ginzburg, Mirkovic et Vilonen ([Gin],[M-V]).

PROPOSITION 3.2.1. – *Le convolé $\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}$ est un faisceau pervers prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert régulier semi-simple. Plus précisément, soit $\rho = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{d'} \times \mathfrak{S}_{d''}}^{\mathfrak{S}_d}(\rho' \otimes \rho'')$ où $d = d' + d''$. Alors on a un isomorphisme $\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''} \tilde{\to} \mathcal{A}_{\rho}$.*

Démonstration. – Le morphisme $\pi : \tilde{X}_d \to X_d$ se factorise en

$$\tilde{X}_d \xrightarrow{\pi'} X_{d'} \tilde{\times} X_{d''} \xrightarrow{\mu} X_d.$$

Le morphisme π étant petit, il en est de même de π'. Au-dessus de l'ouvert semi-simple régulier, π' est un torseur en groupe $\mathfrak{S}_{d'} \times \mathfrak{S}_{d''}$ qui est par ailleurs isomorphe au torseur $\tilde{X}_{d'} \times \tilde{X}_{d''}$ au-dessus de l'ouvert $(X_{d'} \times X_{d''})_{rss}$. On en déduit que $\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\times} \mathcal{A}_{\rho''}$ est un facteur direct du faisceau pervers

$$\mathrm{R}\pi'_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes (V_{\rho'} \otimes V_{\rho''}).$$

Plus précisément c'est le facteur direct invariant pour l'action diagonale de $\mathfrak{S}_{d'} \times \mathfrak{S}_{d''}$. Par conséquent $\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}$ est un facteur direct du faisceau pervers

$$\mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes (V_{\rho'} \otimes V_{\rho''})$$

et est donc un faisceau pervers prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert régulier semi-simple.

Il suffit donc de vérifier la proposition sur l'ouvert régulier semi- simple. Via la description d'un système local comme une représentation du groupe fondamental, l'opération image directe par μ correspond bien à l'opération induction de $\mathfrak{S}_{d'} \times \mathfrak{S}_{d''}$ à $\mathfrak{S}_d$. □

3.3. La commutativité du produit de convolution

On a vu qu'au-dessus de l'ouvert où le polynôme $P = P'P''$ est séparable, les schémas $X_{d'}\tilde{\times}X_{d''}$,$X_{d'} \times X_{d''}$ et $X_{d''}\tilde{\times}X_{d'}$ sont isomorphes. Cela induit un isomorphisme entre $\mathcal{A}_{\rho'}*\mathcal{A}_{\rho''}$ et $\mathcal{A}_{\rho''}*\mathcal{A}_{\rho'}$ au-dessus de cet ouvert. On appellera son prolongement intermédiaire

$$\kappa : \mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''} \tilde{\to} \mathcal{A}_{\rho''} * \mathcal{A}_{\rho''}$$

l'isomorphisme de commutativité. Il est vraisemblable que cet isomorphisme de commutativité coïncide avec celui de Drinfeld, Mirkovic et Vilonen ([M-V]).

De manière analogue, on obtient un isomorphisme d'associativité

$$(\mathcal{A}_{\rho} * \mathcal{A}_{\rho'}) * \mathcal{A}_{\rho''} \tilde{\to} \mathcal{A}_{\rho} * (\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}).$$

3.4. Restriction

Soit $P = \prod_{j=1}^{r}(\varpi - \gamma_j)^{d_j}$ avec $\gamma_j \in \bar{k}$ et $\sum_j d_j = d$. L'énoncé suivant est une variante du théorème 3.3.8 de [Lau].

PROPOSITION 3.4.1. – *Via l'isomorphisme*

$$X_d(P) = \prod_{j=1}^{r} X_{d_j}((\varpi - \gamma_j)^{d_j}),$$

on a un isomorphisme

$$\mathcal{A}_{\rho}|_{X_d(P)} = \bigoplus_i \bigotimes_j \mathcal{A}_{\rho_{i,j}}|_{X_{d_j}((\varpi-\gamma_j)^{d_j})},$$

où

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{d_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{d_r}}^{\mathfrak{S}_d}\rho = \bigoplus_i \bigotimes_j \rho_{i,j},$$

chaque $\rho_{i,j}$ étant une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_{d_j}$.

Démonstration. – Soient $Q_{\underline{d}} = \prod Q_{d_i}$ et $m : Q_{\underline{d}} \to Q_d$ le morphisme

$$m(P_1, \ldots, P_r) = P_1 \ldots P_r.$$

Soit $\tilde{X}_{\underline{d}}$ le $Q_{\underline{d}}$-schéma dont l'ensemble des k-points au-dessus de

$$(P_1, \ldots, P_r) \in Q_{\underline{d}}(k)$$

est l'ensemble des drapeaux

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_r = \mathcal{R}$$

tels que pour tout $i = 1, \ldots, r-1$, le quotient $\mathcal{R}_{i-1}/\mathcal{R}_i$ est de dimension d_i comme k-espace vectoriel et est annulé par P_i comme $\mathcal{O}$-module.

La résolution $\pi : \tilde{X}_d \to X_d$ se factorise manifestement à travers $\pi_{\underline{d}} : \tilde{X}_{\underline{d}} \to X_d$.

LEMME 3.4.2. – *Soit U l'ouvert dense de $Q_{\underline{d}}$ des suites $(P_1,\dots,P_r)$ telles que les P_i sont deux à deux premiers entre eux. La restriction à U de l'image réciproque $\pi_{\underline{d}}^*\mathcal{A}_\rho$ est un faisceau pervers prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $U\times_{Q_d} Q_{d,rss}$.*

Admettons provisoirement ce lemme. Soit $X_{\underline{d}}=\prod_{j=1}^r X_{d_i}$. Au-dessus de U, on a un isomorphisme

$$X_{\underline{d}}\times_{Q_{\underline{d}}} U=\tilde{X}_{\underline{d}}\times_{Q_{\underline{d}}} U.$$

En admettant le lemme, la restriction à U de $\pi_{\underline{d}}^*\mathcal{A}_\rho$ et de $\bigoplus_i \boxtimes_j \mathcal{A}_{\rho_{i,j}}$ sont isomorphes puisqu'ils sont isomorphes au-dessus de l'ouvert régulier semi-simple. On en déduit que

$$(p_{\underline{d}}^*\mathcal{A}_\rho)_{((\varpi-\gamma_j)^{d_j})_{j=1}^r}=\bigoplus_i\bigotimes_j \mathcal{A}_{\rho_{i,j}}|_{X_{d_j}((\varpi-\gamma_j)^{d_j})}$$

d'où la proposition. □

Démonstration du lemme. – Formons le produit cartésien

$$\tilde{\tilde{X}}_{\underline{d}}=\tilde{X}_{\underline{d}}\times_{X_d}\tilde{X}_d.$$

Notons $\tilde{\tilde{\pi}}:\tilde{\tilde{X}}_{\underline{d}}\to\tilde{X}_{\underline{d}}$ le morphisme évident. Au-dessus de l'ouvert U, $\tilde{\tilde{X}}_{\underline{d}}$ est la réunion de $|\mathfrak{S}_d|/\prod_{j=1}^r|\mathfrak{S}_{d_j}|$ composantes connexes dont chacune est isomorphe à $\tilde{X}_d\times_{Q_{\underline{d}}} U$. Par conséquent, le morphisme $\tilde{\tilde{\pi}}$ est petit au-dessus de l'ouvert U. On en déduit alors par le théorème de changement de base pour un morphisme propre que $\pi_{\underline{d}}^*\mathcal{A}_\rho|U$ est isomorphe au faisceau pervers $(\mathrm{R}\tilde{\tilde{\pi}}_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell\otimes V_\rho)^{\mathfrak{S}_d}$. □

4. L'étude de $\mathrm{R}\phi_*\mathcal{A}_\rho$

4.1. La propriété $(*)$

Les complexes qu'on rencontre, comme par exemple $\mathrm{R}\phi_*\mathcal{A}_\rho$, vérifient un ensemble de propriétés assez fortes qu'on regroupe sous le nom de la propriété $(*)$.

DÉFINITION 4.1.1. – *Un complexe borné de faisceaux constructibles ℓ-adiques $\mathcal{C}$ sur un schéma X de type fini sur k a la propriété $(*)$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites*

- *on a un isomorphisme $\mathcal{C}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{H}^i(\mathcal{C})[-i]$;*
- *pour toute immersion ouverte $j:U\to X$ d'un ouvert dense U, pour tout entier i, le morphisme naturel $\mathrm{H}^i(\mathcal{C})\to j_*j^*\mathrm{H}^i(\mathcal{C})$ est un isomorphisme ;*
- *pour tout $x\in X(\mathbb{F}_{q^r})$, l'endomorphisme Fr^r agit dans $\mathrm{H}^i(\mathcal{C})_x$ comme la multiplication par $q^{ri/2}$.*

Le complexe $\mathcal{C}$ a la propriété $(*)$ renforcée si de plus les faisceaux $\mathrm{H}^i(\mathcal{C})$ sont des faisceaux constants.

Dans nos exemples, les faisceaux de cohomologie $\mathrm{H}^i(\mathcal{C})$ sont en fait des faisceaux pervers et on peut remplacer dans la deuxième condition le j_* par le $j_{!*}$. De plus, $\mathcal{C}$ est concentré en des degré ayant une parité fixe. Nous n'utilisons toutefois pas ces renseignements supplémentaires.

LEMME 4.1.2. – *1. Si $\mathcal{C}$ a la propriété $(*)$ alors pour tout $d\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{C}[d](d/2)$ l'a aussi.*

2. *Tout facteur direct d'un complexe $\mathcal{C}$ ayant la propriété $(*)$ l'a aussi.*
3. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini. Si un complexe de faisceaux $\mathcal{C}$ sur X a la propriété $(*)$ alors le complexe $\mathrm{R}f_*\mathcal{C}$ l'a aussi.*
4. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux complexes de faisceaux respectivement sur X et X' ayant tous les deux la propriété $(*)$, alors le produit tensoriel externe $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}'$ l'a aussi.*
5. *Soient $f : X \to Y$ et $f' : Y \to Z$ deux morphismes tels que $\mathrm{R}f_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathrm{R}f'_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ ont tous les deux la propriété $(*)$ renforcée. Alors $\mathrm{R}(f \circ f')_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ l'a aussi.*

Démonstration. – La propriété sur l'action ponctuelle de Frobenius sur les faisceaux de cohomologie se conserve de manière évidente par rapport aux opérations passage aux facteurs directs, l'image directe par un morphisme fini et produit tensoriel externe. Examinons seulement la conservation des deux autres propriétés.

1. C'est évident.
2. Supposons que $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$. Alors on a $\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) = \mathrm{H}^i(\mathcal{C}') \oplus \mathrm{H}^i(\mathcal{C}'')$ pour tout i. Le morphisme composé

$$\bigoplus_i \mathrm{H}^i(\mathcal{C}') \to \bigoplus_i \mathrm{H}^i(\mathcal{C}) \tilde{\to} \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$$

induit un isomorphisme sur les groupes de cohomologie et est donc un isomorphisme dans la catégorie dérivée.
Il reste à démontrer que si $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte, alors pour tout entier i, le morphisme d'adjonction $\mathrm{H}^i(\mathcal{C}') \to j_*j^*\mathrm{H}^i(\mathcal{C}')$ est un isomorphisme. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X, on a la suite exacte habituelle

$$0 \to i_*i^!\mathcal{F} \to F \to j_*j^*\mathcal{F} \to 0$$

où i est l'immersion du fermé complémentaire de U dans X. L'assertion se déduit de ce que

$$i_*i^!\mathcal{C} = i_*i^!\mathcal{C}' \oplus i_*i^!\mathcal{C}''.$$

3. Le morphisme f étant fini, on a

$$\mathrm{R}f_*(\mathcal{C}) \tilde{\to} \bigoplus_i \mathrm{H}^i(\mathrm{R}f_*\mathcal{C})$$

avec $\mathrm{H}^i(\mathrm{R}f_*\mathcal{C}) = f_*\mathrm{H}^i(\mathcal{C})$.
Soient j l'immersion d'un ouvert dense U dans Y, $j_X : U_X \to X$ son image réciproque. Par le théorème de changement de base, on a un isomorphisme

$$j^*f_*\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) \tilde{\to} f_{U,*}j_X^*\mathrm{H}^i(\mathcal{C}).$$

En composant les isomorphismes suivants

$$\begin{array}{rcl} j_*j^*f_*\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) & \tilde{\to} & j_*f_{U,*}j_X^*\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) \\ & \tilde{\to} & f_*j_{X,*}j_X^*\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) \\ & \tilde{\to} & f_*\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) \end{array}$$

on obtient l'isomorphisme recherché.
4. Les opérations j_* et j^* se comportent bien par rapport au produit tensoriel externe.
5. On utilise la formule de projection.

LEMME 4.1.3. (Jouanolou)

1. *Soit $f : X \to S$ un fibré projectif sur une base S de type fini sur k. Alors le complexe $\mathrm{R}f_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ a la propriété $(*)$ renforcée.*
2. *Soit $f : X \to S$ un fibré vectoriel de rang r sur une base S de type fini sur k. Alors le complexe $\mathrm{R}f_!\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ a la propriété $(*)$ renforcée. Plus précisément, la trace induit un isomorphisme $\mathrm{R}f_!\bar{\mathbb{Q}}_\ell \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell[-2r](-r)$.*

On renvoie à [Jou] pour la démonstration de ce lemme.

La propriété $(*)$ nous sera utile grâce à l'énoncé suivant. Sa démonstration est facile et sera omise.

LEMME 4.1.4. – *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux complexes de faisceaux sur X ayant la propriété $(*)$. Tout isomorphisme entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ au-dessus d'un ouvert dense U de X se prolonge en un isomorphisme sur X tout entier.*

4.2. La propriété $(*)$ du complexe $\mathrm{R}\phi_*\mathcal{A}_\rho$

THÉORÈME 1. – *Le complexe $\mathrm{R}\phi_*\mathcal{A}_\rho$ a la propriété $(*)$.*

Démonstration. – Rappelons qu'on a une résolution simultanée $\pi : \tilde{X}_d \to X_d$. Il suffit de démontrer l'assertion en remplaçant $\mathcal{A}_\rho$ par $\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ car $\mathcal{A}_\rho$ est un facteur direct du faisceau pervers

$$\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[nd](nd/2) \boxtimes V_\rho$$

où V_ρ est l'espace sous-jacent de ρ. Du fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_d & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbb{A}^d \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_Q} \\ X_d & \xrightarrow[\phi]{} & Q_d \end{array}$$

est commutatif, on a

$$\mathrm{R}\phi_*\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell \tilde{\to} \mathrm{R}\pi_{Q,*}\mathrm{R}\tilde{\phi}_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Démontrons d'abord un lemme.

LEMME 4.2.1. – *Le morphisme $\tilde{\phi}$ est le composé de d fibrés projectifs de rang $n-1$.*

Démonstration. – Notons $\tilde{X}_{d,i}$ le schéma au-dessus de $\mathbb{A}^d$ dont la fibre au-dessus de

$$(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{A}^d(k)$$

est l'ensemble des filtrations de réseaux

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_i$$

tel que pour tout $j \leq i$, le quotient $\mathcal{R}_{i-1}/\mathcal{R}_i$ est un $\mathcal{O}$- module de longueur 1, supporté par x_i.

Démontrons que $\tilde{X}_{d,i+1} \to \tilde{X}_{d,i}$ est un fibré projectif de rang $n-1$. En effet, on a

$$\mathcal{R}_i \supset \mathcal{R}_{i+1} \supset (\varpi - x_{i+1})\mathcal{R}_i.$$

Le réseau $\mathcal{R}_i$ et x_{i+1} étant fixés, la donnée de $\mathcal{R}_{i+1}$ est équivalente à celle d'un sous-espace vectoriel de codimension 1 de

$$\mathcal{R}_i/(\varpi - x_{i+1})\mathcal{R}_i$$

d'où résulte le lemme. □

Fin de la démonstration. – Le morphisme $\tilde{\phi}$ étant un composé de d fibrés projectifs de rang $n-1$, le complexe $\mathrm{R}\tilde{\phi}_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ a la propriété $(*)$ renforcée. Il s'ensuit que le complexe $\mathrm{R}\pi_{Q,*}\mathrm{R}\tilde{\phi}_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ a la propriété $(*)$ du fait que π_Q est un morphisme fini. □

4.3. Cohomologie du produit de convolution

Soient ρ', ρ'' des représentations de $\mathfrak{S}_{d'}$ et de $\mathfrak{S}_{d''}$, $\mathcal{A}_{\rho'}$ et $\mathcal{A}_{\rho''}$ les faisceaux pervers correspondants. Notons $m_Q : Q_{d'} \times Q_{d''} \to Q_d$ le morphisme multiplication, $\phi_{d'}$ le morphisme $X_{d'} \to Q_{d'}$ défini en 1.1, $\phi_{d''}$ et ϕ_d les morphismes analogues.

PROPOSITION 4.3.1. – *On a un isomorphisme*

$$m_{Q,*}(\mathrm{R}\phi_{d',*}\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}\phi_{d'',*}\mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \mathrm{R}\phi_{d,*}(\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}).$$

Démonstration. – Rappelons qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_{d'} \tilde{\times} X_{d''} & \xrightarrow{\mu} & X_d \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{d'} \tilde{\times} \phi_{d''}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_d} \\ Q_{d'} \times Q_{d''} & \xrightarrow[m_Q]{} & Q_d \end{array}$$

qui induit un isomorphisme

$$m_{Q,*}\mathrm{R}(\phi_{d'} \tilde{\times} \phi_{d''})_*(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \mathrm{R}\phi_{d,*}(\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}).$$

Rappelons qu'au-dessus de l'ouvert régulier semi-simple qu'on a un isomorphisme

$$(X_{d'} \times X_{d''})_{rss} \tilde{\to} (X_{d'} \tilde{\times} X_{d''})_{rss}$$

de $(Q_{d'} \times Q_{d''})_{rss}$-schémas. Notons $\tilde{\jmath}$ et j les immersions ouvertes

$$\tilde{\jmath} : (Q_{d'} \times Q_{d''})_{rss} \hookrightarrow (Q_{d'} \times Q_{d''})$$
$$j : Q_{d,rrs} \hookrightarrow Q_d.$$

On a alors un isomorphisme

$$\tilde{\jmath}^*(\mathrm{R}\phi_{d',*}\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}\phi_{d'',*}\mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \tilde{\jmath}^*\mathrm{R}(\phi_{d'} \tilde{\times} \phi_{d''})_*(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''})$$

qui induit un isomorphisme

$$j^* m_{Q,*}(\mathrm{R}\phi_{d',*}\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}\phi_{d'',*}\mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} j^* m_{Q,*}\mathrm{R}(\phi_{d'} \tilde{\times} \phi_{d''})_*(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''}),$$

donc un isomorphisme

$$j^* m_{Q,*}(\mathrm{R}\phi_{d',*}\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}\phi_{d'',*}\mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} j^* \mathrm{R}\phi_{d,*}(\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}).$$

Or, d'après 3.4, $m_{Q,*}(\mathrm{R}\phi_{d',*}\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}\phi_{d'',*}\mathcal{A}_{\rho''})$ et $\mathrm{R}\phi_{d,*}(\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''})$ ont tous les deux la propriété $(*)$ d'où se déduit la proposition. □

COROLLAIRE 4.3.2. – *1. Pour toute représentation ρ de $\mathfrak{S}_d$, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma(X_{d,\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho) = \bigoplus_i \mathrm{H}^i(X_{d,\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho).$$

Ici $X_{d,\varpi}$ désigne la fibre de X_d au-dessus de $\varpi^d \in Q_d(k)$.

2. *Pour toutes représentations ρ' et ρ'' de $\mathfrak{S}'_d$ et $\mathfrak{S}_{d''}$, pour $d = d' + d''$ et pour un entier i arbitraire, on a*

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^i(X_{d,\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''})\\ &\quad = \bigoplus_{i'+i''=i} \mathrm{H}^{i'}(X_{d',\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho'}) \otimes \mathrm{H}^{i''}(X_{d'',\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho''}).\end{aligned}$$

Sur $\mathbb{C}$, ce corollaire est dû à Ginzburg, Mirkovic et Vilonen ([Gin],[M-V]).

5. Termes constants

5.1. L'isomorphisme de Satake

Soient N le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes de $\mathrm{GL}(n)$, A son tore diagonal et $B = AN$ le sous-groupe de Borel standard. Soit $\mathcal{H}^+$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et à support compact dans

$$\mathrm{GL}(n, F_\varpi)^+ = \mathrm{GL}(n, F_\varpi) \cap \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_\varpi)$$

qui sont bi-$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\varpi)$-invariantes. Le produit de convolution munit $\mathcal{H}^+$ d'une structure d'algèbre. A la suite de Satake ([Sa]) on définit l'application $\Phi : \mathcal{H}^+ \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell[z_1, \ldots, z_n]$ par

$$\Phi(f) = \sum_{\underline{d} \in \mathbb{N}^n} f^B(\varpi^{\underline{d}}) z^{\underline{d}}$$

où $\varpi^{\underline{d}} = \mathrm{diag}(\varpi^{d_1}, \ldots, \varpi^{d_n}) \in A(F_\varpi)$ et où $z^{\underline{d}} = z_1^{d_1} \ldots z_n^{d_n}$. Les termes constants $f^B(\varpi^{\underline{d}})$ sont définis par

$$f^B(\varpi^{\underline{d}}) = q^{-\langle \delta, \underline{d} \rangle} \int_{N(F_\varpi)} f(\varpi^{\underline{d}} x) \mathrm{d}x,$$

où la mesure de Haar $\mathrm{d}x$ normalisée attribue à $N(\mathcal{O}_\varpi)$ le volume 1 et où

$$\delta = \frac{1}{2}(n-1, n-3, \ldots, 1-n).$$

D'après Satake, Φ définit un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{H}^+$ et la sous-algèbre de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[z_1,\dots,z_n]$ des polynômes symétriques.

Pour chaque $\underline{d}\in\mathbb{N}^n$ tel que

$$|\underline{d}| = \mathrm{d}_1+\cdots+d_n = d,$$

à la suite de Mirkovic et Vilonen ([M-V]) considérons le sous-schéma localement fermé $S_{\underline{d},\varpi}$ de $X_{d,\varpi}$ dont l'ensemble des k-points est celui des réseaux $\mathcal{R}_\varpi\subset\mathcal{O}_\varpi^n$ tels que pour tout i on a

$$(\mathcal{R}_\varpi\cap\bigoplus_{j=1}^{i}\mathcal{O}_\varpi e_j)/(\mathcal{R}_\varpi\cap\bigoplus_{j=1}^{i-1}\mathcal{O}_\varpi e_j) = (\bigoplus_{j=1}^{i-1}\mathcal{O}_\varpi e_j\oplus\mathcal{O}_\varpi\varpi^{d_i}e_i)/(\bigoplus_{j=1}^{i-1}\mathcal{O}_\varpi e_j)$$

où $e_1,\dots,e_n$ est la base standard de $\mathcal{O}_\varpi^n$.

PROPOSITION 5.1.1. – *Soient $\mathcal{A}_{\rho,\varpi}$ un complexe de faisceaux ℓ-adiques sur $X_{d,\varpi}$ qui est $G_d(\varpi^d)$-équivariant, a_ρ sa fonction trace de Frobenius qui est de manière naturelle un élément de $\mathcal{H}^+$. Alors, on a*

$$a_\rho^B(\varpi^{\underline{d}}) = q^{-\langle\underline{d},\delta\rangle}\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr},\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi}\otimes_k\bar{k},\mathcal{A}_{\rho,\varpi})).$$

Démonstration. – L'ensemble

$$\{x\in N(F_\varpi)/N(\mathcal{O}_\varpi)\mid\varpi^{\underline{d}}x\in\mathfrak{gl}(n,\mathcal{O}_\varpi)\}$$

s'identifiant naturellement à celui des k-points de $S(\varpi^{\underline{d}})$, la proposition est une conséquence de la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz. □

Lorsque $\mathcal{A}_{\rho,\varpi}$ est la restriction de $\mathcal{A}_\rho[-d](-d/2)$ à $X_{d,\varpi}$, ce complexe

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi}\otimes_k\bar{k},\mathcal{A}_{\rho,\varpi}))$$

est en fait concentré en un seul degré. La dimension du groupe de cohomologie non trivial peut être calculée à partir de la donnée combinatoire associée à ρ. De plus, l'endomorphisme de Frobenius agit dans ce groupe comme la multiplication par une puissance de q. Toutefois, il semble difficile d'obtenir directement ces renseignements sans étudier au préalable la situation globale.

5.2. Termes constants globaux

Notons $Q_{\underline{d}}=\prod_{i=1}^n Q_{d_i}$ et $m_{\underline{d}}:Q_{\underline{d}}\to Q_d$ le morphisme produit

$$m_{\underline{d}}(P_1,\dots,P_n)=P_1\dots P_n.$$

Notons $S_{\underline{d}}$ le sous-schéma localement fermé de $Q_{\underline{d}}\times_{Q_d}X_d$ dont l'ensemble des k-points au-dessus de $(P_1,\dots,P_n)\in Q_{\underline{d}}(k)$ est celui des réseaux $\mathcal{R}\subset\mathcal{O}^n$ tels que pour tout i on a

$$(\mathcal{R}\cap\bigoplus_{j=1}^{i}\mathcal{O}e_j)/(\mathcal{R}\cap\bigoplus_{j=1}^{i-1}\mathcal{O}e_j) = (\bigoplus_{j=1}^{i-1}\mathcal{O}e_j\oplus\mathcal{O}P_ie_i)/(\bigoplus_{j=1}^{i-1}\mathcal{O}e_j).$$

Notons $s_{\underline{d}}:S_{\underline{d}}\to Q_{\underline{d}}$ le morphisme structurel et $i_{\underline{d}}:S_{\underline{d}}\to X_d$ le morphisme évident.

THÉORÈME 2. – *Pour toute représentation ρ du groupe $\mathfrak{S}_d$, le complexe*

$$\mathrm{R}s_{\underline{d},!}i^*_{\underline{d}}\mathcal{A}_\rho$$

est concentré en degré $-d + 2\langle \underline{d}, \delta\rangle$ et a la propriété $(*)$.

Démonstration. – Rappelons qu'on a une résolution simultanée $\pi : \tilde{X}_d \to X_d$. Il suffit de démontrer l'assertion en remplaçant $\mathcal{A}_\rho$ par $\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[nd](nd/2)$ car $\mathcal{A}_\rho$ est un facteur direct du faisceau pervers

$$\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell[nd](nd/2) \boxtimes V_\rho$$

où V_ρ est l'espace sous-jacent de ρ.

Posons $\tilde{S}_{\underline{d}} = S_{\underline{d}} \times_{X_d} \tilde{X}_d$ et désignons aussi par π le morphisme $\tilde{S}_{\underline{d}} \to S_{\underline{d}}$ et par $\tilde{s}_{\underline{d}}$ le composé $s_{\underline{d}} \circ \pi$. On va démontrer que le complexe

$$\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell = \mathrm{R}s_{\underline{d},!}\mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

est concentré en degré $2\sum_{i=1}^n d_i(n-i)$ et a la propriété $(*)$.

Soit $(P_1,\ldots,P_n) \in Q_{\underline{d}}(k)$. L'ensemble des k-points dans la fibre de $\tilde{S}_{\underline{d}}$ au-dessus de $(P_1,\ldots,P_d)$ est alors celui des filtrations complètes

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d = \mathcal{R}$$

d'un réseau $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{R} \in S_{\underline{d}}(P_1,\ldots,P_n)(k)$.

Pour tout l, le sous-quotient $\mathcal{R}_{l-1}/\mathcal{R}_l$, étant de dimension 1, intervient dans un unique sous-quotient

$$\bigoplus_{j=1}^{i}\mathcal{O}e_j / \bigoplus_{j=1}^{i-1}\mathcal{O}e_j.$$

On en déduit une fonction

$$\tau : \{1,\ldots,d\} \to \{1,\ldots,n\}$$

telle que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, le cardinal de $\tau^{-1}(i)$ est égal à d_i.

Notons $\tilde{S}_{\underline{d},\tau}$ le sous-schéma de $\tilde{S}_{\underline{d}}$ constitué des points qui induisent la fonction τ. Pour tout $(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{A}^d(k)$, l'ensemble des k-points de $\tilde{S}_{\underline{d},\tau}$ au-dessus de $(x_1,\ldots,x_d)$ est celui des filtrations de réseaux

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d = \mathcal{R}$$

telles que pour tout l, le quotient $\mathcal{R}_{l-1}/\mathcal{R}_l$ est supporté par x_l et que l'entier minimal i pour lequel

$$\mathcal{R}_{l-1} \cap \bigoplus_{j=1}^{i}\mathcal{O}e_j \supset \mathcal{R}_l \cap \bigoplus_{j=1}^{i}\mathcal{O}e_j$$

est égal à $\tau(l)$. La restriction du morphisme $\tilde{s}_{\underline{d}} : \tilde{S}_{\underline{d}} \to Q_{\underline{d}}$ à $\tilde{S}_{\underline{d},\tau}$ se factorise comme suit

$$\tilde{S}_{\underline{d},\tau} \xrightarrow{\tilde{s}_{\underline{d},\tau}} \mathbb{A}^d \xrightarrow{\pi_\tau} Q_{\underline{d}}$$

où

$$\pi_\tau(x_1,\ldots,x_d)=(Q_1,\ldots,Q_n)$$

avec $Q_i = \prod_{l\in\tau^{-1}(i)}(\varpi - x_l)$.

LEMME 5.2.1. – *Le morphisme* $\tilde S_{\underline{d},\tau}\xrightarrow{\tilde s_{\underline{d},\tau}}\mathbb{A}^d$ *est le composé de* d *fibrés vectoriels successivement de rang*

$$n-\tau(n), n-\tau(n-1),\ldots,n-\tau(1).$$

En particulier $\tilde s_{\underline{d},\tau}$ *est lisse et à fibres géométriques connexes et de dimension*

$$\sum_{l=1}^{d}\tau(d)=\sum_{i=1}^{n}d_i(n-i).$$

Démonstration du lemme. – Notons $\tilde S_{\underline{d},\tau,l}$ le schéma au-dessus de $\mathbb{A}^d$ dont l'ensemble des k-points au-dessus de $(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{A}^d(k)$ est celui des filtrations

$$\mathcal{O}^n=\mathcal{R}_0\supset\mathcal{R}_1\supset\cdots\supset\mathcal{R}_l$$

telles que pour tout $l'\leq l$, le sous-quotient $\mathcal{R}_{l'-1}/\mathcal{R}_{l'}$ est supporté par $x_{l'}$ et intervient dans $\bigoplus_{j=1}^{\tau(l')}\mathcal{O}e_j/\bigoplus_{j=1}^{\tau(l')-1}\mathcal{O}e_j$.

Fixons un k-point de $\tilde S_{\underline{d},\tau,l-1}$

$$(\mathcal{R}_0\supset\mathcal{R}_1\supset\cdots\supset\mathcal{R}_{l-1};x_1,\ldots,x_d)$$

Au-dessus de ce point, la donnée d'un k-point de $\tilde S_{\underline{d},\tau,l}$ est la donnée d'un réseau $\mathcal{R}_l$ tel que le quotient $\mathcal{R}_{l-1}/\mathcal{R}_l$ est supporté par x_l et que l'entier minimal i tel que

$$\mathcal{R}_{l-1}\cap\bigoplus_{j=1}^{i}\mathcal{O}e_j\supset\mathcal{R}_l\cap\bigoplus_{j=1}^{i}\mathcal{O}e_j$$

est égal à $\tau(l)$. En particulier, on a

$$R_{l-1}\supset\mathcal{R}_l\supset(\varpi-x_l)\mathcal{R}_{l-1}.$$

Notons $V=\mathcal{R}_{l-1}/(\varpi-x_l)\mathcal{R}_{l-1}$. La filtration

$$0\subset\mathcal{O}e_1\subset\mathcal{O}e_1\oplus\mathcal{O}e_2\subset\cdots\subset\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}e_i$$

induit une filtration complète $V_\bullet$

$$0\subset V_1\subset\cdots\subset V_n=V.$$

La donnée de $\mathcal{R}_l$ est équivalente à la donnée d'un sous- espace vectoriel de codimension 1 de V qui contient $V_{\tau(l)-1}$ mais ne contient pas $V_{\tau(l)}$. L'ensemble de ces donnée constitue visiblement celui des k- points d'un espace affine de rang $n-\tau(l)$.

La donnée de V munie de la filtration $V_\bullet$ définit un fibré vectoriel filtré sur $\tilde{S}_{\underline{d},\tau,l-1}$. Nous aurions terminé la démonstration de ce lemme si nous savions que ce fibré vectoriel filtré est trivial. Cette trivialité résulte du lemme suivant.

LEMME 5.2.2. – *Soit $\mathcal{R} \in S_{\underline{d}}(P_1, \ldots, P_n)(k)$. Il existe des uniques vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ qui engendrent $\mathcal{R}$ et qui ont la forme*

$$v_i = P_i e_i + \sum_{j \leq i} R_{i,j} e_j$$

où $\deg(R_{i,j}) < \deg(P_j)$.

Démonstration du lemme. – Le vecteur $v_1 = P_1 e_1$ appartient à $\mathcal{R}$ par l'hypothèse $\mathcal{R} \in S_{\underline{d}}(P_1, \ldots, P_n)(k)$. La même hypothèse implique aussi qu'il existe un vecteur de la forme $R'_{2,1} e_1 + P_2 e_2$ appartenant à $\mathcal{R}$. En utilisant la division euclidienne, on démontre qu'il existe un unique vecteur $v_2 = R_{2,1} e_1 + P_2 e_2 \in \mathcal{R}$ tel que $\deg(R_{2,1}) < \deg(P_1)$. En continuant ainsi, on montre qu'il existe pour tout entier i un unique vecteur

$$v_i = P_i e_i + \sum_{j \leq i} R_{i,j} e_j \in \mathcal{R}$$

avec $\deg(R_{i,j}) < \deg(P_j)$. Un calcul de déterminant montre que ces vecteurs engendrent $\mathcal{R}$. $\square$

Fin de la démonstration du théorème. – En combinant les lemmes précédents avec le théorème de Jouanolou sur la cohomologie à support propre des fibrés vectoriels, on déduit que le morphisme trace

$$\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},\tau,!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell[-2r](-r)$$

où $r = \sum_{i=1}^n d_i(n-i)$, est un isomorphisme. En particulier, le complexe $\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},\tau,!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ sur $\mathbb{A}^d$ est concentré en degré $2r$ et a la propriété $(*)$ renforcée. Le morphisme $\pi_\tau : \mathbb{A}^d \to Q_{\underline{d}}$ étant fini, le complexe

$$\pi_{\tau,*}\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},\tau,!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

est donc aussi concentré en degré $2r$ et conserve la propriété $(*)$.

Du fait que les complexes $\pi_{\tau,*}\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},\tau,!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ sont concentrés en degré $2r$, le complexe $\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ l'est aussi. On a donc un isomorphisme dans la catégorie dérivée

$$\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^{2r}\tilde{s}_{\underline{d},!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Or même si les adhérences des strates $\tilde{S}_{\underline{d},\tau}$ ne sont pas disjointes dans $\tilde{S}_{\underline{d}}$, on a en degré maximal un isomorphisme

$$\mathrm{R}^{2r}\tilde{s}_{\underline{d},!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\substack{\tau:\{1,\ldots,d\}\to\{1,\ldots,n\} \\ |\tau^{-1}(i)|=d_i}} \mathrm{R}^{2r}\tilde{s}_{\underline{d},\tau,!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

On déduit que $\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ a la propriété $(*)$.

Le complexe $\mathrm{R}\tilde{s}_{\underline{d},!}\bar{\mathbb{Q}}_\ell[nd](nd/2)$ est donc concentré en degré

$$2\sum_{i=1}^{n} d_i(n-i) - nd = -d + 2\langle \underline{d}, \delta\rangle$$

et a aussi la propriété $(*)$. $\square$

COROLLAIRE 5.2.3. – *Le complexe* $\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi}\otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho[-d](-d/2))$ *est concentré en degré* $2\langle \underline{d}, \delta\rangle$ *et* Fr *agit dans* $\mathrm{H}_c^{2\langle \underline{d},\delta\rangle}(S_{\underline{d},\varpi}\otimes_k\bar{k}, \mathcal{A}_\rho[-d](-d/2))$ *comme la multiplication par* $q^{\langle \underline{d},\delta\rangle}$.

COROLLAIRE 5.2.4. – *Soit* a_ρ *la fonction trace de Frobenius du faisceau pervers restriction de* $\mathcal{A}_\rho[-d](-d/2)$ *à* $X_{d,\varpi}$. *Pour tout* $\underline{d} \in \mathbb{N}^n$ *avec* $|\underline{d}| = d$, *le terme constant* $a_\rho^B(\varpi^{\underline{d}})$ *est un entier naturel égal à la dimension du groupe de cohomologie*

$$\mathrm{H}_c^{2\langle \underline{d},\delta\rangle}(S_{\underline{d},\varpi}, \mathcal{A}_\rho[-d](-d/2)).$$

Lusztig a démontré que lorsque la représentation $\rho = \rho_\lambda$ est irréductible, $a_\lambda^B(\varpi^{\underline{d}})$ est égale au coefficient de Kostka $K_{\lambda,\underline{d}}$ ([Lus]) multiplié par le signe $(-1)^{d(n-1)}$.

5.3. La cohomologie globale est la somme des cohomologie des termes constants

PROPOSITION 5.3.1. – *Pour chaque* $\underline{d} \in \mathbb{N}^n$ *avec* $|\underline{d}| = d$ *notons* $m_{\underline{d}} : Q_{\underline{d}} \to Q_d$ *le morphisme*

$$m_{\underline{d}}(P_1, \ldots, P_n) = P_1 \ldots P_n.$$

Pour toute représentation ρ *de* $\mathfrak{S}_d$, *on a alors un isomorphisme*

$$\mathrm{R}\phi_*\mathcal{A}_\rho \tilde{\to} \bigoplus_{\substack{\underline{d}\in\mathbb{N}^n \\ |\underline{d}|=d}} m_{\underline{d},*}\mathrm{R}s_{\underline{d},!}i_{\underline{d}}^*\mathcal{A}_\rho.$$

Démonstration. – Ces complexes ayant tous les deux la propriété $(*)$, il suffit de construire l'isomorphisme au-dessus de l'ouvert dense de $Q_{d,rss}$ de Q_d. Au-dessus $X_{d,rss}$, $\mathcal{A}_\rho$ est par définition à décalage et torsion près le système local $\mathcal{L}_\rho$. Puisque $\mathcal{L}_\rho$ provient de $Q_{d,rss}$, par la formule de projection, il suffit de traiter le cas où ρ est la représentation triviale et $\mathcal{L}_\rho = \bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Il est aussi loisible de passer au revêtement galoisien $\mathbb{A}^d_{rss}$ de $Q_{d,rss}$.

Au-dessus de $\mathbb{A}^d_{rss}$, on a

$$X_d \times_{Q_d} \mathbb{A}^d_{rss} = \tilde{X}_{d,rss}.$$

La donnée d'un k-point de $\tilde{X}_d$ au dessus de $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{A}^d_{rss}(k)$ est équivalente à la donnée pour tout i d'un sous-espace vectoriel de codimension 1 de $V_l = \mathcal{O}^n/(\varpi - x_l)\mathcal{O}^n$. La donnée de V_l définit un fibré vectoriel $\mathcal{V}_l$ de rang n sur $\mathbb{A}^d$. Les images de $e_1, \ldots, e_n$ dans V_l constituent une base de V_l si bien que le fibré vectoriel $\mathcal{V}_l$ est trivial. On a donc un isomorphisme

$$\tilde{X}_{d,rss} \tilde{\to} \mathbb{A}^d_{rss} \times \underbrace{\mathbb{P}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n-1}}_{d}.$$

Notons $\mathbb{P}_l^{n-1}$ le l-ème exemplaire de $\mathbb{P}^{n-1}$. Chaque $\mathbb{P}_l^{n-1}$ admet une décomposition cellulaire

$$\mathbb{P}_l^{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{A}_l^i$$

où les k-points de la cellule $\mathbb{A}_l^{n-1-i}$ correspondent aux sous-espaces vectoriels de codimension 1 de $V_l = \bigoplus_{j=1}^n ke_j$ qui contiennent $\bigoplus_{j=1}^i ke_j$ mais ne contiennent pas $\bigoplus_{j=1}^{i+1} ke_j$. On a donc

$$S_{\underline{d}} \times_{Q_d} \mathbb{A}^d_{rss} = \coprod_{\substack{\tau:\{1,\ldots,d\}\to\{1,\ldots,n\} \\ |\tau^{-1}(i)|=d_i}} \prod_{l=1}^n \mathbb{A}_l^{n-1-\tau(l)}.$$

La proposition se déduit donc de l'isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P}^{n-1}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \tilde{\to} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbb{A}^i, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

bien connu. □

COROLLAIRE 5.3.2. – *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma(X_{d,\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho) \tilde{\to} \bigoplus_{\substack{\underline{d}\in\mathbb{N}^n \\ |\underline{d}|=d}} \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\rho).$$

Sur $\mathbb{C}$, ce corollaire est dû à Mirkovic et Vilonen ([M-V]).

5.4. Termes constants du produit de convolution

PROPOSITION 5.4.1. – *Soient d', d'' deux entiers naturels, ρ' et ρ'' respectivement des représentations de $\mathfrak{S}_{d'}$ et $\mathfrak{S}_{d''}$. Soient $d = d' + d''$ et $\underline{d} \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\underline{d}| = d$. Pour chaque couple $\underline{d}', \underline{d}'' \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\underline{d}'| = d'$, $|\underline{d}''| = d''$ et $\underline{d}' + \underline{d}'' = \underline{d}$ on a un morphisme*

$$m_{\underline{d}',\underline{d}''} : Q_{\underline{d}'} \times Q_{\underline{d}''} \to Q_{\underline{d}}$$

défini par

$$m_{\underline{d}',\underline{d}''}(P'_1, \ldots, P'_n; P''_1, \ldots, P''_n) = (P'_1P''_1, \ldots, P'_nP''_n).$$

Avec les notations de 5.2, on a un isomorphisme

$$\mathrm{R}s_{\underline{d},!}i^*_{\underline{d}}(\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \bigoplus_{\substack{|\underline{d}'|=d', |\underline{d}''|=d'' \\ \underline{d}'+\underline{d}''=\underline{d}}} m_{\underline{d}',\underline{d}'',*}(\mathrm{R}s_{\underline{d}',!}i^*_{\underline{d}'}\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}s_{\underline{d}'',!}i^*_{\underline{d}''}\mathcal{A}_{\rho''}).$$

Démonstration. – Les morphisme $m_{\underline{d}',\underline{d}''}$ étant finis, les deux complexes ont la propriété $(*)$ grâce au théorème précédent. Il suffit donc de construire l'isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense.

Soit $Q_{\underline{d},rss}$ l'ouvert dense de $Q_{\underline{d}}$ constitué des points $(P_1,\ldots,P_n)$ tels que le polynôme $P_1\ldots P_n$ n'a pas de racines doubles. On démontre facilement que l'image inverse de

$$S_{\underline{d}} \times_{Q_{\underline{d}}} Q_{\underline{d},rss}$$

dans

$$(X_{d'}\tilde{\times}X_{d''}) \times_{Q_d} Q_{\underline{d},rss} = (X_{d'} \times X_{d''}) \times_{Q_d} Q_{\underline{d},rss}$$

est une réunion de composantes connexes dont chacune est isomorphe à

$$(S_{\underline{d}'} \times S_{\underline{d}''}) \times_{Q_{\underline{d}}} Q_{\underline{d},rss}$$

avec $|\underline{d}'| = d', |\underline{d}''| = d''$ et $\underline{d}' + \underline{d}'' = \underline{d}$, d'où résulte la proposition.

Notons toutefois que les adhérences de ces composantes dans

$$(X_{d'}\tilde{\times}X_{d''}) \times_{Q_d} Q_{\underline{d}}$$

ne sont plus disjointes. □

COROLLAIRE 5.4.2. – *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \bigoplus_{\substack{|\underline{d}'|=d',|\underline{d}''|=d''\\ \underline{d}'+\underline{d}''=\underline{d}}} \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d}',\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho'}) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d}'',\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\rho''}).$$

Cet isomorphisme est compatible avec l'isomorphisme de commutativité.

PROPOSITION 5.4.3. – *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{R}s_{\underline{d},!}i_{\underline{d}}^*(\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}) & \to & \displaystyle\bigoplus_{\substack{|\underline{d}'|=d',|\underline{d}''|=d''\\ \underline{d}'+\underline{d}''=\underline{d}}} m_{\underline{d}',\underline{d}'',*}(\mathrm{R}s_{\underline{d}',!}i_{\underline{d}'}^*\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}s_{\underline{d}'',!}i_{\underline{d}''}^*\mathcal{A}_{\rho''}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{R}s_{\underline{d},!}i_{\underline{d}}^*(\mathcal{A}_{\rho''} * \mathcal{A}_{\rho'}) & \to & \displaystyle\bigoplus_{\substack{|\underline{d}'|=d',|\underline{d}''|=d''\\ \underline{d}'+\underline{d}''=\underline{d}}} m_{\underline{d}'',\underline{d}',*}(\mathrm{R}s_{\underline{d}'',!}i_{\underline{d}''}^*\mathcal{A}_{\rho''} \boxtimes \mathrm{R}s_{\underline{d}',!}i_{\underline{d}'}^*\mathcal{A}_{\rho'})
\end{array}$$

où la flèche verticale à gauche est induite par l'isomorphisme de commutativité

$$\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''} \tilde{\to} \mathcal{A}_{\rho''} * \mathcal{A}_{\rho'}$$

et où la flèche verticale à droite est la somme des isomorphismes évidents

$$m_{\underline{d}',\underline{d}'',*}(\mathrm{R}s_{\underline{d}',!}i_{\underline{d}'}^*\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}s_{\underline{d}'',!}i_{\underline{d}''}^*\mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} m_{\underline{d}'',\underline{d}',*}(\mathrm{R}s_{\underline{d}'',!}i_{\underline{d}''}^*\mathcal{A}_{\rho''} \boxtimes \mathrm{R}s_{\underline{d}',!}i_{\underline{d}'}^*\mathcal{A}_{\rho'}),$$

est commutatif.

Démonstration. – Il suffit vérifier la commutativité du diagramme au-dessus d'un ouvert dense. Mais au-dessus de $Q_{d,rss}$, l'isomorphisme de commutativité

$$\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''} \tilde{\to} \mathcal{A}_{\rho''} * \mathcal{A}_{\rho'}$$

a été défini via les isomorphismes

$$\begin{aligned}(X_{d'} \tilde{\times} X_{d''})_{rss} &\tilde{\to} (X_{d'} \times X_{d''})_{rss} \\ &\tilde{\to} (X_{d''} \times X_{d'})_{rss} \\ &\tilde{\to} (X_{d''} \tilde{\times} X_{d'})_{rss}\end{aligned}$$

Il est clair que l'isomorphisme

$$(X_{d'} \times X_{d''}) \tilde{\to} (X_{d'} \times X_{d''})$$

est compatible à l'isomorphisme

$$S_{\underline{d'}} \times S_{\underline{d''}} \tilde{\to} S_{\underline{d''}} \times S_{\underline{d'}}$$

via lequel est défini l'isomorphisme

$$m_{\underline{d}',\underline{d}'',*}(\mathrm{R}s_{\underline{d}',!} i_{\underline{d}'}^* \mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathrm{R}s_{\underline{d}'',!} i_{\underline{d}''}^* \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} m_{\underline{d}'',\underline{d}',*}(\mathrm{R}s_{\underline{d}'',!} i_{\underline{d}''}^* \mathcal{A}_{\rho''} \boxtimes \mathrm{R}s_{\underline{d}',!} i_{\underline{d}'}^* \mathcal{A}_{\rho'}),$$

d'où résulte la proposition.

Partie II
Applications

6. L'homomorphisme $b : \mathcal{H}_r^+ \to \mathcal{H}^+$

6.1. Rappel

Soient r un entier naturel, k_r l'extension de degré r de k, $F_{r,\varpi} = k_r((\varpi))$ et $\mathcal{O}_{r,\varpi} = k_r[[\varpi]]$. Soit $\mathcal{H}_r^+$ l'algèbre des fonctions à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et à support compact dans $\mathrm{GL}(n, F_{r,\varpi}) \cap \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_{r,\varpi})$ qui sont bi-$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{r,\varpi})$-invariantes. Rappelons que l'isomorphisme de Satake correspondant

$$\Phi_r : \mathcal{H}_r^+ \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell[t_1, \ldots, t_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

est défini par

$$\Phi_r(f) = \sum_{\underline{d} \in \mathbb{N}^n} f^B(\varpi^{\underline{d}}) t^{\underline{d}},$$

où

$$f^B(\varpi^{\underline{d}}) = q^{-r\langle \underline{d}, \delta \rangle} \int_{N(F_{r,\varpi})} f(\varpi^{\underline{d}} x) \mathrm{d}x,$$

la mesure normalisée $\mathrm{d}x$ attribuant à $N(\mathcal{O}_{r,\varpi})$ le volume 1.

On définit l'homomorphisme de changement de base $b : \mathcal{H}_r^+ \to \mathcal{H}^+$ de telle manière que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_r^+ \arrow[r, "\Phi_r"] \arrow[d, "b"'] & \bar{\mathbb{Q}}_\ell[t_1, \dots, t_n]^{\mathfrak{S}_n} \arrow[d] \\ \mathcal{H}^+ \arrow[r, "\Phi"'] & \bar{\mathbb{Q}}_\ell[z_1, \dots, z_n]^{\mathfrak{S}_n} \end{tikzcd}$$

dont la flèche verticale à droite envoie t_i en z_i^r, est commutatif.

Pour chaque n-partition λ de d, on définit la fonction

$$a_{r,\lambda} : X_{d,\varpi}(k_r) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

par

$$a_{r,\lambda}(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_{q^r}, (\mathcal{A}_{\lambda,\varpi})_x).$$

Puisque les faisceaux pervers $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$ sont G-équivariants, les fonctions $a_{r,\lambda}$ s'identifient naturellement à des éléments de $\mathcal{H}_r^+$. Le but de cette section est de donner une interprétation géométrique pour les images $b(a_{r,\lambda})$ des fonctions $a_{r,\lambda}$ par l'homomorphisme de changement de base $b : \mathcal{H}_r^+ \to \mathcal{H}^+$.

6.2. Les fonctions $f_{r,\lambda}$ et $\phi_{r,\lambda}$

Chaque fonction $X_{d,\varpi}(k_r) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ invariante relativement à l'action à gauche de $G_{d,\varpi}(k_r)$ s'identifie naturellement à un élément de $\mathcal{H}_r^+$. Toutefois, il vaut mieux considérer les fonctions sur $\mathrm{Res}_{k_r/k} X_{d,\varpi}(k)$.

Soit σ l'endomorphisme de $X_{d,\varpi}^r$ défini par

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_r) = (x_r, x_1, \dots, x_{r-1}).$$

On peut identifier $X_{d,\varpi}(k_r)$ à $\mathrm{Fix}\,(\mathrm{Fr} \circ \sigma, X_d(\varpi^d)^r)$ en envoyant

$$x \mapsto (x, \mathrm{Fr}(x), \dots, \mathrm{Fr}^{r-1}(x)).$$

Pour chaque n-partition λ de d, notons $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$ le faisceau pervers qui est restriction de $\mathcal{A}_\lambda[-d](-d/2)$ à $X_{d,\varpi}$. D'après 2.3, $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$ est le complexe d'intersection de l'adhérence de l'orbite $G_{d,\varpi}\varpi^\lambda$ dans $X_{d,\varpi}$.

Prenons r copies $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1}, \dots, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}$ de $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$. L'endomorphisme σ se relève naturellement sur l'isomorphisme

$$\tilde{\sigma} : \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r} \boxtimes \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r-1} \to \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} \boxtimes \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,2} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}.$$

qui est le produit tensoriel externe des isomorphismes identiques $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,i} \to \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,i+1}$, l'indice i étant pris dans les classes modulo r. On définit la fonction $f_{r,\lambda} : \mathrm{Fix}\,(\mathrm{Fr} \circ \sigma, X_{d,\varpi}^r) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ par

$$f_{r,\lambda}(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \tilde{\sigma}, (\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r})_x).$$

Pour tout λ, $f_{r,\lambda}$ s'identifie naturellement à un élément de $\mathcal{H}_r^+$.

On définit pour chaque n-partition λ de d une fonction $\phi_{r,\lambda} \in \mathcal{H}^+$ comme suit. La r-ème puissance convolée

$$\mathcal{A}^r_{\lambda,\varpi} = \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}$$

admet un automorphisme d'ordre r

$$\kappa' : \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r} * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r-1} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}$$

où $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1}, \ldots, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}$ sont r copies de $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$, où κ est l'isomorphisme de commutativité et où ι se déduit des isomorphismes évidents $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,i} \to \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,i+1}$ l'indice i étant prise dans les classes modulo r. Pour tout $x \in X_{rd,\varpi}(k)$, on pose

$$\phi_{r,\lambda}(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \kappa', (\mathcal{A}_{\lambda,\varpi} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi})_x).$$

PROPOSITION 6.2.1. – *Quand λ parcourt l'ensemble des n-partitions, les $f_{r,\lambda}$ forment une base de $\mathcal{H}^+_r$.*

Démonstration. – Soit $c_\lambda \in \mathcal{H}^+_r$ la fonction caractéristique de la double classe

$$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{r,\varpi})\varpi^\lambda \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{r,\varpi}).$$

Les c_λ forment clairement une base de $\mathcal{H}^+_r$.

Du fait que $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$ est le complexe d'intersection de l'adhérence de l'orbite $G_{d,\varpi}\varpi^\lambda$ dans $X_{d,\varpi}$, on a

$$f_{r,\lambda} = q^{-r\langle\lambda,\delta\rangle}(c_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} z_{\lambda,\mu}c_\mu),$$

avec $z_{\lambda,\mu} \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell$. On en déduit que les $f_{r,\lambda}$ forment aussi une base de $\mathcal{H}^+_r$. $\square$

PROPOSITION 6.2.2. – *Pour toute n-partition λ, on a $b(f_{r,\lambda}) = \phi_{r,\lambda}$.*

Notons que si F_r est le produit de r copies de F, l'isomorphisme de changement de base est défini par

$$f_1 \boxtimes \cdots \boxtimes f_r \mapsto f_1 * \cdots * f_r.$$

6.3. L'identité $b(f_{r,\lambda}) = \phi_{r,\lambda}$

Il revient au même de démontrer que pour tout $\underline{d} \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\int_{N(F_{r,\varpi})} f_{r,\lambda}(\varpi^{\underline{d}} x_r)\mathrm{d}x_r = \int_{N(F_\varpi)} \phi_{r,\lambda}(\varpi^{r\underline{d}} x)\mathrm{d}x$$

et que pour tout $\underline{d} \notin r\mathbb{N}^n$ on a

$$\int_{N(F_\varpi)} \phi_{r,\lambda}(\varpi^{\underline{d}} x)\mathrm{d}x = 0.$$

Suivant une idée de Serre, on peut appliquer la formule des traces de Grothendieck au composé de l'endomorphisme de Frobenius avec un endomorphisme d'ordre fini.

Plus précisément, soit σ un endomorphisme d'ordre fini d'un schéma X de type fini sur $k = \mathbb{F}_q$. Il existe alors un schéma X_σ de type fini sur k muni d'un isomorphisme $X \otimes_k \bar{k} = X_\sigma \otimes_k \bar{k}$ tel que l'endomorphisme de Frobenius géométrique Fr' sur $X \otimes_k \bar{k}$, induit par la k-structure X_σ, est égal à $\mathrm{Fr} \circ \sigma$, où Fr est l'endomorphisme de Frobenius géométrique induit par la k-structure X. Si de plus, σ se relève sur un complexe de faisceaux ℓ-adique $\mathcal{C}$, c'est-à-dire étant donné $\tilde{\sigma} : \sigma^*\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, alors il existe aussi $\mathcal{C}_\sigma$ sur X_σ muni d'un isomorphisme $\mathcal{C} \otimes_k \bar{k} = \mathcal{C}_\sigma \otimes_k \bar{k}$ tel que l'action Fr' sur $\mathcal{C} \otimes_k \bar{k}$ induit par $\mathcal{C}_\sigma$ est égale $\mathrm{Fr} \circ \tilde{\sigma}$.

En appliquant la formule des traces de Grothendieck ([Gro]) à la paire $(X_\sigma, \mathcal{C}_\sigma)$, on a

$$\sum_{x \in \mathrm{Fix}\,(\mathrm{Fr}\circ\sigma, X(\bar{k})))} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \tilde{\sigma}, \mathcal{C}_x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \tilde{\sigma}, \mathrm{R}\Gamma_c(X \otimes_k \bar{k}, \mathcal{C})).$$

En appliquant la formule précédente à $(\sigma, \tilde{\sigma})$ agissant sur

$$(\underbrace{S_{\underline{d},\varpi} \times \cdots \times S_{\underline{d},\varpi}}_{r \text{ fois}}, \underbrace{\mathcal{A}_{\lambda,\varpi} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_{\lambda,\varpi}}_{r \text{ fois}})$$

où par abus de notation $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$ désigne son image réciproque par l'inclusion naturelle $i_{\underline{d}} : S_{\underline{d},\varpi} \to X_{d,\varpi}$, on obtient l'égalité

$$\int_{N(F_{r,\varpi})} f_{r,\lambda}(\varpi^{\underline{d}} x_r)\mathrm{d}x_r = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \tilde{\sigma}, \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi})^{\otimes r}).$$

L'endomorphisme de Frobenius Fr agit dans $\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi})^{\otimes r}$ comme le produit tensoriel de son action dans chacun des facteurs. L'endomorphisme $\tilde{\sigma}$ agit en permutant circulairement ces facteurs

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} : \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1}) \otimes \cdots \\ \to \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1}) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,2}) \otimes \cdots\end{aligned}$$

Appliquons maintenant la même formule à la paire (Id, κ') agissant sur

$$(S_{\underline{d},\varpi}, \underbrace{\mathcal{A}_{\lambda,\varpi} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi}}_{r \text{ fois}}).$$

On obtient l'égalité

$$\int_{N(F_\varpi)} \phi_{r,\lambda}(\varpi^{\underline{d}} x)\mathrm{d}x = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \kappa', \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \underbrace{\mathcal{A}_{\lambda,\varpi} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi}}_{r \text{ fois}})).$$

Or, d'après 5.4.2, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \underbrace{\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}}_{r \text{ fois}}) \\ &= \bigoplus_{\substack{\underline{d_1},\ldots,\underline{d_r} \\ \underline{d_1}+\cdots+\underline{d_r}=\underline{d}}} \bigotimes_{i=1}^{r} \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_i},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,i}).\end{aligned}$$

Examinons l'action de Fr et de κ' dans l'expression de droite. L'action de Fr laisse stable chacun des termes de la somme directe. En revanche, d'après 5.4.3, on a $\kappa' = \iota \circ \kappa$, où κ envoie le terme

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_1},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_r},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r})$$

sur le terme

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_r},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_1},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1}) \\ \otimes \cdots \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_{r-1}},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r-1}),$$

lequel s'envoie lui-même par ι sur le terme

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_r},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1}) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_1},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,2}) \\ \otimes \cdots \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_{r-1}},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,r}).$$

Si $\underline{d_1}, \ldots, \underline{d_r}$ ne sont pas tous égaux, la somme des r termes

$$\bigoplus_{j=0}^{r-1} \bigotimes_{i=1}^{r} \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d_{i+j}} \otimes_k \bar{k},\varpi}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,i})$$

$i+j$ étant pris modulo r, est stable par κ'. Puisque l'automorphisme κ' y agit par une permutation circulaire et que l'endomorphisme de Frobenius laisse stable chacun de ses termes, le composé $\mathrm{Fr} \circ \kappa'$ est de trace nulle sur cette somme directe.

On en déduit que si $\underline{d} \notin r\mathbb{N}^n$, on a

$$\int_{N(F_\varpi)} \phi_{r,\lambda}(\varpi^{\underline{d}} x)\mathrm{d}x = 0$$

Si maintenant $\underline{d} = r\underline{d}'$, on a

$$\int_{N(F_{r,\varpi})} f_{r,\lambda}(\varpi^{\underline{d}'} x_r)\mathrm{d}x_r = \int_{N(F_\varpi)} \phi_{r,\lambda}(\varpi^{\underline{d}} x)\mathrm{d}x$$

du fait que les actions de $\tilde{\sigma}$ et κ' dans le terme

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d}',\varpi}, \mathcal{A}_{\varpi,\lambda})^{\otimes r}$$

sont égales. $\square$

6.4. L'identité $a_{r,\lambda} = f_{r,\lambda}$

PROPOSITION 6.4.1. – *Pour toute n-partition λ, on a $a_{r,\lambda} = f_{r,\lambda}$.*

En combinant avec l'identité $b(f_{r,\lambda}) = \phi_{r,\lambda}$, on obtient le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 3. – *Pour toute n-partition λ on a $b(a_{r,\lambda}) = \phi_{r,\lambda}$.*

Démonstration de la proposition. – La transformation de Satake

$$\Phi_r : \mathcal{H}_r^+ \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell[t_1, \ldots, t_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

étant un isomorphisme, il suffit de démontrer que

$$\Phi_r(a_{r,\lambda}) = \Phi_r(f_{r,\lambda}).$$

On va donc comparer les termes constants de $a_{r,\lambda}$ et de $f_{r,\lambda}$. Il suffit donc de démontrer que pour tout $\underline{d} \in \mathbb{N}^n$ avec $|\underline{d}| = d$, on a

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}^r, \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi})) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \tilde{\sigma}, \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi})^{\otimes r}).$$

D'après le corollaire 5.2.3, on sait que le complexe $\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi})$ est concentré en degré $2\langle \underline{d}, \delta \rangle$ et que Fr agit dans le groupe de cohomogie

$$V = \mathrm{H}_c^{2\langle \underline{d},\delta \rangle}(S_{\underline{d},\varpi} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_{\lambda,\varpi})$$

comme la multiplication par $q^{\langle \underline{d},\delta \rangle}$. On est amené à démontrer que $\dim(V) = \mathrm{Tr}(\tilde{\sigma}, V^{\otimes^r})$.

Choisissons une base de V et écrivons la matrice de $\tilde{\sigma}$ dans la base induite de $V^{\otimes r}$. L'assertion en résulte immédiatement. $\square$

7. La transposition

7.1. Les schémas $\mathfrak{g}_{d,r}$

Désormais, on ne considère que les extensions de degré $r = 2$. On peut ainsi libérer la lettre r pour d'autres utilisations.

Pour chaque couple d'entiers naturels $(d, r) \in \mathbb{N}^2$ avec $d < r$, notons $Q_{d,r}$ l'espace affine dont l'ensemble des k-points est celui des couples de polynômes unitaires (P, R) de degré respectivement d et r tels que P divise R. En fait, $Q_{d,r}$ est isomorphe à $Q_d \times Q_{r-d}$.

Soit $\mathfrak{g}_{d,r}$ le $Q_{d,r}$-schéma dont l'ensemble des k-points au-dessus de $(P, R) \in Q_{d,r}(k)$ est l'ensemble

$$\{g \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}/(R)) \mid \det(g) \in P(\mathcal{O}/(R))^\times\}.$$

Pour chaque $g \in \mathfrak{g}_{d,r}(P, R)(k)$, si on note $\mathcal{R}$ le réseau image inverse de $g(\mathcal{O}/(R))^n$ par l'application $\mathcal{O}^n \to (\mathcal{O}/(R))^n$, on a $\mathcal{R} \in X_d(P)(k)$. Cela définit un morphisme $p : \mathfrak{g}_{d,r} \to X_d$.

Notons $G_{d,r} = G_r \times_{Q_r} Q_{d,r}$. Le $Q_{d,r}$-schéma en groupes $G_{d,r}$ agit de deux côtés sur $\mathfrak{g}_{d,r}$ par $(h_1, h_2).g = h_1 g h_2^{-1}$.

LEMME 7.1.1. – *Le morphisme p est lisse et à fibres géométriquement connexes. Il est invariant relativement à l'action à droite de $G_{d,r}$. Cette action est transitive sur ses fibres géométriques. Enfin, le morphisme p est équivariant relativement à l'action à gauche de $G_{d,r}$ sur $\mathfrak{g}_{d,r}$ et à l'action de G_d sur X_d.*

Démonstration. – Montrons d'abord que pour tout $(P,R) \in Q_{d,r}(k)$, pour tout $\mathcal{R} \in \phi^{-1}(P)$ où $\phi : X_d \to Q_d$ est le morphisme déterminant, le groupe $G_r(R)(k)$ agit transitivement sur $p^{-1}(\mathcal{R})(k)$. Soient g et g' dans $\mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}/(R))$ tels que

$$g(\mathcal{O}^n/(R)^n) = g'(\mathcal{O}^n/(R)^n) = \mathcal{R}/(R)^n$$

En utilisant le lemme de Nakayama, on peut relever g et g' en $\tilde{g}$ et $\tilde{g}'$ dans $\mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_{(R)})$, où $\mathcal{O}_{(R)}$ est le localisé de $\mathcal{O}$ en (R), avec

$$g\mathcal{O}^n_{(R)} = g'\mathcal{O}^n_{(R)} = \mathcal{R}\mathcal{O}_{(R)}.$$

Alors on a

$$\tilde{h} = \tilde{g}^{-1}\tilde{g}' \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{(R)}).$$

Il est alors clair que $gh = g'$ où $h \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}/(R))$ est la réduction de h modulo (R).

L'action de G_d étant transitive sur les fibres de p, ces fibres sont automatiquement lisses. Calculons leur dimension. Un réseau $\mathcal{R} \in \phi^{-1}(P)(\bar{k})$ étant fixé, la donnée de $g \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}/(R))$ telle que $g(\mathcal{O}^n/(R)^n) = \mathcal{R}/(R)^n$ est équivalente à celle de n vecteurs dans $\mathcal{R}/(P)^n$ qui engendrent ce module. La dernière condition étant ouverte, la fibre $p^{-1}(\mathcal{R})$ est de dimension $n(nr - d)$.

Pour démontrer que p est lisse, il suffit maintenant de démontrer que la source $\mathfrak{g}_{d,r}$ est lisse. Dans la démonstration du lemme 2.2.2, on a construit un recouvrement d'ouverts lisses U de X_d munis des sections $U \to \mathfrak{g}_{d,r}$. En utilisant l'action transitive de $G_{d,r}$, on a un morphisme surjectif $U \times_{Q_{d,r}} G_{d,r} \to \mathfrak{g}_{d,r}$. On vérifie facilement que ses fibres géométriques sont lisses et ont la même dimension. Du fait que sa source est lisse, ce morphisme est lisse. Il en est de même de son but. □

Pour toute représentation ℓ-adique ρ de $\mathfrak{S}_d$, on notera $\tilde{\mathcal{A}}_\rho = p^*\mathcal{A}_\rho$. On déduit du lemme précédent que le complexe $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ est bi-$G_{d,r}$-équivariant et est un faisceau pervers décalé.

7.2. Les relèvements $\tilde{\tau}_\rho$ de τ

Notons $\tau : \mathfrak{g}_{d,r} \to \mathfrak{g}_{d,r}$ l'involution définie par

$$(g, P, R) \mapsto ({}^{\mathrm{t}}g, P, R).$$

Pour chaque représentation ρ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$, on va relever τ sur $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ comme suit.

Soit $Q_{d,r,rss}$ l'ouvert de $Q_{d,r}$ dont l'ensemble des k-points est celui des couples de polynômes (P,R) avec P séparable divisant R. Au-dessus de $\mathfrak{g}_{d,r,rss} = \mathfrak{g}_{d,r} \times_{Q_{d,r}} Q_{d,r,rss}$, le complexe $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ provient d'un système local $\mathcal{L}_\rho$ sur $Q_{d,r,rss}$ par l'image réciproque de la projection évidente

$$\mathrm{pr}_{rss} : \mathfrak{g}_{d,rss} \to Q_{d,rss}.$$

où $\mathrm{pr}(g, P, R) = (P, R)$. Or puisque $\mathrm{pr} \circ \tau = \mathrm{pr}$, on a isomorphisme

$$\tau^*\mathrm{pr}^*_{rss}\mathcal{L}_\rho \to \mathrm{pr}^*_{rss}\mathcal{L}_\rho$$

qu'on étend par le prolongement intermédiaire pour obtenir

$$\tilde{\tau}_\rho : \tau^*\tilde{\mathcal{A}}_\rho \to \tilde{\mathcal{A}}_\rho.$$

Leur définition apparemment simple cache certains aspects assez mystérieux de ces $\tilde{\tau}_\rho$. On reporte cette discussion à la dernière section de l'article.

7.3. Convolution

Soient d', d'', r des entiers naturels tels que $d' + d'' = d < r$. Soit $Q_{d',d'',r}$ l'espace affine dont l'ensemble des k-points est celui des triplets de polynômes unitaires (P', P'', R) de degré respectivement d', d'' et r tels que le produit $P'P'' = P$ divise R. En fait $Q_{d',d'',r}$ est isomorphe à $Q_{d'} \times Q_{d''} \times Q_{r-d'-d''}$. Notons $m_Q : Q_{d',d'',r} \to Q_{d,r}$ le morphisme défini par

$$(P', P'', R) \mapsto (P, R)$$

où $P = P'P''$.

Soit $\mathfrak{g}_{d',d'',r}$ le $Q_{d',d'',r}$-schéma dont l'ensemble des k-points au-dessus de $(P', P'', R) \in Q_{d',d'',r}(k)$ est l'ensemble

$$\{g', g'' \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}/(R)) \mid \det(g') \in P'(\mathcal{O}/(R))^{\times}, \det(g'') \in P''(\mathcal{O}/(R))^{\times}\}.$$

On a aussi un morphisme $m : \mathfrak{g}_{d',d'',r} \to \mathfrak{g}_{d,r}$ au-dessus de m_Q défini par

$$(g', g''; P', P'', R) \to (g; P, R)$$

où $g = g'g''$ et $P = P'P''$.

Notons $G_{d',d'',r} = G_r \times_{Q_r} Q_{d',d'',r}$. Le morphisme m est invariant relativement à l'action α de $G_{d',d'',r}$ sur $\mathfrak{g}_{d',d'',r}$ défini par

$$\alpha(h, (g', g'')) = (g'h^{-1}, hg'').$$

Le quotient de $\mathfrak{g}_{d',d'',r}$ par cette action peut être définie par

$$\mathfrak{g}^{\alpha}_{d',d'',r}(k) = \{(\mathcal{R}', g) \in X_{d'} \times \mathfrak{g}_{d,r}(k) \mid \mathcal{R}' \supset g\mathcal{O}^n\}$$

où $g\mathcal{O}^n$ désigne le réseau image inverse de $g(\mathcal{O}/(R))^n$ par l'application $\mathcal{O}^n \to (\mathcal{O}/(R))^n$.

LEMME 7.3.1. – *Le morphisme* $\pi_\alpha : \mathfrak{g}_{d',d'',r} \to \mathfrak{g}^{\alpha}_{d',d'',r}$ *défini par*

$$(g', g'', P', P'', R) \mapsto ((g'\mathcal{O}^n, P'), (g'g'', P'P'', R))$$

est lisse et invariant relativement à l'action $\alpha(G_{d',d'',r})$. *De plus, cette action est transitive sur ses fibres géométriques.*

Notons $q : \mathfrak{g}_{d',d'',r} \to \mathfrak{g}_{d',r} \times \mathfrak{g}_{d'',r}$ le morphisme défini par

$$(g', g'', P', P'', R) \mapsto ((g', P', R), (g'', P'', R)).$$

Notons p' et p'' les morphismes $\mathfrak{g}_{d',r} \to X_{d'}$ et $\mathfrak{g}_{d'',r} \to X_{d''}$.

LEMME 7.3.2. – *Le morphisme composé* $(p' \times p'') \circ q$ *est lisse à fibres géométriquement connexes.*

Ces deux derniers lemmes se démontrent de manière très analogue au lemme 7.1.1. On omet leurs démonstrations.

Pour toutes représentations ℓ-adiques ρ' et ρ'' respectivement de $\mathfrak{S}_{d'}$ et de $\mathfrak{S}_{d''}$, le complexe image inverse $q^*(p' \times p'')^*(\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathcal{A}_{\rho''})$ est donc, à décalage près, un faisceau pervers. Ce complexe est clairement $\alpha(G_{d',d'',r})$-équivariant si bien qu'il existe un faisceau pervers décalé $\tilde{A}_{\rho'} \boxtimes^{\alpha} \tilde{A}_{\rho''}$ sur $\mathfrak{g}^{\alpha}_{d',d'',r}$ défini à un unique isomorphisme près tel que

$$q^*(p' \times p'')^*(\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \pi^*_{\alpha}(\tilde{A}_{\rho'} \boxtimes^{\alpha} \tilde{A}_{\rho''}).$$

PROPOSITION 7.3.3. – *1. Soit* $p^{\alpha} : \mathfrak{g}^{\alpha}_{d',d'',r} \to X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}$ *le morphisme défini par*

$$(\mathcal{R}', g, P, R) \mapsto (\mathcal{R}', \mathcal{R}),$$

avec $\mathcal{R} = g\mathcal{O}^n$. *On a un isomorphisme*

$$p^{\alpha,*}(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \tilde{A}_{\rho'} \boxtimes^{\alpha} \tilde{A}_{\rho''}.$$

2. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}^{\alpha}_{d',d'',r} \arrow[r, "m^{\alpha}"] \arrow[d, "p^{\alpha}"'] & \mathfrak{g}_{d,r} \arrow[d, "p"] \\ X_{d'} \tilde{\times} X_{d''} \arrow[r, "\mu"'] & X_d \end{tikzcd}$$

où m^{α} *est le morphisme induit par le morphisme* α*-invariant*

$$m : \mathfrak{g}_{d',d'',r} \to \mathfrak{g}_{d,r},$$

est cartésien.

3. On a un isomorphisme $\mathrm{R}m^{\alpha}_*(\tilde{A}_{\rho'} \boxtimes^{\alpha} \tilde{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \tilde{A}_{\rho}$ *où* ρ *est la représentation induite* $\rho = \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_d}_{\mathfrak{S}_{d'} \times \mathfrak{S}_{d''}}(\rho' \otimes \rho'')$.

Démonstration.

1. Le faisceau pervers décalé $p^{\alpha,*}(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''})$ vérifie la propriété suivante : au-dessus de $\mathfrak{g}_{d',d'',r}$ on a un isomorphisme entre les faisceaux pervers décalés

$$q^*(p' \times p'')^*(\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \pi^{\alpha,*} p^{\alpha,*}(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''}).$$

En effet, au-dessus de l'ouvert dense où le polynôme $P'P''$ est séparable, on a un isomorphisme entre $X_{d'} \times X_{d''}$ et $X_{d'} \tilde{\times} X_{d''}$, d'où on déduit l'isomorphisme

$$q^*(p' \times p'')^*(\mathcal{A}_{\rho'} \boxtimes \mathcal{A}_{\rho''}) \tilde{\to} \pi^{\alpha,*} p^{\alpha,*}(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''})$$

au-dessus de cet ouvert. Puis on l'étend à $\mathfrak{g}_{d',d'',r}$ par le prolongement intermédiaire. Or, $\tilde{A}_{\rho'} \boxtimes^{\alpha} \tilde{A}_{\rho''}$ est défini, par cette propriété, à un unique isomorphisme près, d'où l'assertion.

2. C'est trivial sur la définition des flèches du diagramme.

3. Rappelons qu'on a

$$\tilde{A}_{\rho} = p^*(\mathcal{A}_{\rho'} * \mathcal{A}_{\rho''}) = p^* \mathrm{R}\mu_*(\mathcal{A}_{\rho'} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\rho''})$$

d'après la proposition 3.2.1. Il suffit d'appliquer le théorème de changement de base pour un morphisme propre au diagramme cartésien précédent. □

Grâce à cette nouvelle description du produit de convolution, on voit facilement que cette notion correspond bien au produit de convolution habituel entre fonctions de Hecke, via le dictionnaire faisceaux-fonctions de Grothendieck.

7.4. Commutativité revue

A l'aide des $\tilde{\tau}_\rho$, on peut traduire géométriquement le calcul habituel suivant

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{G(F_\varpi)} f(xy^{-1})g(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{G(F_\varpi)} f({}^{\mathrm{t}}y^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}x)g({}^{\mathrm{t}}y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{G(F_\varpi)} g({}^{\mathrm{t}}y)f({}^{\mathrm{t}}y^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}x)\mathrm{d}y\\ &= (g*f)({}^{\mathrm{t}}x)\\ &= (g*f)(x)\end{aligned}$$

qui démontre la commutativité du produit de convolution entre les fonctions de Hecke.

Considérons le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{g}_{d',r}\times\mathfrak{g}_{d'',r} & \xleftarrow{q} & \mathfrak{g}_{d',d'',r} & \xrightarrow{\pi^\alpha} & \mathfrak{g}^\alpha_{d',d'',r} & \xrightarrow{m^\alpha} & \mathfrak{g}_{d,r}\\
{\scriptstyle \sigma\circ(\tau'\times\tau'')}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\sigma\tau)^\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\tau}\\
\mathfrak{g}_{d'',r}\times\mathfrak{g}_{d',r} & \xleftarrow[q_1]{} & \mathfrak{g}_{d'',d',r} & \xrightarrow[\pi_1^\alpha]{} & \mathfrak{g}^\alpha_{d'',d',r} & \xrightarrow[m_1^\alpha]{} & \mathfrak{g}_{d,r}
\end{array}$$

où σ est défini par $(g',g'')\mapsto(g'',g')$, où τ' (resp. τ'') est défini par $g'\mapsto {}^{\mathrm{t}}g'$ (resp. $g''\mapsto {}^{\mathrm{t}}g''$), où $\sigma\tau(g',g'')=({}^{\mathrm{t}}g'',{}^{\mathrm{t}}g')$, où $(\sigma\tau)^\alpha$ est le morphisme induit par le morphisme α-invariant $\sigma\tau$ et où les indices 1 accolées aux morphismes de ligne inférieure sont destinées à distinguer ces morphismes de ceux de la ligne supérieure.

Soient maintenant ρ' et ρ'' deux représentations ℓ-adiques respectivement de $\mathfrak{S}_{d'}$ et de $\mathfrak{S}_{d''}$. On a un isomorphisme canonique

$$\tilde{\sigma}:\sigma^*(\tilde{A}_{\rho''}\boxtimes\tilde{A}_{\rho'})\tilde{\to}\tilde{A}_{\rho'}\boxtimes\tilde{A}_{\rho''}.$$

Notons

$$\widetilde{\sigma\tau}_{\rho'\times\rho''}:(\sigma\tau)^*q_1^*(\tilde{A}_{\rho''}\boxtimes\tilde{A}_{\rho'})\tilde{\to}q^*(\tilde{A}_{\rho'}\boxtimes\tilde{A}_{\rho''})$$

l'isomorphisme qui se déduit de $(\tilde{\tau}_{\rho'}\times\tilde{\tau}_{\rho''})\circ\tilde{\sigma}$ par q^*. Cet isomorphisme étant α-invariante, il induit un isomorphisme

$$\widetilde{\sigma\tau}^\alpha_{\rho'\times\rho''}:(\sigma\tau)^{\alpha,*}(\tilde{A}_{\rho''}\boxtimes^\alpha\tilde{A}_{\rho'})\tilde{\to}(\tilde{A}_{\rho'}\boxtimes^\alpha\tilde{A}_{\rho''}).$$

PROPOSITION 7.4.1. – *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\tau^*\mathrm{R}m^{\alpha}_{1,*}(\tilde{\mathcal{A}}_{\rho''}\boxtimes^{\alpha}\tilde{\mathcal{A}}_{\rho'}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{c-d-b}"'] & \tau^*\tilde{\mathcal{A}}_{\rho_1} \arrow[d, "\tau^*(\kappa)"] \\
\mathrm{R}m^{\alpha}_{*}(\sigma\tau)^{\alpha,*}(\tilde{\mathcal{A}}_{\rho''}\boxtimes^{\alpha}\tilde{\mathcal{A}}_{\rho'}) \arrow[d, "\mathrm{R}m^{\alpha}_{*}(\widetilde{\sigma\tau}^{\alpha}_{\rho'\times\rho''})"'] & \tau^*\tilde{\mathcal{A}}_{\rho} \arrow[d, "\tilde{\tau}_{\rho}"] \\
\mathrm{R}m^{\alpha}_{*}(\tilde{\mathcal{A}}_{\rho'}\boxtimes^{\alpha}\tilde{\mathcal{A}}_{\rho''}) \arrow[r, "\sim"'] & \tilde{\mathcal{A}}_{\rho}
\end{tikzcd}$$

où les deux flèches horizontales sont des isomorphismes de la proposition 7.3.3, où $\mathrm{c}-\mathrm{d}-\mathrm{b}$ *est l'isomorphisme de changement de base pour le morphisme propre* m^{α}, *où* ρ *et* ρ_1 *sont les représentations induites*

$$\rho=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{d'}\times\mathfrak{S}_{d''}}^{\mathfrak{S}_d}(\rho'\otimes\rho'')\qquad \rho_1=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{d''}\times\mathfrak{S}_{d'}}^{\mathfrak{S}_d}(\rho''\otimes\rho')$$

pour lesquelles on a

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\rho}=p^*(\mathcal{A}_{\rho'}*\mathcal{A}_{\rho''})\qquad \tilde{\mathcal{A}}_{\rho_1}=p^*(\mathcal{A}_{\rho''}*\mathcal{A}_{\rho'})$$

et où κ *se déduit de l'isomorphisme de commutativité*

$$\kappa:\mathcal{A}_{\rho''}*\mathcal{A}_{\rho'}\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}_{\rho'}*\mathcal{A}_{\rho''}.$$

Démonstration. – Les flèches du diagramme étant tous des isomorphismes entre faisceaux pervers décalés, il suffit de démontrer que le diagramme commute au-dessus de l'ouvert $\mathfrak{g}_{d,r,rss}$ où le polynôme P est séparable.

Au-dessus de cet ouvert, les $\tilde{\mathcal{A}}_{\rho}$, $\tilde{\mathcal{A}}'_{\rho}$, $\tilde{\mathcal{A}}''_{\rho}$ proviennent respectivement de $Q_{d,rss}$, $Q_{d',rss}$, $Q_{d'',rrs}$. Par construction, les $\tilde{\tau}_{\rho}$ sont triviaux au niveau de $Q_{d,rss}$, $Q_{d',rss}$, $Q_{d'',rrs}$. Il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}m_{1,Q,*}(\mathcal{L}_{\rho''}\boxtimes\mathcal{L}_{\rho'}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{R}m_{Q,*}(\tilde{\sigma})"'] & \mathcal{L}_{\rho''}*\mathcal{L}_{\rho'} \arrow[d, "\kappa"] \\
\mathrm{R}m_{Q,*}\sigma^*(\mathcal{L}_{\rho'}\boxtimes\mathcal{L}_{\rho''}) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{L}_{\rho'}*\mathcal{L}_{\rho''}
\end{tikzcd}$$

Mais c'est précisément la définition de l'isomorphisme de commutativité κ.

7.5. Compatibilité

Soient $(P, R) \in Q_{d,r}(\bar{k})$ avec $P = \prod_{i=1}^{r}(\varpi - \gamma_j)^{d_j}$ et $R = \prod_{i=1}^{r}(\varpi - \gamma_j)^{r_j}$ où $\gamma_j \in \bar{k}$ et où $d_j, r_j \in \mathbb{N}$ avec $d_j < r_j$.

Soit ρ une représentation ℓ-adique de $\mathfrak{S}_d$. Sa restriction à $\mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \mathfrak{S}_{d_r}$ admet une décomposition

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{d_1}\times\cdots\mathfrak{S}_{d_n}}^{\mathfrak{S}_d} \rho = \bigoplus_i \bigotimes_j \rho_{i,j}$$

où chaque $\rho_{i,j}$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_{d_j}$.

PROPOSITION 7.5.1. – *On a un isomorphisme*

$$\mathfrak{g}_{d,r}(P, R) = \prod_{j=1}^{r} \mathfrak{g}_{d_j,r_j}((\varpi - \gamma_j)^{d_j}, (\varpi - \gamma_j)^{r_j})$$

via lequel on a un isomorphisme

$$\tilde{\mathcal{A}}_\rho|_{\mathfrak{g}_{d,r}(P,R)} = \bigoplus_i \bigotimes_{j=1}^{r} \tilde{\mathcal{A}}_{\rho_{i,j}}|_{\mathfrak{g}_{d_j,r_j}((\varpi-\gamma_j)^{d_j},(\varpi-\gamma_j)^{r_j})}.$$

De plus l'action de $\tilde{\tau}_\rho$ sur le membre de gauche s'identifie à l'action de $\bigoplus_i \bigotimes_{j=1}^{r} \tilde{\tau}_{\rho_{i,j}}$ sur le membre de droite.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.4.1.

8. L'application $b' : \mathcal{H}_2^+ \to \mathcal{H}'^+$

8.1. L'identité $b(f_\lambda) = \phi_\lambda$: rappel

Soit k_2 l'extension quadratique de k contenue dans $\bar{k}$. Notons $F_{\varpi,2} = k_2((\varpi))$ et $\mathcal{O}_{\varpi,2} = k_2[[\varpi]]$. Soit $\mathcal{H}_2^+$ l'algèbre des fonctions à support compact dans $\mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_{\varpi,2}) \cap \mathrm{GL}(n, F_{\varpi,2})$ qui sont bi-$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{\varpi,2})$-invariantes. Rappelons que $b : \mathrm{H}_2^+ \to \mathrm{H}^+$ désigne l'homomorphisme de changement de base.

Le degré d'extension $r = 2$ sera désormais fixe, et on notera f_λ et ϕ_λ pour $f_{2,\lambda}$ et $\phi_{2,\lambda}$.

On a construit dans la section 6, pour toute n-partition λ, une nouvelle réalisation géométrique f_λ de la fonction $a_{2,\lambda} \in \mathcal{H}_2^+$ de Lusztig. La fonction f_λ est définie comme la trace de $\tilde{\sigma} \circ \mathrm{Fr}$ sur les fibres de $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi} \boxtimes \mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$ au-dessus des points fixes de $\mathrm{Fr} \circ \sigma$. La fonction $\phi_\lambda = b(f_\lambda)$ peut alors être définie comme la fonction trace de $\mathrm{Fr} \circ \kappa'$ dans les fibres de $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi} * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$ au-dessus des points fixes de Fr, où κ' est l'automorphisme de $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi} * \mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$ qui se déduit de l'isomorphisme de commutativité κ.

Cette construction reste valable avec les $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$; décrivons-la brièvement.

Soit λ une n-partition de d'. Choisissons un entier $r > d = 2d'$. Notons $\mathfrak{g}_{d',r,\varpi}$ la fibre de $\mathfrak{g}_{d',r}$ au-dessus de $(\varpi^{d'}, \varpi^r)$. Notons $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}$ la restriction de $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda[-d](-d/2)$ à $\mathfrak{g}_{d',r,\varpi}$. Soient $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1}$ et $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,2}$ deux copies de $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi}$.

L'involution $\sigma : \mathfrak{g}_{d',r,\varpi}^2 \to \mathfrak{g}_{d',r,\varpi}^2$ définie par $\sigma(g, g') = (g', g)$ se relève en un isomorphisme

$$\tilde{\sigma} : \sigma^*(\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi,1} \boxtimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi,2}) \to (\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi,1} \boxtimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi,2})$$

qui se déduit de l'isomorphisme canonique $\mathcal{A}_{\lambda,\varpi,1} \tilde{\to} \mathcal{A}_{\lambda,\varpi,2}$.

Les points fixes de $\sigma \circ \mathrm{Fr}$ dans $\mathfrak{g}^2_{d',r,\varpi}$ sont de la forme $(g, \bar{g})$ où $g \in \mathfrak{g}_{d',r,\varpi}(k_2)$ et où $x \mapsto \bar{x}$ est l'élément non trivial du groupe $\mathrm{Gal}(k_2/k)$. La trace de $\tilde{\sigma} \circ \mathrm{Fr}$ sur les fibres de $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi,1} \boxtimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi,2}$ au-dessus des points fixes de $\sigma \circ \mathrm{Fr}$ définit donc une fonction sur $\mathfrak{g}_{d',r,\varpi}(k_2)$. Le complexe $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}$ étant bi-$G_{r,\varpi}$-équivariant, cette fonction est bi-$G_{r,\varpi}(k_2)$-invariante. Elle définit donc une fonction dans $\mathcal{H}_2^+$; c'est la fonction f_λ de la section 6.

La fonction $\phi_\lambda = b(f_\lambda)$ peut être définie par la fonction trace de $\kappa' \circ \mathrm{Fr}$ sur les fibres de $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi,1} * \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi,2}$ au-dessus de $\mathfrak{g}_{d',r,\varpi}(k)$, où κ' désigne l'automorphisme

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,1} * \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,2} \xrightarrow{\kappa} \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,2} * \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,1} \xrightarrow{\iota} \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,1} * \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,2},$$

où κ désigne l'isomorphisme de commutativité et où ι se déduit de l'isomorphisme identique entre $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,1}$ et $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,2}$.

8.2. Les fonctions $f'_\lambda, \phi'_\lambda$ et l'identité $b'(f'_\lambda) = \phi'_\lambda$

Soit $S(F_\varpi)$ l'ensemble des matrices $s \in \mathrm{GL}(n, F_{2,\varpi})$ telles que ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(s) = s$. Le groupe $\mathrm{GL}(n, F_{2,\varpi})$ agit sur $S(F_\varpi)$ par $g.s = {}^{\mathrm{t}}\bar{g}sg$ où $x \mapsto \bar{x}$ est l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_{2,\varpi}/F_\varpi)$.

Notons $\mathcal{H}'^+$ l'espace des fonctions à support compact dans

$$S(F_\varpi)^+ = \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_{2,\varpi}) \cap S(F_\varpi)$$

qui sont $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{2,\varpi})$-invariantes. Soit $b' : \mathcal{H}_2^+ \to \mathcal{H}'^+$ l'application linéaire qui associe à chaque fonction $f \in \mathcal{H}_2^+$ la fonction $\phi' \in \mathcal{H}'^+$ définie comme suit. Si $s \in S(F_\varpi)$ s'écrit $s = g\,{}^{\mathrm{t}}\bar{g}$, on pose

$$\phi'(s) = \int_{H(F_\varpi)} f(gh)\mathrm{d}h$$

où

$$H(F_\varpi) = \{h \in \mathrm{GL}(n, F_{2,\varpi}) \mid {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(h) = h^{-1}\}$$

et où la mesure de Haar normalisée du sous-groupe unitaire $H(F_\varpi)$ attribue à $H(\mathcal{O}_\varpi) = H(F_\varpi) \cap \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{2,\varpi})$ le volume 1. Cette valeur $\phi'(s)$ ne dépend pas du choix de g. Si s ne s'écrit pas sous la forme $g\,{}^{\mathrm{t}}\bar{g}$, on pose $\phi'(s) = 0$. En fait s s'écrit sous cette forme si et seulement si la valuation de son déterminant est un entier pair.

En utilisant la proposition 7.4.1 on peut interpréter géométriquement l'application b'.

Les points fixes de

$$\begin{aligned}(\tau' \times \tau') \circ \sigma \circ \mathrm{Fr} : \mathfrak{g}^2_{d',r,\varpi} &\to \mathfrak{g}^2_{d',r,\varpi} \\ (g_1, g_2) &\to ({}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g_2), {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g_1))\end{aligned}$$

sont de la forme $(g, {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g))$ avec $g \in \mathfrak{g}_{d',r,\varpi}(k_2)$, si bien qu'on peut identifier cet ensemble de points fixes à $\mathfrak{g}_{d',r,\varpi}(k_2)$.

Pour toute n-partition λ de d', la trace de $(\tilde{\tau}_\lambda \times \tilde{\tau}_\lambda) \circ \tilde{\sigma} \circ \mathrm{Fr}$ dans les fibres de $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi} \boxtimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}$ au-dessus des points fixes de $(\tau' \times \tau') \circ \sigma \circ \mathrm{Fr}$ définit donc une fonction sur $\mathfrak{g}_{d',r,\varpi}(k_2)$:

$$f'_\lambda(g) = \mathrm{Tr}((\tilde{\tau}_\lambda \times \tilde{\tau}_\lambda) \circ \tilde{\sigma} \circ \mathrm{Fr}, (\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi} \boxtimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi})_{(g,\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g))}).$$

Le complexe $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}$ étant bi-$G_{r,\varpi}$-équivariant, cette fonction est bi-$\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}_{2,\varpi})$-invariante. Notons f'_λ l'élément de H_2^+ ainsi défini. On verra dans la section suivante que f'_λ n'est qu'une nouvelle réalisation géométrique de la même fonction $a_{2,\lambda}$ de Lusztig.

L'ensemble des points fixes de $\tau\circ\mathrm{Fr}$ agissant sur $\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}$ avec $d=2d'$ est l'ensemble

$$\{s\in\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}(k_2)\mid {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(s)=s\}$$

qui s'identifie à un sous-ensemble de l'ensemble des classes modulo ϖ^r des éléments de $S(F_\varpi)^+$.

Rappelons que pour la représentation induite de $\mathfrak{S}_d$

$$\rho=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{d'}\otimes\mathfrak{S}_{d'}}^{\mathfrak{S}_d}(\rho_\lambda\otimes\rho_\lambda)$$

on a $\mathcal{A}_\rho=\mathcal{A}_\lambda*\mathcal{A}_\lambda$. La trace de $\tilde{\tau}_\rho\circ\mathrm{Fr}\circ\kappa'$ sur les fibres de $\tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}$ au-dessus des points fixes de $\tau\circ\mathrm{Fr}$ définit donc une fonction sur $S(F_\varpi)^+$:

$$\phi'_\lambda(s)=\mathrm{Tr}(\tilde{\tau}_\rho\circ\kappa'\circ\mathrm{Fr},(\tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi})_s).$$

Le complexe $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ étant bi-G_r-équivariant, cette fonction appartient à $\mathcal{H}'^+$. Notons-la ϕ'_λ.

PROPOSITION 8.2.1. – *Pour toute n-partition λ de d', on a $b'(f'_\lambda)=\phi'_\lambda$.*

Démonstration. – Soit s un élément de $\mathrm{Fix}(\tau\circ\mathrm{Fr},\mathfrak{g}_{d,r,\varpi})$. Il faut démontrer que

$$\sum_{\substack{g\in\mathfrak{g}_{d',r,\varpi}(k_2)/H_{r,\varpi}(k)\\ g\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g)=s}} f'_\lambda(g)=\varphi'_\lambda(s).$$

ou encore

$$\sum_{\substack{g\in\mathfrak{g}_{d',r,\varpi}(k_2)/H_{r,\varpi}(k)\\ g\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g)=s}} \mathrm{Tr}((\tilde{\tau}_\lambda\times\tilde{\tau}_{\lambda,\varpi})\circ\tilde{\sigma}\circ\mathrm{Fr},(\tilde{\mathcal{A}}_\lambda\boxtimes\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi})_{(g,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g))})$$
$$=\mathrm{Tr}(\tilde{\tau}_\rho\circ\mathrm{Fr}\circ\kappa',(\tilde{\mathcal{A}}_\rho)_s)$$

où

$$H_{r,\varpi}(k)=\{h\in\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}_{2,\varpi}/\varpi^r\mathcal{O}_{2,\varpi})\mid {}^{\mathrm{t}}\bar{h}=h^{-1}\}.$$

L'ensemble où s'étend la sommation est celui des points fixes de $(\tau'\times\tau')\circ\sigma\circ\mathrm{Fr}$ dans la fibre du morphisme

$$m^\alpha:\mathfrak{g}^\alpha_{d',d',r}\to\mathfrak{g}_{d,r}$$

au-dessus de s. Considérons la k-structure rationnelle du couple

$$(\mathfrak{g}^\alpha_{d',d',r},\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}\boxtimes^\alpha\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi})\otimes_k\bar{k}$$

dont les endomorphismes de Frobenius associés sont

$$(\tau'\times\tau')\circ\sigma\circ\mathrm{Fr}:\mathfrak{g}^\alpha_{d',d',r}\otimes_k\bar{k}\to\mathfrak{g}^\alpha_{d',d',r}\otimes_k\bar{k}$$

et

$$(\tilde{\tau}_\lambda \times \tilde{\tau}_\lambda) \circ \tilde{\sigma} \circ \mathrm{Fr} : ((\tau' \times \tau') \times \sigma \times \mathrm{Fr})^*(\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi} \boxtimes^\alpha \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi} \boxtimes^\alpha \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}.$$

Considérons aussi la k-structure rationnelle de

$$(\mathfrak{g}_{d,r}, \tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}) \otimes_k \bar{k}$$

dont les endomorphismes de Frobenius associés sont

$$\tau \circ \mathrm{Fr} : \mathfrak{g}_{d,r} \otimes_k \bar{k} \to \mathfrak{g}_{d,r} \otimes_k \bar{k}$$

et

$$\tilde{\tau}_\rho \circ \mathrm{Fr} \circ \kappa : (\tau \circ \mathrm{Fr})^*(\tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}.$$

Grâce à la proposition 7.4.1, on sait que le morphisme m^α et l'isomorphisme 7.3.3

$$\mathrm{R}m^\alpha_*(\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi} \boxtimes^\alpha \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}) = \tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}$$

sont compatibles à ces k-structures rationnelles.

La proposition résulte donc de la formule des traces de Grothendieck. □

8.3. L'identité $f_\lambda = f'_\lambda$

Il revient au même de démontrer l'énoncé suivant.

PROPOSITION 8.3.1. – *Pour tout $g \in \mathfrak{g}_{d,r,\varpi}(k_2)$, on a*

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\sigma} \circ \mathrm{Fr}, (\tilde{\mathcal{A}}_\lambda \boxtimes \tilde{\mathcal{A}}_\lambda)_{(g,\mathrm{Fr}(g))}) = \mathrm{Tr}((\tilde{\tau}_\lambda \times \tilde{\tau}_\lambda) \circ \tilde{\sigma} \circ \mathrm{Fr}, (\tilde{\mathcal{A}}_\lambda \boxtimes \tilde{\mathcal{A}}_\lambda)_{(g,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g))})$$

Démonstration. – Puisque les actions de $\tilde{\tau}_\lambda$, de $\tilde{\sigma}$ et de Fr commutent dans un sens évident, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,g} \otimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\mathrm{Fr}(g)} \arrow[r, "\tilde{\sigma}\circ\mathrm{Fr}"] \arrow[d, "1\otimes\tilde{\tau}_\lambda"'] & \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,g} \otimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\mathrm{Fr}(g)} \\ \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,g} \otimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g)} \arrow[r, "(\tilde{\tau}_\lambda\times\tilde{\tau}_\lambda)\circ\tilde{\sigma}\circ\mathrm{Fr}"'] & \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,g} \otimes \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Fr}(g)} \arrow[u, "1\otimes\tilde{\tau}_\lambda^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif. La trace des deux flèches horizontales sont donc égales.

COROLLAIRE 8.3.2. – *Pour toute n-partition λ, on a $a_{2,\lambda} = f_\lambda = f'_\lambda$ et $b'(a_{2,\lambda}) = \phi'_\lambda$.*

9. L'interprétation géométrique d'une conjecture de Jacquet et Ye

9.1. Enoncé

Dans la section précédente, les applications linéaires

$$b : \mathcal{H}_2^+ \to \mathcal{H}^+$$
$$b' : \mathcal{H}_2^+ \to \mathcal{H}'^+$$

ayant été interprétées géométriquement, nous sommes maintenant en mesure de donner une traduction géométrique du lemme fondamental de Jacquet et Ye, puis de le démontrer dans les même lignes que [Ngo1].

Notons A le sous-groupe diagonal de $\mathrm{GL}(n)$ et N son sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Pour chaque

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in (k^\times)^{n-1}$$

notons $\theta_\alpha : N(F_\varpi) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ le caractère

$$\theta_\alpha(x) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{res}\,(x_{i,i+1})\mathrm{d}\varpi\right)$$

où $\psi : k \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est un caractère additif non trivial qu'on fixe une fois pour toutes.

Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{H}^+$, toute matrice diagonale $a \in A(F_\varpi)$, pour tout $\alpha \in (k^\times)^{n-1}$, posons

$$I_\varpi(a, \alpha, \phi) = \int_{N(F_\varpi)\times N(F_\varpi)} \phi({}^{\mathrm{t}}x_1 a x_2)\theta_\alpha(x_1)\theta_\alpha(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

où la mesure de Haar normalisé $\mathrm{d}x$ de $N(F_\varpi)$ attribue à $N(\mathcal{O}_\varpi)$ le volume 1.

Cette intégrale intervient comme une intégrale orbitale dans une formule des traces relative de Jacquet. Il s'agit d'une intégrale de Kloosterman si ϕ est la fonction caractéristique de $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\varpi)$.

Pour tout $\alpha \in (k^\times)^{n-1}$, notons $\theta'_\alpha : N(F_{2,\varpi}) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ le caractère défini par

$$\theta'_\alpha(x) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{res}\,(x_{i,i+1} + \bar{x}_{i,i+1})\mathrm{d}\varpi\right).$$

Pour toute fonction $\phi' \in \mathcal{H}'^+$, pour toute matrice diagonale $a \in A(F_\varpi)$ et pour tout $\alpha \in (k^\times)^{n-1}$, posons

$$J_\varpi(a, \alpha, \phi') = \int_{N(F_{2,\varpi})} \phi'({}^{\mathrm{t}}\bar{x} a x)\theta'_\alpha(x)\mathrm{d}x$$

où la mesure de Haar normalisée $\mathrm{d}x$ de $N(F_{2,\varpi})$ attribue à $N(\mathcal{O}_{2,\varpi})$ le volume 1.

THÉORÈME 4. – *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_2^+$ pour toute*

$$a = \mathrm{diag}\,(a_1, a_1^{-1}a_2, \dots, a_{n-1}^{-1}a_n) \in A(F_\varpi)$$

et pour tout $\alpha \in (k^\times)^{n-1}$, on a

$$I_\varpi(a, \alpha, b(f)) = (-1)^{\mathrm{val}_\varpi(a_1 \dots a_{n-1})} J_\varpi(a, \alpha, b'(f)).$$

Cet énoncé joue le rôle d'un lemme fondamental dans une formule des traces relative. Jacquet et Ye l'ont conjecturé dans [JY] sans hypothèse sur la caractéristique et l'ont démontré pour $n = 2$ et $n = 3$. Le cas où f est l'unité de l'algèbre de Hecke a été démontré dans [Ngo1].

9.2. Sommes locales

Pour tout $a \in A(F_\varpi)$, on a défini dans [Ngo1] un triplet $(\mathcal{X}_\varpi(a), h, \tau)$, où $\mathcal{X}_\varpi(a)$ est un schéma de type fini sur k tel que

$$\mathcal{X}_\varpi(a)(k) = \{(x, x') \in (N(F_\varpi)/N(\mathcal{O}_\varpi))^2 \mid {}^{\mathrm{t}}xax' \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_\varpi)\},$$

où le morphisme

$$h : \mathcal{X}_\varpi(a) \times \mathbb{G}_m^{n-1} \to \mathbb{G}_a$$

induit sur les k-points l'application

$$h(x, x', \alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{res}\,(x_{i,i+1} + x'_{i,i+1})\mathrm{d}\varpi$$

et où l'involution $\tau : \mathcal{X}_\varpi(a) \to \mathcal{X}_\varpi(a)$ est définie par $\tau(x, x') = (x', x)$.

On peut écrire la matrice a sous la forme

$$a = \mathrm{diag}\,(a_1, a_1^{-1}a_2, \ldots, a_{n-1}^{-1}a_n).$$

Pour que le schéma $\mathcal{X}_\varpi(a)$ ne soit pas vide, il est nécessaire que $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_\varpi$ ([Ngo1]).

Pour chaque entier $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$r > \mathrm{val}_\varpi(a_1) + \cdots + \mathrm{val}_\varpi(a_n),$$

soit $\mathcal{X}_{\varpi,r}(a)$ le schéma de type fini sur k dont l'ensemble des k-points est l'ensemble

$$\{g \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_\varpi/\varpi^r\mathcal{O}_\varpi) \mid \Delta_i(g) \cong a_i \bmod \varpi^r \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n\}$$

où $\Delta_i(g)$ est le déterminant de la sous-matrice de g faite des i premières lignes et des i premières colonnes.

La limite projective

$$\mathcal{X}_{\varpi,\infty}(a)(k) = \varprojlim \mathcal{X}_{\varpi,r}(a)(k)$$

s'identifie à l'ensemble

$$\{g \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_\varpi) \mid \Delta_i(g) = a_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n\}.$$

Tout élément $g \in \mathcal{X}_{\varpi,\infty}(a)(k)$ s'écrit alors de manière unique sous la forme $g = {}^{\mathrm{t}}xax'$ avec $x, x' \in N(F_\varpi)$ si bien qu'on a une application

$$p_\infty(k) : \mathcal{X}_{\varpi,\infty}(a)(k) \to \mathcal{X}_\varpi(a)(k).$$

PROPOSITION 9.2.1. – *1. Sous la condition*

$$r > \mathrm{val}_\varpi(a_1) + \cdots + \mathrm{val}_\varpi(a_n)$$

on a un morphisme

$$p_r : \mathcal{X}_{\varpi,r}(a) \to \mathcal{X}_\varpi(a)$$

tel que l'application $p_\infty(k)$ se factorise à travers $p_r(k)$.

2. De plus, p_r est un composé de fibrations vectorielles.

Démonstration.

1. Soit $g \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_\varpi)$ tel que $\Delta_i(g) = a_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Notons g_i la sous-matrice de g faite des i premières lignes et des i premières colonnes. On a pour tout $i = 1, \ldots, n-1$

$$g_{i+1} = \begin{pmatrix} g_i & y'_i \\ {}^{\mathrm{t}}y_i & z_i \end{pmatrix}$$

où y_i et y'_i sont des vecteurs colonnes de taille $i \times 1$ et où $z_i \in k$. On a donc

$$g_{i+1} = {}^{\mathrm{t}}x_i \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & a_i^{-1} z_i \end{pmatrix} x'_i$$

où

$$x_i = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_i & g_i^{-1} y_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et où

$$x'_i = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_i & {}^{\mathrm{t}}g_i^{-1} y'_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on pose

$$x = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \qquad x' = x'_1 x'_2 \ldots x'_{n-1}$$

alors on a

$$g = {}^{\mathrm{t}}x \,\mathrm{diag}\,(a_1, a_1^{-1} a_2, \ldots, a_{n-1}^{-1} a_n)\, x'.$$

Maintenant, si les y_i, y'_i sont déterminés modulo ϖ^r avec

$$r > \mathrm{val}_\varpi(a_1 \ldots a_n),$$

en utilisant les relations de commutation, on montre que x et x' sont déterminés modulo $N(\mathcal{O}_\varpi)$. L'application $p_r(k) : \mathcal{X}_{\varpi,r}(a)(k) \to \mathcal{X}_\varpi(a)$ ainsi définie provient d'un morphisme $p_r : \mathcal{X}_{\varpi,r}(a) \to \mathcal{X}_\varpi(a)$.

2. On procède par récurrence sur n. L'assertion est triviale pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour $n-1$.
Notons a' la matrice

$$a' = \mathrm{diag}\,(a_1, a_1^{-1} a_2, \ldots, a_{n-2}^{-1} a_{n-1}) \in \mathrm{GL}(n-1, F_\varpi).$$

Par récurrence, on peut supposer que

$$\mathcal{X}_{\varpi,r}(a') \times_{\mathcal{X}_\varpi(a')} \mathcal{X}_\varpi(a) \to \mathcal{X}_\varpi(a)$$

peut se factoriser en fibrations vectorielles.
La donnée d'un k-point de $\mathcal{X}_{\varpi,r}(a') \times_{\mathcal{X}_\varpi(a')} \mathcal{X}_\varpi(a)$ est équivalente à la donnée de

$$\begin{pmatrix} g' & y'_{n-1} \\ {}^{\mathrm{t}}y_{n-1} & z_{n-1} \end{pmatrix}$$

où

$$g' \in \mathcal{X}_{\varpi,r}(a') \subset \mathfrak{gl}(n-1, \mathcal{O}_\varpi/\varpi^r)$$

où y'_{n-1} (resp. y_{n-1}) est dans $\mathcal{O}_\varpi^{n-1}$ et est déterminé modulo $g'\mathcal{O}_\varpi^{n-1}$ (resp. ${}^{\mathrm{t}}g'\mathcal{O}_\varpi^{n-1}$)), et où $z_{n-1} \in \mathcal{O}_\varpi$ est déterminé modulo $a_{n-1}\mathcal{O}_\varpi$. Il est clair que

$$\mathcal{X}_{\varpi,r}(a) \to \mathcal{X}_{\varpi,r}(a') \times_{\mathcal{X}_\varpi(a')} \mathcal{X}_\varpi(a)$$

est un fibré vectoriel, d'où l'assertion. □

Le schéma $\mathcal{X}_{\varpi,r}(a)$ est naturellement une partie localement fermée de $\mathfrak{g}_{d_n,r,\varpi}$ où $d_n = \mathrm{val}_\varpi(a_n)$. Pour toute représentation ρ de $\mathfrak{S}_{d_n}$, on désigne encore par $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ sa restriction à $\mathcal{X}_{\varpi,r}$.

Proposition 9.2.2. – *Posons*

$$\dot{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi} = \mathrm{R}p_{r,!}\tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}[2d_r](d_r)$$

où d_r est la dimension relative de p_r. Ce morphisme étant lisse on a un isomorphisme

$$\mathrm{R}p_r^! \dot{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi} \simeq p_r^* \dot{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}[2d_r](d_r).$$

La flèche d'adjonction

$$p_r^* \dot{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi} \simeq \mathrm{R}p_r^! \dot{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}[-2d_r](-d_r) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}$$

est alors un isomorphisme.

Démonstration. – Point par point, l'isomorphisme résulte de ce que les fibres géométriques de p_r sont isomorphes à l'espace affine de dimension de d_r et qu'elles sont incluses dans les orbites de $G_{r,\varpi} \times G_{r,\varpi}$ sur $\mathfrak{g}_{d,r}$ au-dessus desquelles le complexe $\tilde{\mathcal{A}}_{\rho,\varpi}$ est constant. □

La flèche $\tilde{\tau}_\rho : \tau_{d_n}^* \tilde{\mathcal{A}}_\rho \to \tilde{\mathcal{A}}_\rho$ induit une flèche $\dot{\tau}_\rho : \tau^* \dot{\mathcal{A}}_\rho \to \dot{\mathcal{A}}_\rho$. On retrouve $\tilde{\tau}_\rho$ comme l'image réciproque de $\dot{\tau}_\rho$.

Corollaire 9.2.3. – *Pour toute n-partition λ de $d' = d_n/2$, on a*

$$I_\varpi(a, \alpha, \phi_\lambda) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \kappa', \mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_\varpi(a) \otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_\alpha^* \mathcal{L}_\psi));$$
$$J_\varpi(a, \alpha, \phi'_\lambda) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \kappa' \circ \dot{\tau}_\rho, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_\varpi(a) \otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_\alpha^* \mathcal{L}_\psi)).$$

où ρ est la représentation induite

$$\rho = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{d'} \times \mathfrak{S}_{d'}}^{\mathfrak{S}_{2d'}} (\rho_\lambda \otimes \rho_\lambda)$$

et où $\mathcal{L}_\psi$ est le faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{G}_a$ associé à $\psi : k \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$.

Dans le cas où $|\lambda| \neq d'$, les intégrales précédentes sont nulles.

Démonstration. – Compte tenu de l'interprétation géométrique des fonctions ϕ_λ et ϕ'_λ, c'est la formule des traces de Grothendieck. □

Théorème 4a. – *Pour toute représentation ρ de $\mathfrak{S}_d$, pour tout $\alpha \in (\bar{k}^\times)^{n-1}$, l'involution $\dot{\tau}_\rho$ agit dans $\mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_\varpi(a) \otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_\alpha^* \mathcal{L}_\psi)$ comme la multiplication par $(-1)^{\mathrm{val}_\varpi(a_1 \dots a_{n-1})}$.*

9.3. Sommes globales

Soit $\underline{d} = (d_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n$. Notons $Q_{\underline{d}} = \prod_{i=1}^n Q_{d_i}$. On a défini dans [Ngo1] un quadruplet $(\mathcal{X}_{\underline{d}}, f_{\underline{d}}, h_{\underline{d}}, \tau_{\underline{d}})$, où le morphisme de type fini

$$f_{\underline{d}} : \mathcal{X}_{\underline{d}} \to Q_{\underline{d}}$$

et tel que pour tout $a = (a_i)_{i=1}^n \in Q_{\underline{d}}(k)$, on a

$$\mathcal{X}_{\underline{d}}(a)(k) = \{(x, x') \in (N(F)/N(\mathcal{O}))^2 \mid {}^{\mathrm{t}}xax' \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O})\},$$

où le morphisme

$$h_{\underline{d}} : \mathcal{X}_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{n-1} \to \mathbb{G}_a$$

induit au niveau des k-points l'application

$$h_{\underline{d}}(x, x', \alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \sum_{v \neq \infty} \operatorname{res}_v(x_{i,i+1} + x'_{i,i+1})\mathrm{d}\varpi,$$

et où $\tau_{\underline{d}} : \mathcal{X}_{\underline{d}} \to \mathcal{X}_{\underline{d}}$ est l'involution $\tau_{\underline{d}}(x, x') = (x', x)$.

Soit $\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{d}}$ le $Q_{\underline{d}}$-schéma dont l'ensemble des k-points au-dessus de $a = (a_i)_{i=1}^n \in Q_{\underline{d}}(k)$ est l'ensemble

$$\{g \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}/(R)) \mid \Delta_i(g) = a_i \bmod R,\ i = 1, \dots, n\}$$

où $R = (a_1 \dots a_n)^2$. Il nous faut choisir R strictement divisible par $a_1 \dots a_n$.

Les assertions suivantes se démontrent exactement comme leurs analogues locaux.

PROPOSITION 9.3.1. – *On a un morphisme $p_{\underline{d}} : \tilde{\mathcal{X}}_{\underline{d}} \to \mathcal{X}_{\underline{d}}$ qui, au niveau des k-points, envoie la réduction modulo R de*

$$g = {}^{\mathrm{t}}xax' \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O})$$

sur $(xN(\mathcal{O}), x'N(\mathcal{O})) \in (N(F)/N(\mathcal{O}))^2$. De plus, $p_{\underline{d}}$ peut se factoriser en fibrations vectorielles.

PROPOSITION 9.3.2. – *Posons*

$$\dot{\mathcal{A}}_\rho = \mathrm{R}p_{r,!}\tilde{\mathcal{A}}_\rho[2d_r](d_r),$$

où d_r est la dimension relative de p_r. Ce morphisme étant lisse, on a un isomorphisme

$$\mathrm{R}p_r^! \dot{\mathcal{A}}_\rho \simeq p_r^* \dot{\mathcal{A}}_\rho[2d_r](d_r).$$

La flèche d'adjonction

$$p_r^* \dot{\mathcal{A}}_\rho \simeq \mathrm{R}p_r^! \dot{\mathcal{A}}_\rho[-2d_r](-d_r) \to \tilde{\mathcal{A}}_\rho$$

est alors un isomorphisme.

L'involution $\tilde{\tau}_\rho : \tau^*\tilde{\mathcal{A}}_\rho \to \tilde{\mathcal{A}}_\rho$ descend aussi en une involution

$$\dot{\tau}_\rho : \tau_{\underline{d}}^*\dot{\mathcal{A}}_\rho \to \dot{\mathcal{A}}_\rho.$$

Voici la variante globale du théorème 4A.

THÉORÈME 4B. – *L'involution $\dot{\tau}_\rho$ agit sur le complexe de faisceaux*

$$\mathrm{R}(f_{\underline{d}} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m^{n-1}})_!(\dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_{\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi)$$

comme la multiplication par $(-1)^{d_1+\cdots+d_{n-1}}$.

Cet énoncé se déduit de son analogue local en utilisant la formule de multiplicativité énoncée dans la section qui suit.

Toutefois, comme dans [Ngo1], on commencera par démontrer l'énoncé global dans le cas très particulier $\underline{d} = (1, 2, \ldots, n)$, puis on en déduit l'énoncé local en utilisant la formule de multiplicativité.

9.4. Compatibilité

Pour tout idéal maximal v de $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes_k \bar{k}$, pour tout $a \in Q_{\underline{d}}(\bar{k})$ et $\alpha \in (\bar{k}^\times)^{n-1}$, on a défini dans [Ngo1] un triplet $(\mathcal{X}_v(a), h_{\alpha,v}, \tau_v)$ où $\mathcal{X}_v(a)$ est un schéma de type fini sur $\bar{k}$ dont l'ensemble des $\bar{k}$-points est l'ensemble

$$\mathcal{X}_v(a)(\bar{k}) = \{x, x' \in N(\bar{F}_v)/N(\bar{\mathcal{O}}_v) \mid {}^t x a x' \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_v)\},$$

où $h_{\alpha,v} : \mathcal{X}_v(a) \to \mathbb{G}_{a,\bar{k}}$ est le morphisme

$$h_{\alpha,v}(x, x') = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{res}_v(x_{i,i+1} + x'_{i,i+1})$$

où τ_v est le morphisme $\tau(x, x') = (x', x)$. On renvoie à [Ngo1] pour la démonstration de l'énoncé suivant.

PROPOSITION 9.4.1. – *Pour tout $a \in Q_{\underline{d}}(\bar{k})$, on a un isomorphisme*

$$\mathcal{X}_{\underline{d}}(a) = \prod_{v \mid a_1 \ldots a_{n-1}} \mathcal{X}_v(a)$$

via lequel on a

$$h_{\underline{d}}(a) = \sum_{v \mid a_1 \ldots a_{n-1}} h_v \qquad \textit{et} \qquad \tau_{\underline{d}}(a) = \prod_{v \mid a_1 \ldots a_{n-1}} \tau_v.$$

Pour v ne divisant pas $a_1 \ldots a_{n-1}$, $\mathcal{X}_v(a)$ est réduit à un point.

Soit maintenant ρ une représentation de $\mathfrak{S}_{d_n}$ où $d_n = \deg(a_n)$. Notons $d_{n,v} = \mathrm{val}_v(a_n)$. On a $d_n = \sum_{v \mid a_n} d_{n,v}$.

On décompose la restriction de ρ à $\prod_{v \mid a_n} \mathfrak{S}_{d_{n,v}}$ en sommes de représentations irréductibles. Celles-ci sont tous de la forme $\bigotimes_{v \mid a_n} \rho_v$ où ρ_v est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_{d_{n,v}}$.

PROPOSITION 9.4.2. – *Supposons que*

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_{d_n}}_{\prod_{v|a_n}\mathfrak{S}_{d_n,v}}\rho = \bigoplus_i \bigotimes_{v|a_n} \rho_{i,v}.$$

Pour tout $a \in Q_{\underline{d}}(\bar{k})$, *on a*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_{\underline{d}}(a), \dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_{\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi) = \bigoplus_i \bigotimes_{v|a_1\ldots a_n} \mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_v(a), \dot{\mathcal{A}}_{\rho_{i,v}} \otimes h_v^*\mathcal{L}_\psi)$$

où pour v *ne divisant pas* a_n, *on prend pour* $\rho_{i,v}$ *la représentation triviale. De plus, l'action* $\dot{\tau}_\rho$ *sur le premier membre est égale à celle de* $\bigoplus_i \bigotimes_{v|a_1\ldots a_n} \dot{\tau}_{\rho_{i,v}}$ *sur le second membre.*

Dans le cas où la représentation ρ est triviale, on retrouve la variante cohomologique de la formule de multiplicativité pour les intégrales de Kloosterman (corollaire 3.2.3 [Ngo1]).

Démonstration. – Compte tenu de la proposition précédente, il suffit de démontrer que via l'isomorphisme

$$\mathcal{X}_{\underline{d}}(a) = \prod_{v|a_1\ldots a_n} \mathcal{X}_v(a)$$

on a un isomorphisme

$$\dot{\mathcal{A}}_\rho = \bigoplus_i \bigotimes_{v|a_1\ldots a_n} \tilde{\mathcal{A}}_{\rho_{i,v}}.$$

Via 9.3.2, on se ramène à la proposition 7.5.1. □

PROPOSITION 9.4.3. – *Si* v *divise* $a_1\ldots a_{n-1}$ *avec la multiplicité* 1, *et si* v *ne divise pas* a_n, *alors, dans la décomposition précédente,*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_v(a)\otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_{\rho_{i,v}} \otimes h_v^*\mathcal{L}_\psi)$$

est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$*-espace vectoriel de rang* 2 *placé en degré* 1 *dans lequel* τ_v *agit comme* -1.

Démonstration. – La représentation $\rho_{i,v}$ est triviale du fait que v ne divise pas a_n. On se ramène donc à l'énoncé 2.4 dans [Ngo1] et donc finalement à un théorème de Deligne sur les sommes de Kloosterman classiques ([Del]). □

10. Démonstration du théorème 5

10.1. L'ouvert $U_{\underline{d}}$

Soit $U_{\underline{d}}$ l'ouvert dense de $Q_{\underline{d}}$ formé des suites $a = (a_i)_{i=1}^n$ telles que le polynôme produit $\prod_{i=1}^n a_i$ est séparable.

PROPOSITION 10.1.1. – *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{R}(f_{\underline{d}} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m^{n-1}})_!(\dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_{\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi)|_{U_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{n-1}} = \mathrm{R}(f_{\underline{d}} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m^{n-1}})_!\, h_{\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi|_{U_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{n-1}} \otimes \mathrm{pr}_{U_{d_n}}^*\mathcal{L}_\rho$$

où $\mathrm{pr}_{U_{d_n}} : U_{\underline{d}} \to U_{d_n}$ *est la projection de* $U_{\underline{d}}$ *sur l'ouvert* $U_{d_n} \subset Q_{d_n}$ *des polynômes unitaires séparables* a_n *de degré* d_n *et où* $\mathcal{L}_\rho$ *est le système local associé à la représentation*

ρ de groupe de Galois $\mathfrak{S}_{d_n}$ du revêtement étale galoisien $\mathbb{A}^{d_n}_{rss} \to U_{d_n}$. De plus, $\tilde{\tau}_\rho$ agit dans $\mathrm{R}(f_{\underline{d}} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m^{n-1}})_! h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi|_{U_n \times \mathbb{G}_m^{n-1}} \otimes \mathrm{pr}_{U_{d_n}}^* \mathcal{L}_\rho$ *comme* $\tilde{\tau} \otimes \mathrm{pr}_{U_{d_n}}^* \mathrm{Id}_{\mathcal{L}_\rho}$.

Démonstration. – Par définition de $\mathcal{A}_\rho$, on sait que la restriction de $\dot{\mathcal{A}}_\rho$ à l'ouvert $\mathcal{X}_{\underline{d}} \times_{Q_{\underline{d}}} U_{\underline{d}}$ est l'image réciproque de $\mathcal{L}_\rho$. La proposition résulte donc de la formule de projection. □

L'énoncé suivant, extrait de [Ngo1] se déduit de la formule de multiplicativité.

Proposition 10.1.2. – $\mathrm{R}(f_{\underline{d}} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m^{n-1}})_! h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi|_{U_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{n-1}}$ *est un système local de rang* $2^{d_1+\cdots+d_{n-1}}$ *placé en degré* $d_1 + \cdots + d_{n-1}$ *dans lequel* $\tilde{\tau}$ *agit comme* $(-1)^{d_1+\cdots+d_{n-1}}$.

Corollaire 10.1.3. – *L'involution $\tilde{\tau}_\rho$ agit dans*

$$\mathrm{R}(f_{\underline{d}} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m^{n-1}})_! (\dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi)|_{U_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{n-1}}$$

comme la multiplication par $(-1)^{d_1+\cdots+d_{n-1}}$.

10.2. Le cas $\underline{d} = (1, 2, \ldots, n)$

On a démontré dans [Ngo1] que pour toute suite $a = (a_i)_{i=1}^n$ dont chaque membre a_i est un polynôme unitaire de degré i, pour tous $x, x' \in N(F)$ tels que ${}^t x a x' \in \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O})$, il existe une unique matrice de la forme $\gamma + \mathrm{Id}_n \varpi$ avec $\gamma \in \mathfrak{gl}(n, k)$ telle que

$$\gamma + \mathrm{Id}_n \varpi \in {}^t N(\mathcal{O})\, {}^t x a x' N(\mathcal{O}).$$

L'application $(x, x') \mapsto \gamma$ définit une section

$$\iota : \mathfrak{gl}(n) = \mathcal{X}_{\underline{d}} \to \tilde{\mathcal{X}}_{\underline{d}}$$

via laquelle on a $\dot{\mathcal{A}}_\rho = \iota^* \tilde{A}_\rho$. En utilisant le lemme 2.3.1, on sait alors que $\dot{\mathcal{A}}_\rho$ est un faisceau pervers équivariant pour l'action adjointe de $\mathrm{GL}(n)$ et qui est isomorphe au prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $\mathfrak{gl}(n)_{rss}$ formé des éléments réguliers semi-simples.

Identifions $\mathrm{GL}(n-1)$ au sous-groupe

$$\mathrm{diag}\,(\mathrm{GL}(n-1), 1) \subset \mathrm{GL}(n).$$

L'énoncé suivant se déduit immédiatement de la proposition 5.2.2 de [Ngo1].

Proposition 10.2.1. – *Si K est un faisceau pervers sur $\mathfrak{gl}(n)$ qui est $\mathrm{GL}(n-1)$-équivariant et est isomorphe à son prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $\mathfrak{gl}(n)_{rss}$, le complexe de faisceaux*

$$\mathrm{R}(f_{\underline{d}} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m^{n-1}})_! (K \otimes h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi)$$

est, à décalage près, un faisceau pervers, prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $U_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{n-1}$.

Compte tenu de ce résultat et du corollaire 10.1.3, on obtient l'énoncé suivant.

Corollaire 10.2.2. – *Lorsque $\underline{d} = (1, 2, \ldots, n)$, $\dot{\tau}_\rho$ agit dans*

$$\mathrm{R}(f_{\underline{d}} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_m^{n-1}})_! (\dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi)$$

comme la multiplication par $(-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}$.

10.3. Augmenter n

Pour déduire du corollaire 10.2.2 le théorème 4A, et donc aussi son analogue global 4B l'astuce consiste à remplacer n par un entier assez grand.

LEMME 10.3.1. – *1. Pour tout $a_\varpi \in A(F_\varpi)$, pour $\alpha = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, les données*

$$(\mathcal{X}_\varpi(a_\varpi), h_\alpha, \tau, \dot{\mathcal{A}}_\rho, \dot{\tau}_\rho) \quad et \quad (\mathcal{X}_\varpi(\operatorname{diag}(\mathrm{Id}_m, a_\varpi)), h_\alpha, \tau, \dot{\mathcal{A}}_\rho, \dot{\tau}_\rho)$$

sont isomorphes.

2. *Pour tous $a_\varpi, a'_\varpi \in A(F_\varpi)$ tels que pour tout $i = 1, \ldots, n$,*

$$a_i \cong a'_i \bmod \varpi^r$$

pour $r = \operatorname{val}_\varpi(a_1 \ldots a_n)$ les données

$$(\mathcal{X}_\varpi(a_\varpi), h_\alpha, \tau, \dot{\mathcal{A}}_\rho, \dot{\tau}_{\dot{\rho}}) \quad et \quad (\mathcal{X}_\varpi(a'_\varpi), h_\alpha, \tau, \dot{\mathcal{A}}_\rho, \dot{\tau}_\rho)$$

sont isomorphes.

Démonstration.

1. On a construit dans [Ngo1], un isomorphisme

$$(\mathcal{X}_\varpi(a_\varpi), h_\alpha, \tau) \tilde{\rightarrow} (\mathcal{X}_\varpi(\operatorname{diag}(\mathrm{Id}_m, a_\varpi)), h_\alpha, \tau).$$

L'isomorphisme entre les $\dot{\mathcal{A}}_\rho$ résulte du corollaire 2.2.3.

2. La construction de l'isomorphisme

$$(\mathcal{X}_\varpi(a_\varpi), h_\alpha, \tau) \tilde{\rightarrow} (\mathcal{X}_\varpi(a'_\varpi), h_\alpha, \tau)$$

dans [Ngo1] fournit également un isomorphisme pour les $\dot{\mathcal{A}}_\rho$. □

Le lemme suivant est extrait de [Ngo1].

LEMME 10.3.2. – *Pour tout $b_\varpi \in A(F_\varpi)$, pour un entier $m \in \mathbb{N}$ assez grand, il existe une suite $a = (a_i)_{i=1}^{m+n}$ dont chaque membre a_i est un polynôme unitaire de degré i à coefficients dans $\bar{k}$, qui satisfait les deux conditions suivantes*

- *si on écrit $b = \operatorname{diag}(\mathrm{Id}_m, b_\varpi)$ sous la forme*

$$b = (b_1, b_1^{-1} b_2, \ldots, b_{m+n-1}^{-1} b_{m+n})$$

alors on a $a_i \cong b_i \bmod \varpi^r$ pour tout $i = 1, 2 \ldots, m+n$ et pour $r = \operatorname{val}_\varpi(b_1 \ldots b_{m+n})$;

- *pour tout idéal maximal v de $\mathcal{O} \otimes_k \bar{k}$ différente de ϖ, v divise $a_1 \ldots a_{m+n}$ avec au plus une multiplicité* 1.

Fin de la démonstration du théorème 5. – Soit b un élément quelconque de $A(F_\varpi)$. Choisissons une suite $a = (a_i)_{i=1}^{m+n}$ comme dans le lemme précédent afin que les données

$$(\mathcal{X}_\varpi(b_\varpi), h_\alpha, \tau, \dot{\mathcal{A}}_\rho, \dot{\tau}_\rho) \quad \text{et} \quad (\mathcal{X}_\varpi(a), h_\alpha, \tau, \dot{\mathcal{A}}_\rho, \dot{\tau}_\rho)$$

soient isomorphes.

Soit ρ une représentation de $\mathfrak{S}_{\mathrm{val}_\varpi(a_{m+n})}$ qu'on peut supposer irréductible. Notons

$$\rho' = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathrm{val}_\varpi(a_{m+n})}}^{\mathfrak{S}_{m+n}} \rho,$$

où on a identifié $\mathfrak{S}_{\mathrm{val}_\varpi(a_{m+n})}$ au sous-groupe

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{val}_\varpi(a_{m+n})} \times \mathfrak{S}_1^{m+n-\mathrm{val}_\varpi(a_{m+n})}$$

de $\mathfrak{S}_{m+n}$.

Dans la formule 10.4.2,

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_{\underline{d}}(a) \otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_{\rho'} \otimes h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi) = \bigoplus_i \bigotimes_{v | a_1 \ldots a_n} \mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_v(a) \otimes_k \bar{k}, \dot{\mathcal{A}}_{\rho_{i,v}} \otimes h_v^* \mathcal{L}_\psi)$$

ρ est une des représentations irréductibles $\rho_{i,\varpi}$. Sachant que $\dot{\tau}_{\rho'}$ agit dans le membre de gauche comme la multiplication par $(-1)^{1+2+\cdots+(m+n-1)}$, il agit de la même manière dans tous les facteurs directs du membre de droite. Or dans chacun de ces facteurs directs, d'après 10.4.3, les complexes locaux en $v \neq \varpi$ sont des espaces vectoriels de rang 2 placés en degré 1 dans lesquels $\dot{\tau}_{\rho_{i,v}}$ agit comme -1. En utilisant la formule de Kunneth on en déduit que $\dot{\tau}_\rho$ agit dans $\mathrm{R}\Gamma_c(\mathcal{X}_\varpi(a), \dot{\mathcal{A}}_\rho \otimes h_\varpi^* \mathcal{L}_\psi)$ comme

$$(-1)^{\mathrm{val}_\varpi(a_1 \ldots a_{m+n-1})} = (-1)^{\mathrm{val}_\varpi(b_1 \cdots b_{n-1})}. \quad \square$$

11. D'autres remarques

11.1. Le signe ε_λ

On a construit en 7.2 les relèvements $\tilde{\tau}_\rho$ de τ sur $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$. Rappelons cette construction dans la situation plus habituelle de la correspondance de Springer. D'après 2.2.3 et 2.3.1, la définition de $\tilde{\tau}_\rho$ dans 7.2 et celle qui suit coïncident.

Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ et $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ la transposition $g \mapsto {}^{\mathrm{t}}g$. On a $\phi \circ \tau = \phi$ où $\phi : \mathfrak{g} \to Q_d$ est le morphisme polynôme caractéristique.

Pour toute représentation ρ du groupe $\mathfrak{S}_n$, la restriction de $\mathcal{A}_\rho$ à l'ouvert des éléments réguliers semi-simples $\mathfrak{g}_{rss}$ provient d'un système local $\mathcal{L}_\rho$ sur $Q_{d,rss}$ par l'image inverse de ϕ. On étend alors le morphisme évident

$$\tau^* \phi_{rss}^* \mathcal{L}_\rho \to \phi_{rss}^* \mathcal{L}_\rho$$

en un morphisme

$$\tilde{\tau}_\rho : \tau^* \mathcal{A}_\rho \to \mathcal{A}_\rho$$

par le prolongement intermédiaire.

Maintenant, si ρ est égale à ρ_λ, la représentation irréductible correspondant à une partition λ de n, la restriction de $\mathcal{A}_\lambda$ au cône Nil des éléments nilpotents est, à décalage près, le complexe d'intersection de $\overline{\mathrm{Nil}}_\lambda$ l'adhérence de l'orbite adjointe Nil_λ des éléments nilpotents de bloc de Jordan de taille λ ([Lus],[B-M]).

En restreignant alors $\tilde{\tau}_\lambda$ à la fibre d'un élément $x \in \mathrm{Nil}_\lambda(\bar{k})$ qui est symétrique, on obtient un automorphisme d'ordre 2 de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Le signe ε_λ ainsi obtenu ne dépend clairement pas du choix de la matrice x.

Il est naturel de se demander comment calculer ε_λ de façon combinatoire. Nous avons le résultat partiel suivant.

PROPOSITION 11.1.1. – *Soit V_λ la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ correspondant à la partition λ. Lorsque la trace de la permutation longue $w_0 \in \mathfrak{S}_n$ dans V_λ est non nulle, son signe est égal à celui de ε_λ .*

Démonstration. – Soit $\mathcal{B}$ la variété des drapeaux de $\mathrm{GL}(n)$. Rappelons que la résolution simultanée de Grothendieck-Springer est définie par

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \{(x,B) \in \mathfrak{g} \times \mathcal{B} \mid x \in \mathrm{Lie}\,(B)\} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$$

La transposition $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ se relève en une involution $\tilde{\tau} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ définie par $\tilde{\tau}(x,B) = ({}^{\mathrm{t}}x, {}^{\mathrm{t}}B)$ si bien qu'on a un morphisme

$$\tilde{\tau} : \tau^* \mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell \to \mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

D'après le théorème de décomposition ([BBD]), on a

$$\mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes \mathcal{A}_\lambda.$$

LEMME 11.1.2. – *L'action induite par l'involution $\tilde{\tau} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ sur $\mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ est égale à celle de $\bigoplus_\lambda \rho_\lambda(w_0) \otimes \tilde{\tau}_\lambda$ agissant sur $\bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes \mathcal{A}_\lambda$.*

Démonstration. – Au-dessus de l'ouvert $\mathfrak{g}_{rss}$, on a, entre

$$\tilde{\mathfrak{g}}' = \{(x, gA) \in \mathfrak{g} \times G/A \mid g^{-1}xg \in \mathrm{Lie}\,(A)\}$$

et $\tilde{\mathfrak{g}}$ le morphisme défini par

$$(x, gA) \mapsto (x, gBg^{-1}),$$

qui est un isomorphisme. Ici G désigne $\mathrm{GL}(n)$ et A son sous-groupe diagonal. L'action de W sur $\tilde{\mathfrak{g}}_{rss}$ est déduite de son action sur $\tilde{g}'$ définie par $(x, gA) \mapsto (x, gwA)$.

Soit maintenant $x \in A(\bar{k})$ régulier semi-simple. On sait que la restriction de $\tilde{\tau}_\lambda$ à la fibre de $\mathcal{L}_\lambda$ au-dessus de x est l'identité. Il suffit donc d'examiner l'action de $\tilde{\tau}$ dans la fibre de $\tilde{\mathfrak{g}}$ au-dessus de x. Dans cette fibre, $\tilde{\tau}$ agit par

$$(x, wBw^{-1}) \mapsto ({}^{\mathrm{t}}x, {}^{\mathrm{t}}(wBw^{-1}))$$

où

$${}^{\mathrm{t}}wBw^{-1} = ww_0Bw_0w^{-1},$$

si bien qu'il agit dans $(\mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell)_x$ comme l'action de w_0 d'où se déduit le lemme. □

Fin de la démonstration. – On considère maintenant la fibre géométrique de π au-dessus d'une matrice $x \in \mathrm{Nil}_\lambda(\bar{k})$ qui est symétrique. Ses composantes irréductibles ayant la même dimension d_λ, la contribution de $(V_\lambda \otimes \mathcal{A}_\lambda)_x$ dans $(\mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell)_x$ est précisément le groupe de cohomologie de degré maximal $\mathrm{H}^{2d_\lambda}(\pi^{-1}(x))$. Par l'application trace, on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^{2d_\lambda}(\pi^{-1}(x)) \tilde{\rightarrow} \bigoplus_{c \in C} \bar{\mathbb{Q}}_\ell(-d_\lambda)$$

où C est l'ensemble des composantes irréductibles de $\pi^{-1}(x)$. L'action de $\tilde{\tau}$ sur le groupe de cohomologie de degré maximal $\mathrm{H}^{2d_\lambda}(\pi^{-1}(x))$ se déduit de son action sur cet ensemble C. Une composante fixée par $\tilde{\tau}$ contribue une valeur propre 1 ; deux composantes différentes permutées par $\tilde{\tau}$ contribuent une valeur propre 1 et une valeur propre -1. Ainsi la trace de $\tilde{\tau}$ dans $\mathrm{H}^{2d_\lambda}(\pi^{-1}(x))$ est toujours un nombre entier positif ou nul.

En comparant cette assertion au lemme précédent, on déduit la proposition. □

11.2. Les fonctions a'_λ

Les applications $b : \mathcal{H}_2^+ \rightarrow \mathcal{H}^+$ et $b' : \mathcal{H}_2^+ \rightarrow \mathcal{H}'^+$ n'étant pas surjectives, les fonctions ϕ_λ (resp. ϕ'_λ) n'engendrent pas $\mathcal{H}^+$ (resp. $\mathcal{H}'^+$).

Pour toute n-partition λ de d, la trace de l'endomorphisme de Frobenius sur les fibres de $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}$ au-dessus des k-points de $\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}$ définit un élément $a_\lambda \in \mathcal{H}^+$. La trace de $\mathrm{Fr} \circ \tilde{\tau}_\lambda$ dans les fibres de $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\varpi}$ au-dessus des points fixes de $\mathrm{Fr} \circ \tau$ dans $\mathfrak{g}_{d,r,\varpi}$ définit un élément $a'_\lambda \in \mathcal{H}'^+$.

Les fonctions caractéristiques $c_\lambda \in \mathcal{H}^+$ de la double classe

$$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\varpi)\varpi^\lambda \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\varpi) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_\varpi) \cap \mathrm{GL}(n, F_\varpi)$$

forment une base de $\mathcal{H}^+$. D'après Lusztig ([Lus]), on a

$$a_\lambda = q^{-2\langle\lambda,\delta\rangle}\left(c_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} K_{\lambda,\mu}(q)c_\mu\right)$$

où $K_{\lambda,\mu}$ sont des polynômes à coefficients entiers naturels. En particulier, les a_λ forment une base de $\mathcal{H}^+$.

Notons c'_λ la fonction caractéristique de l'orbite de ϖ^λ sous l'action de $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}'_\varpi)$ dans $S(F_\varpi) \cap \mathfrak{gl}(n, \mathcal{O}_\varpi)$. Ces fonctions c'_λ forment une base de $\mathcal{H}'^+$. On peut encore écrire

$$a'_\lambda = q^{-2\langle\lambda,\delta\rangle}(\varepsilon_\lambda c_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} K'_{\lambda,\mu}(q)c'_\mu)$$

où ε_λ est le signe définie dans la section précédente.

L'énoncé suivant se déduit du théorème 4A en utilisant la formule des traces de Grothendieck.

PROPOSITION 11.2.1. – *Pour tout $a \in A(F_\varpi)$, on a*

$$I(a, \alpha, a_\lambda) = (-1)^{\mathrm{val}_\varpi(a_1 \ldots a_{n-1})} J(a, \alpha, a'_\lambda).$$

En appliquant cet énoncé à

$$a = \mathrm{diag}\,(\varpi^d, \varpi^d, \ldots, \varpi^d),$$

on obtient, de manière sans doute très détournée, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 11.2.2. – *Lorsque* $\lambda = (d, d, \dots, d)$, *on a*

$$\varepsilon_\lambda = (-1)^{d(1+2+\dots+(n-1))}.$$

Lorsque $d = 1$, la représentation associée à $\lambda = (1, \dots, 1)$ est la représentation signe. On a bien

$$\mathrm{Sgn}(w_0) = (-1)^{(1+2+\dots+(n-1))}.$$

Lorsque $d = 2$, $n = 2$, on vérifie que $\mathrm{Tr}(w_0, V_\lambda) = 0$. Ainsi le corollaire 11.2.1 n'est pas strictement contenu dans la proposition 11.1.1.

PROPOSITION 11.2.3. – *Notons* $t : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}'^+$ *l'application linéaire définie par*

$$t(a_\lambda) = a'_\lambda.$$

On a alors $t \circ b = b'$.

Démonstration. – Soit λ une n-partition de d. Notons ρ la représentation induite

$$\rho = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{2d}} (\rho_\lambda \times \rho_\lambda)$$

On peut décomposer ρ en somme de représentations irréductibles

$$\rho = \bigoplus_{|\mu|=2d} \rho_\mu \otimes M_\mu$$

où les multiplicités M_μ sont des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie. On en déduit la décomposition

$$\tilde{\mathcal{A}}_\rho = \bigoplus_{|\mu|=2d} \tilde{\mathcal{A}}_\mu \otimes M_\mu.$$

L'endomorphisme de commutativité κ de $\tilde{\mathcal{A}}_\rho$ préserve les composantes isotypiques $\tilde{\mathcal{A}}_\mu \otimes M_\mu$ et est donc de la forme

$$\kappa = \bigoplus_{|\mu|=2d} \mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}} \otimes \kappa_\mu$$

où κ_μ est un endomorphisme de M_μ. On a alors

$$b_\lambda = \sum_{|\mu|=2d} \mathrm{Tr}(\kappa_\mu, M_\mu) A_\mu.$$

Du fait que $\tilde{\tau}_\rho = \bigoplus_{|\mu|=2d} \tilde{\tau}_\mu \otimes \mathrm{Id}_{M_\mu}$ on a

$$b'_\lambda = \sum_{|\mu|=2d} \mathrm{Tr}(\kappa_\mu, M_\mu) A'_\mu$$

d'où l'assertion.

11.3. L'intégrale orbitale relative associée à w_0

Identifions la permutation longue $w_0 \in \mathfrak{S}_n$ à la matrice de permutation correspondant dans $\mathrm{GL}(n)$. Pour un élément central

$$a = \mathrm{diag}\,(\varpi^d, \dots, \varpi^d),$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{H}^+$, à la suite de Jacquet et Ye, posons

$$I(w_0a,\phi) = \int_{(N(F_\varpi)\times N(F_\varpi))/(N(F_\varpi)\times N(F_\varpi))^{w_0 a}} \phi({}^{\mathrm{t}}xw_0ax')\theta(xx')\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'$$

et pour toute $\phi' \in \mathcal{H}'^+$, posons

$$J(w_0a,\phi') = \int_{N(F_{2,\varpi})/N(F_{2,\varpi})^{w_0 a}} \phi'({}^{\mathrm{t}}\bar{x}w_0ax)\theta'(x)\mathrm{d}x$$

où $(N(F_\varpi)\times N(F_\varpi))^{w_0 a}$ (resp. $N(F_{2,\varpi})^{w_0 a}$) est le stabilisateur de $N(F_\varpi)\times N(F_\varpi)$ (resp. $N(F_{2,\varpi})$) en $w_0 a$. Avec la normalisation habituelle attribuant la mesure 1 à $N(\mathcal{O}_\varpi)\times N(\mathcal{O}_\varpi)$ (resp. $N(\mathcal{O}_{2,\varpi})$), on a

$$\begin{aligned} I(w_0a,\phi) &= \sum_{\substack{x\in N(F_\varpi)/N(\mathcal{O}_\varpi)\\ w_0ax\in \mathrm{GL}(n,F_\varpi)^+}} \psi(w_0ax)\theta(x)\\ J(w_0a,\phi') &= \sum_{\substack{x\in N(F_\varpi)/N(\mathcal{O}_\varpi)\\ w_0ax\in S(F_\varpi)^+}} \phi'(w_0a)\theta'(x)\end{aligned}$$

PROPOSITION 11.3.1. – *Pour la matrice a comme ci-dessus, pour toute n-partition λ, on a*

$$I(w_0a,a_\lambda) = (-1)^{d(1+2+\ldots+(n-1))}J(w_0a,a'_\lambda).$$

Démonstration. – Choisissons un entier $r > dn$. Considérons le sous-schéma fermé $\dot{S}_{(d,\ldots,d),\varpi}$ de $\mathfrak{g}_{dn,r,\varpi}$ dont l'ensemble des k-points est celui des matrices de la forme $w_0x \in \mathfrak{g}_{d,r,\varpi}(k)$ avec

$$x = \begin{pmatrix} \varpi^d & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n}\\ 0 & \varpi^d & \cdots & x_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \varpi^d \end{pmatrix}$$

où $x_{i,j}\in \mathcal{O}_\varpi/\varpi^r\mathcal{O}_\varpi$. Soit $\dot{h} : \dot{S}_{(d,\ldots,d),\varpi} \to \mathbb{G}_a$ le morphisme défini par

$$\dot{h}(w_0x) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{res}_\varpi(\varpi^{-d}x_{i,i+1}).$$

Soit $S_{\lambda,\varpi}$ le schéma de type fini sur k défini en 5.1. Le morphisme $p : \dot{S}_{(d,\ldots,d),\varpi} \to S_{(d,\ldots,d),\varpi}$ défini par

$$p(w_0x) = x\mathcal{O}_\varpi^n$$

est lisse et à fibres géométriques isomorphes à l'espace affine de dimension fixe qu'on note d_r. La fonction $\dot{h}$ provient en fait d'une fonction sur $h : S_{(d,\ldots,d),\varpi} \to \mathbb{G}_a$.

Alors, en utilisant la formule des traces de Grothendieck, on a

$$\begin{aligned} I(w_0a,a_\lambda) &= q^{-d_r}\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr},\mathrm{R}\Gamma_c(\dot{S}_{(d,\ldots,d)}\otimes_k \bar{k},\tilde{\mathcal{A}}_\lambda\otimes h^*\mathcal{L}_\psi))\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr},\mathrm{R}\Gamma_c(S_{(d,\ldots,d)}\otimes_k \bar{k},\mathcal{A}_\lambda\otimes h^*\mathcal{L}_\psi))\end{aligned}$$

La transposition τ laisse stable $\dot{S}_{(d,\dots,d),\varpi}$ ainsi que la fonction h si bien qu'on a

$$J(w_0a, a'_\lambda) = q^{-d_r}\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr} \circ \tilde{\tau}_\lambda, \mathrm{R}\Gamma_c(\dot{S}_{(d,\dots,d)} \otimes_k \bar{k}, \tilde{\mathcal{A}}_\lambda \otimes h^*\mathcal{L}_\psi)).$$

Or, on a démontré dans [Ngo3] que pour $\lambda \neq (d,\dots,d)$, on a

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{(d,\dots,d)} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\lambda \otimes h^*\mathcal{L}_\psi)) = 0;$$

donc

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\dot{S}_{(d,\dots,d)} \otimes_k \bar{k}, \tilde{\mathcal{A}}_\lambda \otimes \dot{h}^*\mathcal{L}_\psi) = 0.$$

Dans ce cas, on a

$$I(w_0a, a_\lambda) = J(w_0a, a'_\lambda) = 0.$$

Si maintenant $\lambda = (d,\dots,d)$, on déduit du lemme 2.3 de [Ngo3] que le support de $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$ coupe $\dot{S}_\lambda$ en un espace affine $\dot{S}_0$ dont les k-points sont de la forme w_0x avec

$$x = \begin{pmatrix} \varpi^d & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ 0 & \varpi^d & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varpi^d \end{pmatrix}$$

où les $x_{i,j}\mathcal{O}_\varpi/\varpi^r\mathcal{O}_\varpi$ sont tous divisibles par ϖ^d. De plus, la restriction de $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$ à cet espace affine est, à décalage près, $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

Sur $\dot{S}_0$, on a un relèvement évident

$$\tilde{\tau} : \tau^*\bar{\mathbb{Q}}_\ell \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

dont la restriction à une fibre d'un point fixe de τ est l'identité. L'action de τ sur $\dot{S}_0$ étant homotope à l'identité, $\tilde{\tau}$ agit sur $\mathrm{R}\Gamma_c(\dot{S}_0 \otimes_k \bar{k}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ comme l'identité. Comme $\tilde{\tau}_\lambda = \varepsilon_\lambda\tilde{\tau}$ par définition de ε_λ, $\tilde{\tau}_\lambda$ agit sur ce complexe de cohomologie comme ε_λ.

Or, d'après le corollaire 11.2.1, on a

$$\varepsilon_\lambda = (-1)^{d(1+2+\cdots+(n-1))}$$

où

$$I(w_0a, a_\lambda) = (-1)^{d(1+2+\cdots+(n-1))}J(w_0a, a'_\lambda).$$

En combinant avec la proposition 11.2.3, on obtient le lemme fondamental de Jacquet et Ye pour l'élément w_0 du groupe de Weyl.

THÉORÈME 5. – *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_2^+$, on a*

$$I(w_0a, b(f)) = (-1)^{d(1+2+\ldots+(n-1))}J(w_0a, b'(f)).$$

Le lemme fondamental de Jacquet et Ye dans toute sa généralité concerne un élément w_M du groupe de Weyl qui est l'élément le plus long du groupe de Weyl d'un sous-groupe de Levi standard $M \supset A$ ([JY]). Nous l'avons donc démontré dans les deux cas extrêmes $w = 1$ et $w = w_0$. Nous espérons démontrer le cas général par une sorte de descente en combinant les idées de démonstration de ces deux cas.

Récemment, Jacquet a démontré que si pour tout $a \in A(F)$ on a l'égalité

$$I(a, f) = (-1)^{val_\varpi(a_1\cdots a_{n-1})}J(a, f')$$

alors on a aussi

$$I(wa, f) = \pm J(wa, f')$$

pour $w = w_M$ et pour a dans le centre de M. Sa démonstration est assujettie à l'hypothèse que la caractéristique de F est nulle et celle de k est supérieure à n. Cependant, l'énoncé précédent devrait être vrai sans ces hypothèses.

BIBLIOGRAPHIE

[BBD] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN et P. DELIGNE, *Faisceaux pervers, Astérisque* 100. Soc. Math. de France, 1982.

[B-M] W. BORHO and R. MACPHERSON, Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 292, 1981, 707–710.

[Del] P. DELIGNE, Application de la formule des traces aux sommes trigonomé triques. in *SGA 4 1/2* LNM 561, Springer 1997.

[Gin] V. GINZBURG, Pervers sheaves on a loop group and Langlands duality. *Preprint alg-geom*, 9511007, 1995.

[Gro] A. GROTHENDIECK, Cohomologie ℓ-adique et fonctions *L*. In *SGA 5*, volume 589 of *LNM*. Springer, 1977.

[J-Y_1] J. JACQUET et Y. YE, Une remarque sur le changement de base quadratique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, série I, 311, 1990, 671-676.

[J-Y] J. JACQUET et Y. YE, Relative Kloosterman integrals for GL(3). *Bull. Soc. Math. France*, 120, 1992, 263–295.

[Jou] J.-P. JOUANOLOU, Cohomologie de quelques schémas classiques et théorie cohomologique des classes de Chern. In *SGA 5*, volume 589 of *LNM*. Springer, 1977.

[Lau] G. LAUMON, Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions. *Duke Math. J.*, 54, 1987, 309–359.

[Lau1] G. LAUMON, Cohomology of Drinfeld modular varieties, part I. Cambridge University Press, 1996.

[Lus] G. LUSZTIG, Green polynomials and singularities of unipotent classes. *Adv. Math.*, 42, 1983, 208–227.

[Lus2] G. LUSZTIG, Singularities, characters formulas and a q-analog of weight multiplicities. *Astérisque*, vol. 101-102, 1983.

[Mac] I. MACDONALD, Symmetric Functions and Hall Polynomials. Clarendon Press, Oxford, 1979.

[M-V] I. MIRKOVIĆ and K. VILONEN, Perverse sheaves on loop Grassmannians and Langlands duality. *Preprint alg-geom*, 9703010, 1997.

[Ngo1] B. C. NGÔ, Lemme fondamental de Jacquet et Ye en caractéristique positive. *Duke Math. J.*, 96, 1999, 473–520.

[Ngo2] B. C. NGÔ, Lemme fondamental de Jacquet et Ye en caractéristique égales. *C. R. Acad. Sci. Paris*, série I, 325, 1997, 307-312.

[Ngo3] B. C. NGÔ, Preuve d'une conjecture de Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen. *Preprint alg-geom*, 9801109, 1998, à paraître dans *Israel J. of Math.*

[Sa] I. SATAKE., Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p- adic fields. *Publ. IHES*, 18, 1963, 1–69.

(Manuscrit reçu le 2 juillet 1998 ;
accepté le 24 novembre 1998.)

Báo Châu NGÔ
Département de mathématique,
Université de Paris-Nord,
av. J.-B. Clément,
93430 Villetaneuse, France
ngo@math.univ-paris13.fr