ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES COMTE

Équisingularité réelle : nombres de Lelong et images polaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 33, nº 6 (2000), p. 757-788

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_2000_4_33_6_757_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 33, 2000, p. 757 à 788.

ÉQUISINGULARITÉ RÉELLE : NOMBRES DE LELONG ET IMAGES POLAIRES

PAR GEORGES COMTE

RÉSUMÉ. – Nous mettons en évidence le rôle des équivalents réels des variétés polaires complexes de codimension 1 et celui de leurs images par les projections qui les définissent, dans l'obtention d'une condition d'équisingularité en géométrie sous-analytique, substitut de l'équimultiplicité : la continuité des nombres de Lelong. Il s'ensuit que ces nombres sont continus le long de strates de Verdier ; ce qui étend au cadre réel un théorème de Hironaka. La preuve repose sur une formule du type Cauchy–Crofton pour les nombres de Lelong des ensembles sous-analytiques. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – We explain how real analogues of codimension 1 complex polar varieties, and their images under the projections defining them, can be used to obtain an equisingularity condition in subanalytic geometry which is a real version of equimultiplicity: the continuity of the Lelong numbers. It follows that these numbers are continuous along Verdier strata; extending to the reals a theorem of Hironaka. The proof is based on a Cauchy–Crofton formula for the Lelong numbers of subanalytic sets. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

0. Introduction

Ce travail s'inscrit dans la perspective, *déplacée en réel*, de la théorie de l'équisingularité initiée par Zariski dans les années soixante [64,65,67] pour les ensembles analytiques complexes.

Pour une hypersurface analytique $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, Zariski propose dans [65] la définition suivante de l'équisingularité en y de $\mathcal{V}$ le long d'une variété analytique lisse $\mathcal{Y} \subset \mathcal{V}^{\text{sing}}$ $(y \in \mathcal{Y})$:

($\mathcal{E}$) *$\mathcal{V}$ est équisingulier le long de $\mathcal{Y}$ s'il existe une projection linéaire $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ transverse à $\mathcal{Y}$ en y telle que $\pi(\mathcal{C}_{\pi_{|\mathcal{V}}} \cup \mathcal{V}^{\text{sing}})$ soit équisingulier le long de $\pi(\mathcal{Y})$ en $\pi(y)$.*

Les notations sont les suivantes : $\mathcal{V}^{\text{rég}}$ désigne le lieu régulier de $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^{\text{sing}} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^{\text{rég}}$ le lieu singulier de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{C}_{\pi_{|\mathcal{V}}}$ le lieu critique de la restriction de π à $\mathcal{V}^{\text{rég}}$.

L'équisingularité est définie par induction sur la codimension de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{V}$; on fait décroître celle-ci par projection transverse, le lieu discriminant $\pi(\mathcal{C}_{\pi_{|\mathcal{V}}} \cup \mathcal{V}^{\text{sing}})$ étant une hypersurface de $\mathbb{C}^n$. Lorsque $\mathcal{Y}$ est de codimension 1, on dit que $\mathcal{V}$ est équisingulier en y le long de $\mathcal{Y}$ si $\mathcal{Y} = \mathcal{V}^{\text{sing}}$ et si le lieu polaire $\mathcal{C}_{\pi_{|\mathcal{V}}}$ est vide, au voisinage de y. Cette définition est motivée par le fait qu'en codimension 1 la théorie de l'équisingularité est complète ([64], (II)) : ($\mathcal{E}$) équivaut à la trivialité topologique, aux conditions de Whitney et implique l'équimultiplicité.

1991 Mathematics Subject Classification 32S15, 32S60, 28A75

Zariski lui-même, Thom, Whitney, Hironaka, Teissier, Lê Dũng Tráng, Henry et Merle entre autres ont développé la théorie définissant et comparant des conditions de régularité algébriques, numériques, topologiques et différentielles liées à l'équisingularité. Sans donner un panorama détaillé de ces trente années de recherche en théorie des singularités, on peut tout de même citer les résultats exemplaires suivants :

La condition $(\mathcal{E})$ implique la trivialité topologique [60,61] et l'équimultiplicité [66]. Si dans la définition de $(\mathcal{E})$ la projection π satisfait une condition générique supplémentaire Speder a prouvé [50] que $\mathcal{E}$ implique les conditions de Whitney. Pour les familles analytiques d'hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ à singularité isolée la constance du nombre de Milnor équivaut à la trivialité topologique, lorsque $n \neq 3$ ([31], [53]), les conditions de Whitney équivalent à la constance des nombres de Milnor des sections planes génériques successives ([53], [2]). Enfin en toutes dimensions ($\mathcal{V}$ n'est pas nécessairement une hypersurface), les conditions de Whitney impliquent l'équimultiplicité [24], la trivialité topologique ([58,37]) et équivalent à la condition de Verdier et à l'équimultiplicité des variétés polaires ([55], [21] et [23] pour la version relative).

Il nous importe ici de connaître ce qui subsiste en géométrie sous-analytique, ou plus généralement en géométrie modérée réelle (celle des catégories d'ensembles définissables dans une structure o-minimale sur le corps des réels, *cf.* [12] pour les définitions et propriétés de base ou [56] pour un point de vue plus dégagé) des résultats de Zariski et Hironaka évoqués ci-dessus concernant la multiplicité, qui est l'invariant le plus élémentaire du point de vue de la géométrie analytique complexe. Énonçons-les précisément :

THÉORÈME 0.1 ([24]). – *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{A}$ un ensemble analytique complexe non singulier et $y \in \mathcal{Y}$.*

(i) *Si au voisinage de y, $\mathcal{A}$ est normalement pseudo-plat au-dessus de $\mathcal{Y}$, la multiplicité de $\mathcal{A}$ est constante le long de $\mathcal{Y}$ au voisinage de y (l'équivalence a en réalité lieu,* cf. [55], *théorème* 5.5 ; [22], *théorème* 6.3 ; [36] ; [47]).

(ii) *Pour tout couple de strates $(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ d'une stratification de Whitney de $\mathcal{A}$, $\mathcal{Z}$ est normalement pseudo-plat au-dessus de $\mathcal{Y}$ et donc $\mathcal{A}$ est équimultiple le long de strates de Whitney.*

THÉORÈME 0.2 ([66,54]). – *Soit $\mathcal{V}$ une hypersurface de $\mathbb{C}^{n+1}$, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{V}^{\text{sing}}$ un ensemble analytique non singulier et $y \in \mathcal{Y}$.*

Il existe un ouvert de Zariski dense dans l'espace projectif des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour toute projection linéaire π de noyau dans cet ouvert, l'équimultiplicité de $\pi(\mathcal{C}_{\pi_{|\mathcal{V}}} \cup \mathcal{V}^{\text{sing}})$ le long de $\pi(\mathcal{Y})$ au voisinage de y implique l'équimultiplicité de $\mathcal{V}$ le long de $\mathcal{Y}$ au voisinage de y, et il existe un voisinage ouvert Ω de y dans $\mathbb{C}^{n+1}$, tel que :

$$(\Omega \cap \mathcal{V}) \cap \pi^{-1}(\pi(\mathcal{Y})) = \mathcal{Y}.$$

En particulier, si $\mathcal{V}$ est équisingulier en y le long de $\mathcal{Y}$, $\mathcal{V}$ est équimultiple le long de $\mathcal{Y}$ au voisinage de y.

Bien sûr dans le contexte sous-analytique les objets de nature purement algébrique de la catégorie analytique complexe n'ont plus cours. On peut cependant leur substituer des notions sous-analytiques : la multiplicité devient le nombre de Lelong, c'est-à-dire la densité locale ([11], [7] ou [5], corollaire 2.3), l'équimultiplicité devient la continuité du nombre de Lelong ou la pseudo-platitude normale.

Pour X un sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et Y un sous-analytique lisse de $\mathbb{R}^n$, on s'attache tout particulièrement à établir des conditions de régularité qui imposées le long de $\pi(Y)$ au lieu de branchement $\pi(\mathcal{C}_{\pi_{|X}} \cup X^{\text{sing}})$ des projections générales de X sur des plans de dimension k, assurent la continuité des nombres de Lelong de X sur Y (théorème 0.3). On amorce par là l'étude au premier cran d'une théorie de l'équisingularité réelle sur le modèle de ce qui est connu en complexe.

Nous montrons les théorèmes suivants.

THÉORÈME 0.3. – *Soient X un sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ et Y un sous-analytique lisse de $\mathbb{R}^n$. Si X est normalement pseudo-plat au-dessus de Y (resp. équisécable le long de Y) et si les lieux discriminants locaux généraux de X sont normalement pseudo-plats au-dessus des images de Y (resp. équisécables le long des images de Y), la densité de X est continue le long de Y.*

THÉORÈME 0.4. – *Soient X un sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ et Y une strate d'une stratification de Verdier (resp. une stratification (b^*)-régulière, une stratification de Whitney avec Y de dimension 1) de $\operatorname{adh}(X)$, la densité de X est continue le long de Y.*

Du fait de l'équivalence en complexe des conditions (b) de Whitney et (w) de Verdier (*cf.* [55, 21]), le théorème 0.4 étend au réel le théorème 0.1 (ii) de Hironaka.

Le théorème 0.3 est la version réelle du théorème 0.2 de Zariski (en codimension quelconque) ou du théorème 0.1 (i) de Hironaka ; car en réel la seule pseudo-platitude normale ne suffit pas à la continuité de la densité, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Un exemple. – Considérons l'ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z^8 y = 4x^3 - 3xz^6,\ z > 0\}.$$

La densité de X le long de $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = z = 0\}$ n'est pas continue en l'origine ; elle vaut $1/2$ sur $Y \setminus \{0\}$ et 1 en 0, mais le cône normal à Y dans X est le produit $Y \times \mathbb{R}_+$.

Néanmoins, pourvu que l'on considère des ensembles sous-analytiques de dimension maximale dans $\mathbb{R}^n$, la pseudo-platitude normale ou les conditions de Whitney d'une stratification impliquent la continuité de la densité du stratifié sur ses strates (proposition 2.6). Dans ce cas le seul discriminant de X est sa frontière, qui est bien normalement pseudo-plate le long de strates de Whitney.

C'est une formule de représentation intégrale du type Cauchy–Crofton pour la densité (théorèmes 1.10 et 1.16), énoncée sans preuve dans [5], qui en réduisant l'étude de la densité d'un sous-analytique de dimension k à celle d'ouverts de $\mathbb{R}^k$ (les profils polaires locaux), permet de se ramener à la géométrie des discriminants locaux, et d'obtenir le théorème 0.3.

Ce travail est donc divisé en trois parties : dans la première on établit la formule de Cauchy–Crofton pour la densité, dans la deuxième on donne des conditions suffisant à la continuité de la densité des sous-analytiques de codimension nulle et dans la troisième on traite le cas général en démontrant les théorèmes 0.3 et 0.4.

Remarque. – Le terme sous-analytique est à prendre dans son acception la plus large. Les preuves de cet article étant valables dans toute catégorie où les propriétés de finitude locale des ensembles sous-analytiques ont lieu, en particulier dans les catégories d'ensembles définissables dans une structure o-minimale sur le corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (exceptée la version lipschitzienne de 1.9).

1. Formule de Cauchy–Crofton pour la densité

La très classique formule de Federer pour la mesure intégrale-géométrique de Favard ou formule de Cauchy–Crofton ([13], 5.11 ou [14], théorème 2.10.15) assure que pour tout sous-ensemble borné X de $\mathbb{R}^n$, $(\mathcal{H}^k, k)$-rectifiable ($\mathcal{H}^k$ est la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle), le k-volume de X est donné par l'égalité :

$$\mathcal{H}^k(X) = \int_{V \in \mathbb{G}(k,n)} \int_{y \in V} N(\pi_V, X, y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^k(y)\, \frac{\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)}{\beta(k,n)},$$

où $\mathbb{G}(k,n)$ est la Grassmannienne des k-plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$, $\gamma_{k,n}$ sa mesure unitaire invariante sous l'action du groupe orthogonal, $N(\pi_V, X, y)$ est le cardinal de la fibre au-dessus de y de la restriction à X de la projection orthogonale π_V de $\mathbb{R}^n$ sur V et $\beta(k,n)$ est la constante $\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{n-k+1}{2})/\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})$, avec Γ la fonction d'Euler.

Si X est un ensemble sous-analytique borné ou plus généralement, si X est dans une catégorie où a lieu le théorème de Gabrielov [15] de finitude uniforme du nombre de composantes connexes des fibres des projections de X, pour V dans un ouvert sous-analytique dense de $\mathbb{G}(k,n)$, on peut décomposer $\pi_V(X)$ (à un sous-analytique négligeable près) en domaines $\mathrm{K}_1^V, \ldots, \mathrm{K}_{\mathrm{N}_V}^V$ au-dessus desquels $\pi_{V|X}$ est un revêtement à E_j^V feuillets.

Le symbole $\mathbf{1}_E$ désignant la fonction caractérisque de l'ensemble E, notons $s(V)$ la fonction (sous-analytiquement) constructible dont une présentation est $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_V} \mathrm{E}_j^V \mathbf{1}_{\mathrm{K}_j^V}$. Cette présentation n'est pas unique, mais par additivité du volume, le volume de $s(V)$ défini par $\mathcal{H}^k(s(V)) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}_V} \mathrm{E}_j^V \mathcal{H}^k(\mathrm{K}_j^V)$ est indépendant de la présentation de $s(V)$.

La formule de Cauchy–Crofton pour le volume s'écrit alors :

$$(\mathcal{CCV}) \qquad \mathcal{H}^k(X) = \int_{V \in \mathbb{G}(k,n)} \mathcal{H}^k\big(s(V)\big) \frac{\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)}{\beta(k,n)}.$$

Autrement dit, le volume de X est la moyenne des volumes pondérés des projetés de X.

Nous montrons dans cette première section que l'on peut localiser cette formule (à une constante multiplicative près), en échangeant volume et densité locale : la densité d'un (germe) sous-analytique est la moyenne des densités pondérées de ses projetés sur des k-plans généraux.

Rappelons qu'étant donné X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, μ_ℓ désignant le ℓ-volume de la boule unité $\mathrm{B}^\ell_{(x,1)}$ de $\mathbb{R}^\ell$, si le rapport $\mathcal{H}^\ell(X \cap \mathrm{B}^n_{(x,r)})/\mu_\ell r^\ell$ admet une limite quand r tend vers 0, on dit que X possède la propriété de ℓ-densité en x, et on note cette limite $\Theta_\ell(X,x)$; il s'agit de la densité ou nombre de Lelong de X en x (*cf.* [1,48] pour les origines).

C'est Lelong qui le premier a remarqué qu'un ensemble analytique complexe fermé $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^n$ de dimension (complexe) k admet la propriété de $2k$-densité en chacun de ses points [30], Thie a ensuite montré que $\Theta_{2k}(\mathcal{A},x)$ est un entier [57] et Draper a prouvé dans [11] que $\Theta_{2k}(\mathcal{A},x)$ est la multiplicité $e(\mathcal{A},x)$ de $\mathcal{A}$ en x, généralisant en toutes dimensions le résultat de Stoll pour les hypersurfaces [51].

Un théorème dû à Kurdyka et Raby [29] étend la propriété de k-densité aux ensembles sous-analytiques de dimension k et une conséquence du théorème de préparation des fonctions sous-analytiques ([44] et [34]) est le caractère Log-analytique de la fonction densité d'un sous-analytique global ([35] et [6]). Précisément, si X est un sous-analytique global, il existe un polynôme P et des fonctions sous-analytiques globales $A_1, \ldots, A_r$ tels que $\Theta_k(X,x) = P(A_1, \ldots, A_r, \operatorname{Log} A_1, \ldots, \operatorname{Log} A_r)(x)$.

Notons X_0 le germe à l'origine de l'ensemble sous-analytique X de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Pour V dans un ouvert sous-analytique dense de $\mathbb{G}(k,n)$, le projeté $\pi_V(X_0)$ définit bien un germe de V (proposition 1.6) que l'on peut décomposer (à un germe de sous-analytique de dimension $< k$ près) en domaines $\mathcal{K}_1^V, \ldots, \mathcal{K}_{n_V}^V$ (les profils polaires locaux de X associés à V) au-dessus desquels $\pi_{V|X}$ est un revêtement de degré e_j^V (la multiplicité du profil polaire local $\mathcal{K}_j^V$) (définition 1.8).

Notons $\sigma(V)$ le germe de la fonction (sous-analytiquement) constructible dont une présentation est $\sum_{j=1}^{n_V} e_j^V \mathbf{1}_{\mathcal{K}_j^V}$. Par additivité de la densité, la densité de $\sigma(V)$ en 0 peut être définie par l'égalité : $\Theta_k(\sigma(V),0) = \sum_{j=1}^{n_V} e_j^V \Theta_k(\mathcal{K}_j^V, 0)$.

Nous allons montrer la version locale de ($\mathcal{CCV}$) ou formule de Cauchy–Crofton pour la densité (théorème 1.10) :

$$(\mathcal{CCD}) \qquad \Theta_k(X,0) = \int_{V\in\mathbb{G}(k,n)} \Theta_k\big(\sigma(V),0\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

Remarquons que la mesure qui intervient dans ($\mathcal{CCD}$) est la mesure unitaire $\gamma_{k,n}$ et non $\gamma_{k,n}/\beta(k,n)$ comme dans la formule ($\mathcal{CCV}$).

En réalité on obtient un résultat un peu plus général. Soit G un sous-groupe du groupe orthogonal qui agit transitivement sur un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathbb{G}(k,n)$, $\mu_{k,n}$ une mesure unitaire sur $\mathcal{G}$, G-invariante et telle que $\mu_{k,n}(\mathcal{G}\cap\mathcal{E}_X)=1$. Si les espaces tangents à $\mathcal{C}_0X$ sont dans $\mathcal{G}$ et s'il existe $V\in\mathcal{G}$ tel que le fixateur de V agissent transitivement sur le k-espace V, pour calculer la densité de X en 0, il suffit d'intégrer la densité de σ sur $\mathcal{G}$ relativement à $\mu_{k,n}$ (théorème 1.16). En particulier, lorsque X est un ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^n$, la version complexe de ($\mathcal{CCD}$) n'est rien d'autre que le théorème de Draper (corollaire 1.17).

Nous noterons $X^{\text{rég}}$ la partie régulière de X de dimension k, c'est-à-dire l'ensemble des points de X au voisinage desquels X est une sous-variété de classe au moins $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ et de dimension $k=\dim(X)$, $\mathrm{fr}(X)=\mathrm{adh}(X)\smallsetminus X^{\text{rég}}$, X_x le germe de X au point x, $\mathcal{C}_xX$ le cône tangent de X en x ($\mathcal{C}_xX=\{v\in\mathbb{R}^n\,;\,\forall\varepsilon>0,\,\exists\,z\in X,\,\exists\,\lambda>0$ tels que $|x-z|<\varepsilon$ et $|v-\lambda(z-x)|<\varepsilon\}$) et π_V la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur le k-plan vectoriel V.

DÉFINITION 1.1. – Soit X un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

(i) Le lieu critique $\{x\in X^{\text{rég}}\,;\,\mathrm{T}_xX^{\text{rég}}\cap V^{\perp}\neq\{0\}\}$ de la restriction de π_V à $X^{\text{rég}}$ sera noté $\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}$ et appelé *lieu polaire de X associé à V*.

(ii) Le sous-analytique $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}})$ sera appelé l'*image polaire de X associée à V*.

(iii) Le sous-analytique $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}\cup\mathrm{fr}(X))$ sera appelé *lieu discriminant de X associé à V*.

Remarque. – Étant donné un sous-espace vectoriel général D_{k-s+1} de $\mathbb{C}^N$ de codimension (complexe) $k-s+1$ ($0\leqslant s\leqslant k$) et $p:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}^{k-s+1}$ une projection linéaire de noyau D_{k-s+1}, la variété polaire $P_s\langle p\rangle$ d'un espace analytique complexe réduit $\mathcal{A}\subset\mathbb{C}^N$, de dimension pure k, associée à p est définie par Lê et Teissier dans [32] comme l'adhérence dans $\mathcal{A}$ du lieu critique de la restriction de p à $\mathcal{A}^{\text{rég}}$. Lorsque D_{k-s+1} est général, il résulte du théorème de Kleiman [26] que $P_s\langle p\rangle$ est un sous-espace analytique fermé de $\mathcal{A}$, de codimension pure s, ou vide ([55] Chap. IV, définition 1.4).

Pour établir la formule de Cauchy–Crofton pour la densité du germe X_0, seul l'équivalent sous-analytique de $P_1\langle p\rangle$ sera envisagé. On parlera ainsi toujours par la suite du lieu polaire, de l'image polaire (définition 1.1), du lieu polaire local ou de l'image polaire locale (définition 1.8) associés à des projections de X sur des plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de même dimension que X.

Le lemme suivant fait apparaître le lieu discriminant de X associé à V comme un discriminant des valeurs de la fonction $N(\pi_V,X,\cdot):V\ni y\mapsto\mathrm{card}(X\cap\pi^{-1}(\{y\})$.

LEMME 1.2. – *Supposons X borné.*

(i) *Le lieu polaire $\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}$ est un sous-analytique fermé de $X^{\text{rég}}$ et $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}})\subset V$ est un sous-analytique de dimension $<k$ de $\pi_V(X^{\text{rég}})$.*

(ii) *En dehors du sous-analytique $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}})$ la fonction $N(\pi_V,X^{\text{rég}},\cdot)$ est uniformément bornée. De plus, $\pi_V(X)\smallsetminus\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}\cup\mathrm{fr}(X))$ est un sous-analytique ouvert de V sur les composantes connexes duquel la fonction $N(\pi_V,X,\cdot)$ est constante.*

Preuve. – (i) résulte de la sous-analyticité de l'application tangente [9] et du théorème de Sard. Le point (ii) résulte de la propriété de finitude uniforme du nombre de composantes connexes des fibres des projections de X ([15], [8]). □

Le lemme 1.2 permet de compléter la définition 1.1 :

DÉFINITION 1.3. – Supposons X borné.

(i) Les composantes connexes de l'ouvert $\pi_V(X) \setminus \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}} \cup \mathrm{fr}(X))$ sont des ouverts sous-analytiques de V notés $\mathrm{K}_1^V, \ldots, \mathrm{K}_{\mathrm{N}_V}^V$ (ou $(\mathrm{K}_j^{X,V})_{j\in\{1,\ldots,\mathrm{N}_V\}}$ s'il y a ambiguïté) et seront appelés les *profils polaires de X associés à V*.

(ii) La valeur de la fonction $N(\pi_V, X, \cdot)$ sur le profil polaire K_j^V sera notée E_j^V (ou $\mathrm{E}_j^{X,V}$ s'il y a ambiguïté) et appelée *multiplicité du profil polaire* K_j^V.

Montrons maintenant le lemme suivant, qui est bien connu :

LEMME 1.4. – *Soit $\mathcal{C}$ un cône sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension $s \leqslant n-1$; c'est-à-dire que $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}_+ \cdot \delta\}$, où δ parcourt C un ensemble sous-analytique de S^{n-1} de dimension $s-1$.*

(i) *Il existe pour tout entier $q \geqslant s$, un sous-analytique $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}^q$ dense dans $\mathbb{G}(q,n)$, tel que pour tout $V \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^q$ on ait $V^\perp \cap \mathcal{C} = \{0\}$.*

(ii) *Si $q \leqslant s-1$, alors $V^\perp \cap \mathcal{C} \neq \{0\}$, pour V dans un sous-analytique d'intérieur non vide de $\mathbb{G}(q,n)$.*

Notation. – On supposera dans la suite que $0 \in X$ et on notera $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_0 X}^k$ (qui est aussi $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_0\,\mathrm{adh}(X)}^k$) par $\mathcal{E}_X$, ce qui est licite puisque $\dim(\mathcal{C}_0 X) \leqslant k$.

Preuve. – La preuve de (i) peut se faire par récurrence descendante sur q. Pour $q = n-1$, il suffit de remarquer que C est $\mathcal{H}^{(n-1)}$-négligeable dans S^{n-1} et que $\mathbb{G}(q,n) = \mathbb{G}(n-q,n) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel.

Supposons le lemme démontré pour tout q', $s \leqslant q < q' \leqslant n-1$ et montrons qu'il est alors vrai pour q, en raisonnant par l'absurde. Si le sous-analytique $\mathcal{F} = \{V \in \mathbb{G}(q,n)\,;\, V^\perp \cap \mathcal{C} \neq \{0\}\}$ n'est pas $\gamma_{q,n}$-négligeable, il est d'intérieur non vide. Soit V_0 un point intérieur de $\mathcal{F}$ et $Z = \{0\}^{n-q-1} \times \mathbb{R}^{q+1}$ tels que $V_0 \subset Z$ et $Z^\perp \cap \mathcal{C} = \{0\}$ (un tel V_0 et un tel Z existent par hypothèse de récurrence). Les $(n-q)$-plans de $\mathbb{G}(n-q,n)$ contenant $Z^\perp$ sont paramétrés par $\mathrm{S}^{n-(n-q-1)-1} = \mathrm{S}^q$ et deux tels $(n-q)$-plans distincts n'ont que $Z^\perp$ en commun. Or il existe un voisinage de $V_0^\perp$ dans $\mathbb{G}(n-q,n)$ pour lequel tous les $(n-q)$-plans dans ce voisinage coupent C : on en déduit que C contient un sous-analytique de dimension q ($q \geqslant s$), ce qui contredit $\dim(C) \leqslant s-1$.

Pour prouver (ii), on peut utiliser une formule de Cauchy–Crofton sphérique (*voir* [46]) ; comme $\dim(V^\perp \cap \mathrm{S}^{n-1}) + \dim(C) \geqslant n-1$, si $\{V \in \mathbb{G}(q,n)\,;\, V^\perp \cap \mathcal{C} \neq \{0\}\}$ était négligeable, le volume de $\mathcal{C}$ serait nul. $\square$

COROLLAIRE 1.5. – *Il existe un ouvert sous-analytique dense de $\mathbb{G}(k,n)$ ($\mathcal{E}_X$ convient) tel que, pour tout V dans cet ouvert, on ait l'existence d'un réel $r_V > 0$ tel que,* $\mathrm{adh}(X \cap \mathrm{B}_{(0,r_V)}) \cap \pi_V^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

LEMME 1.6. – *Avec la notation du lemme* 1.4, *soient $V \in \mathcal{E}_X$ et le réel r_V que lui associe le corollaire* 1.5.

Quels que soient alors $Z \subset \mathrm{adh}(X)$ et les réels r_0 et r_1 vérifiant $0 < r_0 < r_1 < r_{\mathcal{V}}$, il existe $s > 0$ tel que :

(i) $\mathrm{B}_{(0,s)} \cap \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,r_0)}) = \mathrm{B}_{(0,s)} \cap \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,r_1)})$,

(ii) $\mathrm{B}_{(0,s)} \cap \pi_V(\mathrm{fr}(Z \cap \mathrm{B}_{(0,r_0)})) = \mathrm{B}_{(0,s)} \cap \pi_V(\mathrm{fr}(Z \cap \mathrm{B}_{(0,r_1)}))$.

Preuve. – Pour montrer (i) on suppose qu'existent r_0 et r_1 avec $r_0 < r_1 < r_V$ et une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(Z \cap \mathrm{B}_{(0,r_1)}) \setminus \mathrm{B}_{(0,r_0)}$, telle que $\pi_V(z_n)$ tende vers 0. Considérons (quitte à extraire une sous-suite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$), $z = \lim_{n\to\infty} z_n \in \mathrm{adh}(\mathcal{Z} \cap \mathrm{B}_{(0,r_V)})$. Comme $\pi_V(z) = 0$, on a $z \in V^\perp \cap \mathrm{adh}(Z \cap \mathrm{B}_{(0,r_V)})$, et comme $z \notin \mathrm{B}_{(0,r_0)}$, on a de plus $z \neq 0$. Mais par définition même de r_V, il s'agit d'une contradiction. On procède de même pour montrer (ii). $\square$

Le lemme 1.6 permet de montrer la proposition 1.7 qui fonde la définition 1.8 des profils polaires locaux et de leur multiplicité.

PROPOSITION 1.7. – *Avec les notations du lemme* 1.4 *et du corollaire* 1.5, *soit pour* $V \in \mathcal{E}_X$, *le réel* r_V.

(i) *Le germe* $\pi_V(X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}) \smallsetminus \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X\cap \mathrm{B}_{(0,r)}}} \cup \mathrm{fr}(X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}))$ *ne dépend pas de* r, *dès que* $0 < r < r_V$.

(ii) *Les composantes connexes de* $\pi_V(X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}) \smallsetminus \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X\cap \mathrm{B}_{(0,r)}}} \cup \mathrm{fr}(\Gamma \cap \mathrm{B}_{(0,r)}))$ *adhérentes à* 0 *sont notées* $\mathrm{K}_1^{r,V}, \ldots, \mathrm{K}_{n_V}^{r,V}$. *Ce sont des ouverts de* V *dont les germes à l'origine, notés* $\mathcal{K}_j^V$, $j \in \{1, \ldots, n_V\}$ *ne dépendent pas de* r *pourvu que* $0 < r < r_V$. *La fonction* $z \longmapsto N(\pi_V, X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}, z)$ *est constante sur chaque* $\mathrm{K}_j^{r,V}$, $j \in \{1, \ldots, n_V\}$ *et vaut l'entier* $e_j^V = \mathrm{E}_j^{X\cap \mathrm{B}_{(0,r)},V} \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, n_V\}$; *cette valeur ne dépend pas du rayon* r, *pourvu que* $r < r_V$.

Preuve. – Montrons (i). Ce point résulte ad litteram du lemme 1.6, avec successivement $Z = X$ dans 1.6 (i) et 1.6 (ii), et $Z = \mathcal{C}_{\pi_{V|X}}$ dans 1.6 (i).

Montrons (ii). Le lemme 1.2 assure que pour tout $r > 0$, et pour tout $j \in \{1, ..., n_V\}$, la composante $\mathrm{K}_j^{r,V}$ est un ouvert sous-analytique de V sur lequel la fonction $z \mapsto N(\pi_V, X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}, z)$ prend la seule valeur $\mathrm{E}_j^{X\cap \mathrm{B}_{(0,r)},V}$. Montrons que celle-ci ne dépend pas de r lorsque $0 < r < r_V$. Soient r_0, r_1 avec $0 < r_0 < r_1 < r_V$, $s > 0$ et $\ell \in \{1, \ldots, n_V\}$ tels que :

$$\mathrm{B}_{(0,s)} \cap \mathrm{K}_\ell^{r_0,V} = \mathrm{B}_{(0,s)} \cap \mathrm{K}_\ell^{r_1,V},$$
$$N\big(\pi_V, X \cap \mathrm{B}_{(0,r_0)}, z\big) = \mathrm{E}_\ell^{X\cap \mathrm{B}_{(0,r_0)},V} \neq \mathrm{E}_\ell^{X\cap \mathrm{B}_{(0,r_1)},V} = N\big(\pi_V, X \cap \mathrm{B}_{(0,r_1)}, z\big),$$

pour tout $z \in \mathrm{B}_{(0,s)} \cap \mathrm{K}_\ell^{r_0,V} = \mathrm{B}_{(0,s)} \cap \mathrm{K}_\ell^{r_1,V}$. Comme $0 \in \mathrm{adh}(\mathrm{B}_{(0,s)} \cap \mathrm{K}_\ell^{r_0,V}) = \mathrm{adh}(\mathrm{B}_{(0,s)} \cap \mathrm{K}_\ell^{r_1,V})$, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X \cap (\mathrm{B}_{(0,r_1)} \smallsetminus \mathrm{B}_{(0,r_0)})$ telle que $\pi_V(z_n)$ converge vers l'origine. Si $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, on obtient $z \in V^\perp \cap \mathrm{adh}(X \cap \mathrm{B}_{(0,r_V)})$. Mais puisque $z \notin \mathrm{B}_{(0,r_0)}$, on a $z \neq 0$. Par définition de r_V il s'agit d'une contradiction. □

DÉFINITION 1.8. – Il existe un sous-analytique $\mathcal{T}_{X_0}$ dense dans $\mathbb{G}(k,n)$, tel que pour tout $V \in \mathcal{T}_{X_0}$:

(i) Le germe (à l'origine) $\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}$ est un germe sous-analytique de dimension $< k$. Il est appelé *lieu polaire local de* X *associé à* V.

(ii) Pour tout représentant suffisamment petit X de X_0, $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}})$ et $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}} \cup \mathrm{fr}(X))$ définissent bien un germe sous-analytique de dimension $\leqslant k-1$ dans V. On les note respectivement $(\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}))_0$ et $\Delta_0(X, V)$. Ils sont respectivement appelés l'*image polaire locale* et *le lieu discriminant local* (*à l'origine*) *de* X_0 *associés à* V.

(iii) Le germe $\big(\pi_V(X) \smallsetminus \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}} \cup \mathrm{fr}(X))\big)_0$ est bien défini (par un représentant quelconque X de X_0 suffisamment petit). Il s'agit du germe d'un ouvert sous-analytique de V. Les germes de ses composantes connexes sont notées $\mathcal{K}_1^V, \ldots, \mathcal{K}_{n_V}^V$ (ou $\mathcal{K}_1^{X_0,V}, \ldots, \mathcal{K}_{n_0,V}^{X_0,V}$ s'il y a ambiguïté) et sont appelés les *profils polaires locaux* (*à l'origine*) *de* X_0 *associés à* V.

(iv) À chaque profil polaire local $\mathcal{K}_j^V$, $j \in \{1, \ldots, n_V\}$, on assigne un entier e_j^V (ou $e_j^{X_0,V}$, $j \in \{1, \ldots, n_{x,V}\}$) appelé la *multiplicité du profil polaire local* $\mathcal{K}_j^V$. Cet entier est la valeur constante au voisinage de l'origine de la fonction $z \mapsto N(\pi_V, X, z)$ sur tout représentant de $\mathcal{K}_j^V$ défini par tout représentant suffisamment petit X de X_0.

Justification. – Pour les trois derniers points, on peut poser $\mathcal{T}_{X_0} = \mathcal{E}_X$, où X est un représentant (borné) quelconque de X_0. Il reste à prouver que les lieux polaires généraux de X sont de dimension $\leqslant k-1$. Pour cela on montre que le sous-analytique $\mathcal{Q} = \{V \in \mathbb{G}(k,n);\ \dim(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}) = k\}$ est inclus dans un sous-analytique de $\mathbb{G}(k,n)$ d'intérieur vide. Considérons la fonction :

$$A : X^{\text{rég}} \times \mathbb{G}(k,n) \longrightarrow [0,\sqrt{2}],$$
$$(x,V) \longmapsto A(x,V) = \alpha(\mathrm{T}_x X^{\text{rég}}, V^{\perp}),$$

où $\alpha(E,F) = \inf\{|\delta-\nu|;\ \|\delta\| = \|\nu\| = 1,\ \delta \in E,\ \nu \in F\}$ est l'angle entre deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. La fonction A est sous-analytique, puisque l'application tangente l'est [10].

Les composantes connexes de $X^{\text{rég}}$ sont en nombre fini ; on peut donc considérer que $X^{\text{rég}}$ est connexe. L'ensemble des points de $X^{\text{rég}}$ au voisinage desquels $X^{\text{rég}}$ est une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^n$ (de classe $\mathcal{C}^{\omega}$) étant un sous-analytique dense dans $X^{\text{rég}}$ ([28], [52]), on peut également supposer que $X^{\text{rég}}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^{\omega}$.

Si $\mathcal{Q} \neq \emptyset$, fixons $V \in \mathcal{Q}$. L'application $X^{\text{rég}} \ni x \mapsto A(x,V)$ étant une fonction analytique qui s'annule sur $\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}$, si cet ensemble possède des points intérieurs, nécessairement $X^{\text{rég}} \ni x \mapsto A(x,V)$ s'annule sur $X^{\text{rég}}$ tout entier. Soit alors x quelconque dans $X^{\text{rég}}$. Pour tout $V \in \mathcal{Q}$, ce qui précède montre que $\mathrm{T}_x X^{\text{rég}} \cap V^{\perp} \neq \{0\}$ et le lemme 1.4 appliqué au cône $\mathrm{T}_x X^{\text{rég}}$ permet alors d'affirmer que $\mathcal{Q}$ est $\gamma_{k,n}$-négligeable dans $\mathbb{G}(k,n)$. $\square$

La proposition qui suit concerne la variation du type topologique des lieux discriminants locaux, des profils polaires locaux de X_0 et de leur multiplicité, selon le k-plan V auquel ils sont associés. Tous deux ne changent qu'un nombre fini de fois et sont constants pour V dans une même composante connexe d'un ouvert sous-analytique dense de $\mathbb{G}(k,n)$.

Il s'agit d'une conséquence de l'existence des stratifications des morphismes sous-analytiques propres et du premier lemme d'isotopie de Thom–Mather.

PROPOSITION 1.9. – *Il existe un ouvert sous-analytique $\Omega_X \subset \mathcal{E}_X$, dense dans $\mathcal{E}_X$ (et donc dans $\mathbb{G}(k,n)$), tel que le type topologique (resp. lipschitzien) des lieux discriminants locaux, des profils polaires locaux de X_0 associés à V et la suite des multiplicités attachées à ces profils soient constants, lorsque V parcourt une même composante connexe de Ω_X.*

Précisément, en notant $\Omega_X^1, \ldots, \Omega_X^p$ les composantes connexes de Ω_X, quel que soit $i \in \{1,\ldots,p\}$ et quels que soient V et V' dans Ω_X^i, $n_V = n_{V'}$, $(e_1^V,\ldots,e_{n_V}^V) = (e_1^{V'},\ldots,e_{n_{V'}}^{V'})$ et pour tout $j \in \{1,\ldots,n_V\}$, il existe un germe d'homéomorphisme (resp. bilipschitzien) de quadruplets, $h_j : (V, \Delta_0(X,V), \mathcal{K}_j^V, 0) \mapsto (V', \Delta_0(X,V'), \mathcal{K}_j^{V'}, 0)$ (quitte à changer les indices).

De plus, la famille $(e_j^V)_{j\in\{1,\ldots,n_V\},\, V\in\mathcal{E}_X}$ est uniformément bornée et les types topologiques (resp. bilipschitziens) des lieux discriminants locaux et des profils polaires locaux de X_0 sont en nombre fini.

Preuve. – Soit une fonction sous-analytique $\mathbb{G}(k,n) \ni V \mapsto R(V) \in [0,1]$, positive sur $\mathcal{E}_X$ et nulle sur $\mathbb{G}(k,n) \setminus \mathcal{E}_X$, telle que pour tout $V \in \mathcal{E}_X$ et pour V' dans un voisinage convenablement choisi de V, on ait :

$$\mathrm{adh}(X \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))}) \cap \pi_{V'}^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

En particulier, d'après la proposition 1.7, les $\mathrm{K}_j^{R(V),V'}$ (resp. leur frontière) sont des représentants des profils polaires locaux (resp. des lieux discriminants locaux) de X_0, quel que soit V' dans ce voisinage de V.

Notons $\mathrm{B}_{(0,1)}^k$ la boule unité de $\mathbb{R}^k$ centrée à l'origine et considérons les sous-analytiques suivants de $\mathbb{G}(k,n) \times \mathrm{adh}(\mathrm{B}_{(0,1)}^k) \subset \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{R}^k$, où quel que soit $V \in \mathcal{E}_X$, V est identifié à $\mathbb{R}^k$:

$$E=\{(V,0);\ V\in\mathbb{G}(k,n)\},$$
$$F=\left\{(V,x);\ V\in\mathcal{E}_X,\ x\in\bigcup_{j=1}^{n_V}\mathrm{K}_j^{R(V),V}\right\},$$
$$G=\left\{(V,x);\ V\in\mathcal{E}_X,\ x\in\mathrm{fr}\left(\bigcup_{j=1}^{n_V}\mathrm{K}_j^{R(V),V}\right)\right\},$$
$$H=\left\{(V,x);\ V\in\mathcal{E}_X,\ x\in\mathrm{adh}\big(\mathrm{B}^k_{(0,1)}\big)\smallsetminus\mathrm{adh}\left(\bigcup_{j=1}^{n_V}\mathrm{K}_j^{R(V),V}\right)\right\},$$

et soit $p_|: E\cup F\cup G\cup H\to\mathbb{G}(k,n)$, la restriction à $E\cup F\cup G\cup H$ de la projection naturelle de $\mathbb{G}(k,n)\times\mathbb{R}^k$ sur $\mathbb{G}(k,n)$, il s'agit d'un morphisme sous-analytique propre.

Stratifions le morphisme $p_|$ ([58], théorème 3.C.1, [17], [18], [25], ou [16], 1.7) : il existe une stratification sous-analytique Σ de $E\cup F\cup G\cup H$, une stratification sous-analytique Σ' de $\mathbb{G}(k,n)$, compatibles respectivement avec les familles sous-analytiques $\{E,F,G,H\}$ et $\{\mathcal{E}_X,\mathbb{G}(k,n)\smallsetminus\mathcal{E}_X\}$, telles que la préimage par $p_|$ de toute strate σ' de Σ' soit réunion de strates de Σ, et la restriction de $p_|$ aux strates de $p_|^{-1}(\sigma')$ soit une submersion au-dessus de σ'.

Le premier lemme d'isotopie de Thom–Mather ([58], théorème 1.G.1, [37], proposition 3.11, ou [19] pour une version semi-algérique) montre dans ces conditions que $p_|$ est topologiquement localement triviale au-dessus de chaque strate σ' de Σ', de façon compatible avec Σ.

Comme $\mathbb{G}(k,n)$ est compact, Σ' est finie. Notons $\Omega_X^1,\dots,\Omega_X^q$ les strates (connexes) de Σ' contenues dans $\mathcal{E}_X$, $\Omega_X^1,\dots,\Omega_X^p$, $p\leqslant q$ celles de dimension maximale et $\Omega_X=\bigcup_{i=1}^p\Omega_X^i$ leur réunion. Ω_X est un ouvert sous-analytique dense de $\mathcal{E}_X$. Au-dessus des strates Ω_X^i, $i\in\{1,\dots,q\}$, deux fibres quelconques $p_|^{-1}(V)$ et $p_|^{-1}(V')$ sont homéomorphes par un homéomorphisme h $(=h_i^{V,V'})$ respectant les fibres de $p_|$ dans E, F, G et H. En particulier, le nombre de composantes connexes de la fibre $p_|^{-1}(V)$ dans F est celui de la fibre $p_|^{-1}(V')$ dans F, c'est-à-dire que $n_V=n_{V'}$. L'homéomorphisme h, qui respecte les composantes connexes de $\bigcup_{j=1}^{n_V}\mathrm{K}_j^{R(V),V}$, et de $\bigcup_{j=1}^{n_V}\mathrm{K}_j^{R(V'),V'}$ induit un germe d'homéomorphisme de quadruplets

$$h_j:\big(V,\Delta_0(X,V),\mathcal{K}_j^V,0\big)\longrightarrow\big(V',\Delta_0(X,V'),\mathcal{K}_j^{V'},0\big),$$

pour tout $j\in\{1,\dots,n_V\}$ (quitte à changer les indices) ; les types topologiques des profils polaires et des lieux discriminants locaux de X_0 sont donc en nombre fini et constants au-dessus des composantes connexes de l'ouvert sous-analytique Ω_X dense dans $\mathcal{E}_X$.

La version lipschitzienne de l'énoncé est obtenue grâce au théorème 1.6 (i) de [44], qui est le contrepoint lipschitzien des théorèmes de stratification des morphismes sous-analytiques et du premier lemme d'isotopie de Thom–Mather, le raisonnement est identique.

Montrons pour terminer que si V et V' sont dans une même strate Ω_X^i, $i\in\{1,\dots,q\}$, les suites $(e_1^V,\dots,e_{n_V}^V)$ et $(e_1^{V'},\dots,e_{n_{V'}=n_V}^{V'})$ sont égales.

Soient $i\in\{1,\dots,q\}$, $V\in\Omega_X^i$ et $\mathcal{U}_V$ un voisinage ouvert de V dans Ω_X^i tel que quel que soit $V'\in\mathcal{U}_V$, les $\mathrm{K}_j^{R(V),V'}$ soient des représentants des profils polaires locaux de X_0 associés à V'. Soit $j\in\{1,\dots,n_V\}$. Pour tout $z\in\mathrm{K}_j^{R(V),V}$ il existe un voisinage ouvert connexe $\mathcal{Z}$ de z dans $\mathrm{K}_j^{R(V),V}$ et un voisinage ouvert $\mathcal{U}'_V$ de V dans $\mathcal{U}_V$ tels que pour tout $V'\in\mathcal{U}'_V$, on ait : $\mathcal{Z}\cap\mathrm{fr}\big(\bigcup_{j\in\{1,\dots,n_V\}}\mathrm{K}_j^{R(V),V'}\big)=\emptyset$.

Si de tels voisinages $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{U}'_V$ n'existaient pas, on pourrait construire une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{K}_j^{R(V),V}$ de limite z et une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{U}_V$ de limite V telles que z_n appartienne à

$\pi_{V_n}(\mathrm{fr}(X \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))}) \cup \mathcal{C}_{\pi_{V_n|X\cap \mathrm{B}_{(0,R(V))}}})$, et donc il existerait une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $X \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))}$ telle que $w_n \in \mathrm{fr}(X \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))})$ ou $A(w_n, V_n) = 0$ ($A(\cdot,\cdot)$ étant la fonction angulaire introduite dans la justification de la définition 1.8). On en conclurait à l'existence de $w \in \mathrm{fr}(X \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))}) \cup \mathcal{C}_{\pi_{V|X\cap \mathrm{B}_{(0,R(V))}}}$ et $w \in \pi_V^{-1}(\{z\})$, ce qui contredirait l'appartenance de z à $\mathrm{K}_j^{R(V),V}$.

Remarquons que si $V' \in \mathcal{U}'_V$, puisque $\mathcal{Z}$ est connexe et $\mathcal{Z} \cap \mathrm{fr}(\bigcup_{j=1}^{n_V} \mathrm{K}_j^{R(V),V'})$ est vide, il existe un entier dans $\{1,\dots,n_{V'} = n_V\}$, qu'il est commode de noter encore j, tel que $\mathcal{Z} \subset \mathrm{K}_j^{R(V),V'}$.

Le cardinal de $(z + V^\perp) \cap (X \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))})$ est e_j^V (proposition 1.7), notons $\{z_1,\dots,z_{e_j^V}\}$ la fibre de la restriction de π_V à $X^{\text{rég}} \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))}$ au-dessus de z et $\mathcal{Z}_1,\dots,\mathcal{Z}_{e_j^V}$ des voisinages ouverts disjoints respectivement de $\{z_1,\dots,z_{e_j^V}\}$ dans $X^{\text{rég}} \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))}$, qui soient difféomorphes par π_V à un petit disque $\mathcal{D}_z \subset \mathcal{Z}$ centré en z.

Montrons que le cardinal de $(z + V'^\perp) \cap (X \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))})$, qui est $e_j^{V'}$, est aussi e_j^V, pour V' suffisamment proche de V dans $\mathcal{U}'_V$. Il suffit pour cela de choisir V' de sorte que $(z + V'^\perp) \cap \mathrm{B}_{(0,R(V))} \subset (\mathcal{D}_z + V^\perp)$. En effet, pour un tel V', $z + V'^\perp$ rencontre $\mathrm{B}_{(0,R(V))} \cap X$ dans $\bigcup_{\ell=1}^{e_j^V} \mathcal{Z}_\ell$ et chaque $\mathcal{Z}_\ell$ n'est coupé qu'une seule fois, puisque $\mathcal{D}_z \cap \mathrm{fr}(\bigcup_{j=1}^{n_V} \mathrm{K}_j^{R(V),V'})$ est vide.

Remarque. – Si X_0 est un germe d'ensemble analytique complexe, la version complexe de la proposition précédente montre que, pour V général dans la Grassmannienne des k-plans complexes, le degré local de $\pi_{V|X}$ est bien défini (et égal par définition à la multiplicité de X_0) (*cf.* [63], 3D et 3P). La suite des multiplicités des profils polaires locaux généraux : $((e_1^{V_1},\dots,e_{n_{V_1}}^{V_1}),\dots,(e_1^{V_p},\dots,e_{n_{V_p}}^{V_p}))$, où $V_i \in \Omega_X^i$, $i \in \{1,\dots,p\}$, étend ainsi aux réels la notion de multiplicité des ensembles analytiques complexes.

Comme de plus le long des strates d'une stratification lipschitzienne d'un ensemble analytique complexe la multiplicité ne change pas [4], on retrouve que la multiplicité des variétés polaires et des discriminants de X_0 ne dépend pas de la projection générale qui leur donne naissance (*cf.* [55]).

Rappelons que pour tout $V \in \mathcal{E}_X$, on a noté $\sigma(V)$ la fonction sous-analytiquement constructible dont une présentation est $\sum_{j=1}^{n_V} e_j^V \mathbf{1}_{\mathcal{K}_j^V}$, et $\Theta_k(\sigma(V),0)$ sa densité à l'origine, c'est-à-dire la quantité $\sum_{j=1}^{n_V} e_j^V \Theta_k(\mathcal{K}_j^V,0)$. Nous montrons la formule $(\mathcal{CCD})$ (formule de Cauchy–Crofton pour la densité, théorème 1.10).

THÉORÈME 1.10. – *Soit X un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Avec les notations précécentes, on a l'égalité* :

$$(\mathcal{CCD}) \qquad \Theta_k(X,0) = \int_{V\in\mathcal{E}_X} \Theta_k\big(\sigma(V),0\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

La preuve ne fait pas appel à la formule de Cauchy–Crofton pour le volume ; elle en est indépendante, et n'est pas directe. Pour l'établir, on procède par rectifications successives : tout d'abord on montre qu'il suffit de prouver $(\mathcal{CCD})$ pour les cônes sous-analytiques lisses (rectification de X sur son cône tangent $\mathcal{C}_0X$), puis qu'il suffit de prouver $(\mathcal{CCD})$ pour des cônes sous-analytiques de dimension k inclus dans des k-plans de $\mathbb{R}^n$ (rectification de $\mathcal{C}_0X$ par des cônes plans tangents à $\mathcal{C}_0X$), in fine on est amené à prouver $(\mathcal{CCD})$ pour les k-plans de $\mathbb{R}^n$, ce qui est sans difficulté. On s'appuie sur plusieurs lemmes, dont les deux suivants :

LEMME 1.11. – *Le théorème* 1.10 *est vrai pour* $X = \mathcal{C}$ *un germe de cône sous-analytique lisse* (*hors l'origine*).

LEMME 1.12. – *Si* r_V *est le réel non nul mis en évidence par le corollaire* 1.5, *on a pour tout* $V \in \mathcal{E}_X$ *et pour tout* r, $0 < r < r_V$:

$$\pi_V(\mathcal{C}_0 X) = \mathcal{C}_0\big(\pi_V(X \cap \mathrm{B}_{(0,r)})\big).$$

Preuve du lemme 1.12. – À tout $V \in \mathcal{E}_X$, on peut associer le réel r_V du corollaire 1.5. On a alors : $V^\perp \cap \mathcal{C}_0 X = \{0\}$ et, pour tout r, $0 < r < r_V$, $V^\perp \cap \operatorname{adh}(\mathrm{B}_{(0,r)} \cap X) = \{0\}$.

Considérons δ une direction unitaire de $\mathcal{C}_0(\pi_V(X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}))$ et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \pi_V(y_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \pi_V(y_n)/|\pi_V(y_n)| = \delta$. Nécessairement $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ et la direction unitaire limite $\lim_{n\to\infty} y_n/|y_n| = \tilde{\delta}$ ($\in \mathcal{C}_0 X$) n'est pas dans $V^\perp$, donc $\pi_V(\tilde{\delta})/|\pi_V(\tilde{\delta})| = \delta$ et par suite : $\mathcal{C}_0 \pi_V(X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}) \subset \pi_V(\mathcal{C}_0 X)$. L'inclusion réciproque est toujours vérifiée. □

Admettons pour l'instant le lemme 1.11 et montrons le théorème 1.10.

Preuve du théorème 1.10. – Soient $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ des ensembles sous-analytiques disjoints de X tels que $\dim(X \smallsetminus \sum_{j=1}^N \Omega_j) < k$ et chaque Ω_j est un morceau ε-analytique ($\varepsilon > 0$ un réel quelconque), c'est-à-dire qu'existent $V_j \in \mathbb{G}(k,n)$, $\mathcal{U}_j$ un ouvert sous-analytique de V_j et $\phi_j : \mathcal{U}_j \to V_j^\perp$ une application analytique dont la différentielle est bornée par ε, et dont le graphe est Ω_j. Pour l'existence d'une telle décomposition on peut se reporter à [9], théorème 3.18 ou [29], proposition 1.3.

Bien sûr par additivité de la densité :

$$\Theta_k(X,0) = \sum_{j=1}^{N} \Theta_k(\Omega_j, 0).$$

La proposition 3.6 (ii) et le théorème 3.8 de [29] donnent en outre : $\Theta_k(\Omega_j,0) = \Theta_k(\mathcal{C}_0\Omega_j, 0)$, pour tout $j \in \{1,\ldots,N\}$, et ainsi :

$$\Theta_k(X,0) = \sum_{j=1}^{N} \Theta_k(\mathcal{C}_0\Omega_j, 0).$$

Quitte à ne considérer que la partie lisse de chaque $\mathcal{C}_0\Omega_j \smallsetminus \{0\}$, on peut supposer que $\mathcal{C}_0\Omega_j \smallsetminus \{0\}$ est lui-même lisse pour tout $j \in \{1,\ldots,N\}$. Le lemme 1.11 montre qu'alors :

$$\Theta_k(X,0) = \sum_{j=1}^{N} \int_{V \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}_0\Omega_j}} \sum_{\ell=1}^{n_V^j} e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}\, \Theta_k\big(\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}, 0\big)\, \mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

Comme $\mathcal{E}_X$ est inclus dans $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_0\Omega_j}$ pour tout $j \in \{1,\ldots,N\}$ et est de complémentaire $\gamma_{k,n}$-négligeable dans chaque $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_0\Omega_j}$, on a :

$$(*) \qquad \Theta_k(X,0) = \sum_{j=1}^{N} \int_{V \in \mathcal{E}_X} \sum_{\ell=1}^{n_V^j} e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}\, \Theta_k\big(\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}, 0\big)\, \mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

Notons que le germe $\pi_V(\mathcal{C}_0\Omega_j \cap \mathrm{B}_{(0,r_V)})$ est aussi le germe $\pi_V(\mathcal{C}_0\Omega_j)$ par le lemme 1.6, puisque $V^\perp \cap \mathcal{C}_0\Omega_j = \{0\}$ et donc les profils polaires locaux de $\mathcal{C}_0\Omega_j$ recouvrent le germe $\pi_V(\mathcal{C}_0\Omega_j)$ privé d'un germe de sous-analytique de dimension $< k$. Or par le lemme 1.12 on a les égalités : $\pi_V(\mathcal{C}_0\Omega_j) = \mathcal{C}_0\pi_V(\Omega_j \cap \mathrm{B}_{(0,r_V)}) = \mathcal{C}_0(\bigcup_{\ell'=1}^{n'^j_V}(\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V} \cup \mathcal{N}))$, où $\mathcal{N}$ est un germe sous-analytique de dimension $< k$.

On en conclut que la réunion des profils polaires locaux de $\mathcal{C}_0\Omega_j$ coïncide avec la réunion des germes des cônes tangents des profils polaires locaux de Ω_j (en dehors d'un germe de sous-analytique $\mathcal{H}^k$-négligeable de V).

LEMME 1.13. – *Avec les notations qui précèdent, si l'intersection des germes $\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$ et $\mathcal{C}_0\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V}$ est un germe de dimension k, alors $e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V} = e_{\ell'}^{\Omega_j,V}$.*

Preuve du lemme 1.13. – On commence par montrer que $\mathcal{H}^k$-presque tous les germes de direction δ de $\mathcal{C}_0\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V}$ sont dans le germe $\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V}$ du profil polaire local de Ω_j.

En effet, lorsque Ω_0 est un germe (à l'origine) d'ouvert sous-analytique de dimension k dans $\mathbb{R}^k$, en notant $Z_\Omega = \bigcap_{\eta>0} \mathcal{C}_{\Omega,\eta}$ (où Ω est un représentant quelconque de Ω_0 et $\mathcal{C}_{\Omega,\eta}$ est le cône de sommet 0 engendré par $\Omega \cap \mathrm{B}_{(0,\eta)}$), la démonstration de la proposition 2.1 de [29] assure que toutes les directions du cône sous-analytique Z_Ω ont des germes dans le germe Ω_0, $Z_\Omega \subset \mathcal{C}_0\Omega$ et $\Theta_k(\Omega,0) = \mathcal{H}_k(Z_\Omega \cap \mathrm{B}_{(0,1)}) = \mathcal{H}_k(\mathcal{C}_0\Omega \cap \mathrm{B}_{(0,1)})$.

On remarque ensuite que $\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$ est un germe de cône à l'origine, car $\pi_V(\mathcal{C}_0\Omega_j)$ est un cône, de même que $\pi_V(\mathrm{fr}(\mathcal{C}_0\Omega_j))$ et $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|\mathcal{C}_0\Omega_j}})$. On en déduit sous les hypothèses de l'énoncé qu'il existe un germe de cône $\mathcal{C}$ ouvert, de densité non nulle, contenu dans le germe $\mathcal{C}_0\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V} \cap \mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$ et dont chaque germe de direction δ est dans $\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V}$.

Soient $\mathcal{C}^1,\dots,\mathcal{C}^{e_{\ell'}^{\Omega_j,V}}$ les $e_{\ell'}^{\Omega_j,V}$ images réciproques (deux à deux disjointes) dans Ω_j par π_V de $\mathcal{C}$ et leurs cônes tangents en l'origine : $\mathcal{C}_0(\mathcal{C}^1),\dots,\mathcal{C}_0(\mathcal{C}^{e_{\ell'}^{\Omega_j,V}})$. Ces cônes ont tous une densité non nulle car $0 < \Theta_k(\pi_V(\mathcal{C}^p),0) = \Theta_k(\mathcal{C},0)$ et π_V n'augmente pas la dimension. Deux tels cônes ont de plus nécessairement une intersection $\mathcal{H}^k$-négligeable, puisque Ω_j étant un morceau ε-analytique, par la proposition 3.6 (ii) de [29], la multiplicité de Ω_j le long des composantes du cône tangent strict de Ω_j vaut 1.

On en conclut qu'existe $\delta_0 \in \mathcal{C}$ une direction de $\mathcal{C}$ et $e_{\ell'}^{\Omega_j,V}$ directions deux à deux distinctes $\tilde\delta_1 \in \mathcal{C}_y(\mathcal{C}^1),\dots,\tilde\delta_{e_{\ell'}^{\Omega_j,V}} \in \mathcal{C}_y(\mathcal{C}^{e_{\ell'}^{\Omega_j,V}})$, telles que : $\pi_V(\tilde\delta_j) = \delta_0$, $j \in \{1,\dots,e_{\ell'}^{\Omega_j,V}\}$.

Comme le germe de direction δ_0 est aussi dans $\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$, et que la multiplicité du profil polaire local $\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$ est $e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$, nécessairement $e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V} \geqslant e_{\ell'}^{\Omega_j,V}$.

Mais s'il existe une direction $\tilde\delta$ de $\mathcal{C}_0\Omega_j$ telle que $\pi_V(\tilde\delta) = \delta_0$ et si γ est un chemin de Ω_j dont la direction de la sécante limite est $\tilde\delta$, par l'inclusion $\delta_0 \in \mathcal{C}$ et du fait que $\mathcal{C}$ est un cône ouvert de densité non nulle, le germe de la trajectoire du projeté par π_V de la trajectoire de γ est inclus dans $\mathcal{C}$, de sorte que le chemin γ est dans un $\mathcal{C}^p$ et $\tilde\delta \in \mathcal{C}_0(\mathcal{C}^p)$; c'est-à-dire que $e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V} \leqslant e_{\ell'}^{\Omega_j,V}$ et finalement l'égalité $e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V} = e_{\ell'}^{\Omega_j,V}$ annoncée est prouvée. Le lemme 1.13 est démontré. □

Revenons à la preuve proprement dite du théorème 1.10. Fixons $V \in \mathcal{E}_X$, $j \in \{1,\dots,N\}$ et notons pour $\ell' \in \{1,\dots,n'^j_V\}$ et $\ell \in \{1,\dots,n^j_V\}$ les germes d'ouverts $\mathcal{C}_0\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V} \cap \mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$ par $\mathcal{O}_{\ell',\ell}$ lorsque $\mathcal{C}_0\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V} \cap \mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$ est un germe de cône de dimension k.

On rappelle que l'on a établi que la réunion des profils polaires locaux de $\mathcal{C}_0\Omega_j$ coïncide avec la réunion des germes des cônes tangents des profils polaires locaux de Ω_j (en dehors d'un germe de sous-analytique $\mathcal{H}_k$-négligeable de V), on a donc :

$$\sum_{\ell=1}^{n_V^j} e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}\Theta_k\big(\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V},0\big)=\sum_{\ell=1}^{n_V^j}\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V} e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}\Theta_k(\mathcal{O}_{\ell',\ell},0)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n_V^j} e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}\Theta_k\big(\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V},0\big)&=\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V}\sum_{\ell=1}^{n_V^j} e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}\Theta_k(\mathcal{O}_{\ell',\ell},0)\\&=\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V}\sum_{\ell=1}^{n_V^j} e_{\ell'}^{\Omega_j,V}\Theta_k(\mathcal{O}_{\ell',\ell},0),\end{aligned}$$

puisque par le lemme 1.13 lorsque $\Theta_k(\mathcal{O}_{\ell',\ell},0)\neq 0$ on a $e_{\ell'}^{\Omega_j,V}=e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}$.

Maintenant comme $\sum_{\ell=1}^{n_V^j}\Theta_k(\mathcal{O}_{\ell',\ell},0)=\Theta_k(\mathcal{C}_0\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V})$ et la proposition 2.1 de [29] donnant $\Theta_k(\mathcal{C}_0\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V})=\Theta_k(\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V},0)$ ($\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V}$ étant un germe d'ouvert sous-analytique), on obtient l'égalité :

$$\sum_{\ell=1}^{n_V^j} e_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V}\Theta_k\big(\mathcal{K}_\ell^{\mathcal{C}_0\Omega_j,V},0\big)=\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V} e_{\ell'}^{\Omega_j,V}\Theta_k\big(\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V},0\big).$$

L'égalité (*) permet d'écrire :

$$(**)\qquad \Theta_k(X,0)=\sum_{j=1}^{N}\int_{V\in\mathcal{E}_X}\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V} e_{\ell'}^{\Omega_j,V}\Theta_k\big(\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V},0\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

On peut alors achever la preuve du théorème 1.10. La réunion des germes $(\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V})$, pour $j\in\{1,\dots,N\}$ et $\ell'\in\{1,\dots,n'^j_V\}$, coïncide, à un germe de sous-analytique $\mathcal{H}^k$-négligeable près, avec la réunion des germes $(\mathcal{K}_\lambda^{X,V})$, pour $\lambda\in\{1,\dots,n_V\}$.

Fixons $\lambda\in\{1,\dots,n_V\}$ et notons $\mathcal{I}_{j,\ell'}^\lambda$ le germe $\mathcal{K}_\lambda^{X,V}\cap\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V}$. On a :

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V} e_{\ell'}^{\Omega_j,V}\Theta_k\big(K_{\ell'}^{\Omega_j,V},0\big)=\sum_{\lambda=1}^{n_V}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V} e_{\ell'}^{\Omega_j,V}\Theta_k\big(\mathcal{I}_{j,\ell'}^\lambda,0\big).$$

Mais par définition de $e_\lambda^{X,V}$, on a encore pour tout $\lambda\in\{1,\dots,n_{\mathcal{V}}\}$:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V} e_{\ell'}^{\Omega_j,V}\Theta_k\big(\mathcal{I}_{j,\ell'}^\lambda,0\big)=e_\lambda^{X,V}\Theta_k\big(\mathcal{K}_\lambda^{X,V},0\big).$$

De cette dernière égalité et de l'égalité (**), on déduit :

$$\Theta_k(X,0)=\sum_{j=1}^{N}\int_{V\in\mathcal{E}_X}\sum_{\ell'=1}^{n'^j_V} e_{\ell'}^{\Omega_j,V}\Theta_k\big(\mathcal{K}_{\ell'}^{\Omega_j,V},0\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{V \in \mathcal{E}_X} \sum_{\ell'=1}^{n'^j_V} \sum_{\lambda=1}^{n_V} e_{\ell'}^{\Omega_j, V} \Theta_k\big(\mathcal{I}_{j,\ell'}^{\lambda}, 0\big)$$

$$= \int_{V \in \mathcal{E}_X} \sum_{\lambda=1}^{n_V} e_{\lambda}^{X,V} \Theta_k\big(\mathcal{K}_{\lambda}^{X,V}, 0\big)\, \mathrm{d}\gamma_{k,n}(\mathcal{V}),$$

qui est l'égalité que l'on se proposait de démontrer.

Modulo la preuve du lemme 1.11, le théorème 1.10 est démontré.

Pour prouver le lemme 1.11 on doit montrer que si C est un cône sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de sommet l'origine et si $C \setminus \{0\}$ est une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, l'égalité :

$$\Theta_k(C, 0) = \int_{V \in \mathcal{E}_C} \sum_{j=1}^{n_V} e_j^V\, \Theta_k\big(\mathcal{K}_j^{C,V}, 0\big)\, \mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)$$

a lieu.

Preuve du lemme 1.11. – La définition 1.8 donne l'existence d'un sous-analytique $\mathcal{T}_C$ dense dans $\mathbb{G}(k,n)$ tel que $\dim(\mathcal{C}_{\pi_{V|C}}) < k$, pour tout $V \in \mathcal{T}_C$.

Rappelons de plus que si $x \in C$, la notation $A(x,V)$ désigne $\alpha(\mathrm{T}_x C, V^{\perp})$, l'angle entre $\mathrm{T}_x C$ et $V^{\perp}$. Montrons tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 1.14. – *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $V \in \mathcal{T}_C$, il existe Ω_V^{ε} un voisinage ouvert de V et $\eta_V^{\varepsilon} > 0$ un réel, tels que* :

$$\Theta_k\big(\{x \in C \setminus \{0\};\ \exists V' \in \Omega_V^{\varepsilon} \textit{ tel que } A(x,V') < \eta_V^{\varepsilon}\}, 0\big) < \varepsilon.$$

Preuve du lemme 1.14. – Notons pour tout ouvert Ω de $\mathbb{G}(k,n)$ et tout réel $\eta > 0$, $C_{\Omega,\eta}$ le sous-analytique $\{x \in C \setminus \{0\}\,;\, \exists V' \in \Omega$ tel que $A(x,V') < \eta\} = \bigcup_{V' \in \Omega} A^{-1}(\cdot, V')(]-\eta,\eta[)$. La sous-variété $C \setminus \{0\}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, l'ensemble $C_{\Omega,\eta}$ est un ouvert de $C \setminus \{0\}$. De plus $C_{\Omega,\eta}$ est un cône épointé de sommet l'origine (éventuellement vide). Fixons $V \in \mathcal{T}_C$ et considérons une suite emboîtée de voisinages ouverts de V, $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots \supset \Omega_n \supset \cdots$ tels que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = V$ et une suite $\eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \cdots \geqslant \eta_n \geqslant \cdots > 0$ tendant vers 0. On a la suite emboîtée de cônes : $C_{\Omega_1,\eta_1} \supset C_{\Omega_2,\eta_2} \supset \cdots \supset C_{\Omega_n,\eta_n} \supset \cdots$. Grâce au théorème 3.8 de [29] on peut écrire : $\Theta_k(C_{\Omega_n,\eta_n}, 0) = \mathcal{H}^k(C_{\Omega_n,\eta_n} \cap \mathrm{B}_{(y,0)})$ et ainsi $\Theta_k(C_{\Omega_n,\eta_n}, 0) = \mathcal{H}^k(C_{\Omega_n,\eta_n} \cap \mathrm{B}_{(y,0)}) = \mathcal{H}^k(\bigcap_{j=1}^n C_{\Omega_j,\eta_j} \cap \mathrm{B}_{(y,0)})$.

Or $\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^k(\bigcap_{j=1}^n C_{\Omega_j,\eta_j} \cap \mathrm{B}_{(y,0)}) = \mathcal{H}^k(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{\Omega_j,\eta_j} \cap \mathrm{B}_{(y,0)})$. Il suffit alors de voir que $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{\Omega_j,\eta_j} = \mathcal{C}_{\pi_{V|C}}$ et, puisque $V \in \mathcal{T}_C$, que $\dim(\mathcal{C}_{\pi_{V|C}}) < k$ pour conclure que $\lim_{n\to\infty} \Theta_k(C_{\Omega_n,\eta_n}, 0) = 0$. $\square$

Soit dans ces conditions $\alpha > 0$ et $\mathcal{T}_C^{\alpha} \subset \mathcal{T}_C$ un compact vérifiant $\gamma_{k,n}(\mathcal{T}_C \setminus \mathcal{T}_C^{\alpha}) < \alpha$.

Par le lemme 1.14, il existe un recouvrement fini $(\Omega_{V_t}^{\alpha})_{t \in \{1,\ldots,t_\alpha\}}$ du compact $\mathcal{T}_C^{\alpha}$ et des réels positifs, $(\eta_{V_t}^{\alpha})_{t \in \{1,\ldots,t_\alpha\}}$ tels qu'avec les notations du lemme 1.14 : $\Theta_k(C_{\Omega_t^{\alpha},\eta_t^{\alpha}}, 0) < \alpha$.

Pour tout x dans le sous-analytique $C \cap \mathrm{S}^{n-1}$, il existe un voisinage ouvert C_x dans $C \cap \mathrm{S}^{n-1}$, tel que si l'on note $\widetilde{C}_x$ le cône de sommet 0 sur C_x, les trois points suivants soient vérifiés :

(i) C_x est le graphe au-dessus d'un voisinage sous-analytique ouvert P_x de x dans $\mathrm{T}_x(C \cap \mathrm{S}^{n-1})$ d'une application analytique g_x à valeurs dans $\mathrm{T}_x(C \cap \mathrm{S}^{n-1})^{\perp}$, à dérivée bornée par α.

(ii) Pour tout $V \in \mathbb{G}(k,n)$ tel que $A(x,V) \geqslant \inf_{t \in \{1,\ldots,t_\alpha\}}\{\eta^{\alpha_t}\} > 0$, on a $\Theta_k(\pi_V(\widetilde{C}_x), 0) = k\Theta_k(\pi_V(\widetilde{P}_x), 0)$, avec $\widetilde{P}_x$ le cône de sommet 0 sur P_x et $k \in [1-\alpha, 1+\alpha]$. Un tel C_x

existe bien. En effet, si $V \in \mathbb{G}(k,n)$ tel que $A(x,V) \neq 0$, est fixé et si la condition (i) est réalisée, en notant $g = \sup_{C_x} |g_x|$, le rapport $\Theta_k(\pi_V(\widetilde{C}_x),0)/\Theta_k(\pi_V(\widetilde{P}_x),0)$ tend vers 1 lorsque $\lim_{\mathrm{diam}(C_x)\to 0} \frac{g}{\mathrm{diam}(C_x)} = 0$ et cette dernière égalité est vérifiée précisément parce que $C \cap \mathrm{S}^{n-1}$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$. On en conclut qu'existe pour tout $V \in \mathbb{G}(k,n)$ tel que $A(x,V) > 0$ un diamètre (non nul) convenable de C_x pour que $\Theta_k(\pi_V(\widetilde{C}_x),0) = k\Theta_k(\pi_V(\widetilde{P}_x),0)$ et $k \in [1-\varepsilon_\alpha, 1+\varepsilon_\alpha]$. Facilement pour tout $V \in \mathbb{G}(k,n)$ tel que $A(x,V) \neq 0$ un diamètre convenable de C_x existe pour que $\Theta_k(\pi_{V'}(\widetilde{C}_x),0) = k\Theta_k(\pi_{V'}(\widetilde{P}_x),0)$ et $k \in [1-\varepsilon_\alpha, 1+\varepsilon_\alpha]$, pour tout V' dans un certain voisinage de V. Mais $\{V \in \mathbb{G}(k,n)\,;\ A(x,V) \geqslant \inf_{t\in\{1,\dots,t_\alpha\}} \eta^{\alpha_t}\}$ étant compact, un diamètre convenable de C_x existe encore pour que (ii) ait lieu.

(iii) La multiplicité du profil polaire local de $\widetilde{C}_x$ associé à V, pour tout k-plan V vérifiant $A(x,V) \geqslant \inf_{t\in\{1,\dots,t_\alpha\}}\{\eta^{\alpha_t}\} > 0$, est celle du profil polaire local $\widetilde{P}_x$, c'est-à-dire 1.

On considère une partition dénombrable de C par des $\widetilde{C}_{x_j}$ (à un cône sous-analytique $\mathcal{H}^k$-négligeable près) vérifiant (i), (ii) et (iii) et compatible avec les $C_{\Omega_t^\alpha,\eta_t^\alpha}$, c'est-à-dire que chaque $C_{\Omega_t^\alpha,\eta_t^\alpha}$ est réunion (à un cône sous-analytique $\mathcal{H}^k$-négligeable près) de $\widetilde{C}_{x_j}$. L'application g_{x_j} se prolonge naturellement en une application de $\widetilde{P}_{x_j}$ sur $\widetilde{C}_{x_j}$ à différentielle bornée par (pour ne pas alourdir les notations, disons encore) α, de sorte que par le lemme de [4] ou par la remarque 2.4 de [29], on a :

$$\Theta_k(\widetilde{C}_{x_j},y) = k_j\Theta_k(\widetilde{P}_{x_j},y), \quad k_j \in \left[\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^k, (1+\alpha)^k\right]$$

et donc :

$$(***) \qquad \Theta_k(C,0) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \Theta_k(\widetilde{C}_{x_j},0) = K\sum_{j\in\mathbb{N}} \Theta_k(\widetilde{P}_{x_j},0), \quad K \in \left[\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^k, (1+\alpha)^k\right].$$

Supposons montré le lemme suivant, qui est le théorème 1.10 pour les cônes plans :

LEMME 1.15. – *Soit P un cône sous-analytique de sommet 0 et de dimension k, inclus dans un k-plan de $\mathbb{R}^n$. On a l'égalité* :

$$\Theta_k(P,0) = \int\limits_{V\in\mathbb{G}(k,n)} \Theta_k\big(\pi_V(P),0\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

Par l'égalité (***), on obtient alors immédiatement, grâce au lemme 1.15 :

$$\Theta_k(C,0) = K \int\limits_{V\in\mathbb{G}(k,n)} \sum_{j\in\mathbb{N}} \Theta_k\big(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

Pour montrer le lemme 1.11 il suffit alors de montrer que pour $\gamma_{k,n}$-presque tout $V \in \mathcal{E}_C$, on a :

$$\lim_{\alpha\to 0} \sum_{j\in\mathbb{N}} \Theta_k\big(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0\big) = \sum_{\ell=1}^{n_V} e_\ell^{C,V}\Theta_k\big(\mathcal{K}_\ell^{C,V},0\big).$$

Fixons donc $V \in \mathcal{E}_C \cap \bigcup_{\alpha>0} \mathcal{T}_C^\alpha$ (qui est de complémentaire $\gamma_{k,n}$-négligeable dans $\mathbb{G}(k,n)$). Il existe $\alpha > 0$ tel que $V \in \mathcal{T}_C^\alpha$ et donc il existe $\Omega_{V_{t_0}}^\alpha$, $t_0 \in \{1,\dots,t_\alpha\}$, tel que $V \in \Omega_{V_{t_0}}^\alpha$. On peut écrire :

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\Theta_k\big(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0\big)=\sum_{j\notin J_V=\{j\in\mathbb{N},\,C_{x_j}\cap C_{\Omega^\alpha_{t_0},\eta^\alpha_{t_0}}\neq\emptyset\}}\Theta_k\big(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0\big)+\sum_{j\in J_V}\Theta_k\big(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0\big).$$

Or, $r(\alpha)=\sum_{j\notin J_V}\Theta_k(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0)$ tend vers 0 avec α, puisque par construction $\Theta(C_{\Omega^\alpha_{t_0},\eta^\alpha_{t_0}},0) < \alpha$ et les C_{x_j}, $j\in J_V$, forment une partition de $C_{\Omega^\alpha_{t_0},\eta^\alpha_{t_0}}$. De plus, si $j\in J_V$, on a $A(x_j,V)\geqslant \eta^\alpha_{t_0}$ et donc $\Theta_k(\pi_V(\widetilde{C}_{x_j}),0)=k_j\Theta_k(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0)$, avec $k_j\in[1-\alpha,1+\alpha]$, par le point (ii). On en déduit :

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\Theta_k\big(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0\big)=r(\alpha)+k'_\alpha\sum_{j\in J_V}\Theta_k\big(\pi_V(\widetilde{C}_{x_j}),0\big),$$

avec $k'_\alpha\in[1-\alpha,1+\alpha]$. Enfin, subdivisons les profils polaires locaux de C associés à V par les $\big(\pi_V(\widetilde{C}_{x_j})\big)_{j\in J_V}$ (qui recouvrent la réunion des profils polaires locaux de C en y associés à V, privée de $\pi_V(C_{\Omega^\alpha_{t_0},\eta^\alpha_{t_0}})$, dont la densité en 0, notée $s(\alpha)$, tend vers 0 avec α). Par le point (iii), la multiplicité du seul profil polaire local $\pi_V(\widetilde{C}_{x_j})$ de $\widetilde{C}_{x_j}$ est 1, on a donc :

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\Theta_k\big(\pi_V(\widetilde{P}_{x_j}),0\big)=r(\alpha)+k'_\alpha\left(\sum_{\ell=1}^{n_V}e_\ell^{C,V}\,\Theta\big(\mathcal{K}_\ell^{C,V},0\big)-\sigma(\alpha)\right),$$

où $\sigma(\alpha)\in[0,Ms(\alpha)]$ et $M=\sup_{V\in\mathcal{E}_C,\,j\in\{1,\dots,n_v\}}e_j^{C,V}<\infty$ (*cf.* proposition 1.9). Enfin, comme $\lim_{\alpha\to0}r(\alpha)=0$, $\lim_{\alpha\to0}s(\alpha)=0$ et $\lim_{\alpha\to0}k'_\alpha=1$, le lemme 1.11 est démontré. □

Pour achever la preuve du théorème 1.10 il ne reste qu'à démontrer le lemme 1.15.

Preuve du lemme 1.15. – On doit montrer que si P est un cône sous-analytique de sommet 0 et de dimension k, inclus dans un k-plan V_0 de $\mathbb{R}^n$, l'égalité suivante est vraie :

$$\Theta_k(P,0)=\int_{V\in\mathbb{G}(k,n)}\Theta_k\big(\pi_V(P),0\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

Soit $V\in\mathbb{G}(k,n)$ tel que $V^\perp$ soit transverse à V_0 et notons :

$$\Phi_V: V_0\setminus\{0\}\ni x\longmapsto\frac{|x|}{|\pi_V(x)|}\,\pi_V(x)\in V\setminus\{0\}.$$

On remarque que Φ_V envoie $P\cap \mathrm{B}_{(0,1)}$ sur $\pi_V(P)\cap\mathrm{B}_{(0,1)}$ et donc :

$$\begin{aligned}\Theta_k\big(\pi_V(P),0\big)=\frac{1}{\mu_k}\mathcal{H}^k\big(\pi_V(P)\cap\mathrm{B}_{(0,1)}\big)&=\frac{1}{\mu_k}\int_{y\in V}\chi_{[\pi_V(P)\cap\mathrm{B}_{(0,1)})]}(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^k(y)\\&=\frac{1}{\mu_k}\int_{x\in P\cap\mathrm{B}_{(0,1)}}|\mathrm{Jac}\,\Phi_V(x)|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^k(x)\end{aligned}$$

la première égalité provient de [29], proposition 2.3, et la dernière du théorème de changement de variable. On obtient ainsi :

$$
\begin{aligned}
&\int_{V\in\mathbb{G}(k,n)} \Theta_k(\pi_V(P),0)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)\\
(****)\qquad &= \frac{1}{\mu_k}\int_{V\in\mathbb{G}(k,n)}\int_{x\in P\cap \mathrm{B}_{(0,1)}} |\mathrm{Jac}\,\Phi_V(x)|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^k(x)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)\\
&= \frac{1}{\mu_k}\int_{x\in P\cap \mathrm{B}_{(0,1)}}\Bigg(\int_{V\in\mathbb{G}(k,n)} |\mathrm{Jac}\,\Phi_V(x)|\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)\Bigg)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^k(x).
\end{aligned}
$$

Notons que $\mathrm{Jac}\,\Phi_V(x)$ ne dépend que de la direction $x/|x|$. Comme le fixateur de V_0 dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ opère transitivement sur le sous-espace vectoriel sous-jacent à V_0, et comme $\gamma_{k,n}$ est $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$-invariante, la quantité $\int_{V\in\mathbb{G}(k,n)} |\mathrm{Jac}\,\Phi_V(x/|x|)|\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)$ ne dépend pas de x, de sorte que $\kappa = \int_{V\in\mathbb{G}(k,n)} |\mathrm{Jac}\,\Phi_V(x)|\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V)$ est indépendante de x. L'égalité $(****)$ s'écrit :

$$
\int_{V\in\mathbb{G}(k,n)} \Theta_k\big(\pi_V(P),0\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V) = \frac{\kappa}{\mu_k}\int_{x\in P\cap \mathrm{B}_{(0,1)}} \mathrm{d}\mathcal{H}^k(x) = \kappa\Theta_k(P,0).
$$

En faisant $P=V_0$ cette égalité permet de déterminer facilement κ :

$$
(1=)\int_{V\in\mathbb{G}(k,n)} \mathrm{d}\gamma_{k,n}(V) = \kappa.
$$

Le lemme 1.15 est démontré et avec lui le théorème 1.10. □

Le lemme 1.15 montre de quelle façon la géométrie de l'action de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{G}(k,n)$ intervient dans la démonstration de la formule $(\mathcal{CCD})$ et permet d'énoncer le résultat plus général :

THÉORÈME 1.16 (($\mathcal{CCD}$) généralisée). – *Soient $\mathcal{G}\subset\mathbb{G}(k,n)$ un sous-ensemble sous-analytique de $\mathbb{G}(k,n)$ sur lequel agit transitivement un sous-groupe G de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mu_{k,n}$ une mesure G-invariante sur $\mathcal{G}$ tels que les espaces tangents à $\mathcal{C}_0X$ sont dans $\mathcal{G}$, il existe $V_0\in\mathcal{G}$ dont le fixateur G_{V_0} agit transitivement sur le k-espace vectoriel sous-jacent à V_0 et $\mu_{k,n}(\mathcal{G}) = \mu_{k,n}(\mathcal{G}\cap\mathcal{E}_X) = 1$. L'égalité suivante a alors lieu :*

$$
\Theta_k(X,0) = \int_{V\in\mathcal{G}\cap\mathcal{E}_X} \Theta_k\big(\sigma(V),0\big)\,\mathrm{d}\mu_{k,n}(V).
$$

Comme on l'a annoncé en début de section, la formule de Cauchy–Crofton généralisée pour la densité admet pour corollaire immédiat le théorème de Draper. En effet, la densité d'ordre $2k$ de la fonction $\sigma(V)$ d'un ensemble analytique complexe est sa multiplicité, pour V général dans $\mathbb{G}(k,n)$.

COROLLAIRE 1.17 ([11], [7]). – *Soit $\mathcal{A}\subset\mathbb{C}^n$ un germe d'ensemble analytique complexe, de dimension k. Sa densité d'ordre $2k$ est sa multiplicité locale.*

2. Densité en codimension nulle

Dans cette section le sous-analytique $X \subset \mathbb{R}^n$ est de dimension n et $Y = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$, avec $1 \leqslant d \leqslant n-1$. On donne des conditions de régularité portant sur le couple (X, Y) qui assurent la continuité de la densité de X le long de Y (proposition 2.6). La pseudo-platitude normale en fait partie. On en rappelle la définition, due à Hironaka.

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et Y une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ de dimension d. Supposons que $Y = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$, ce qui est localement toujours possible.

On définit l'éclatement sphérique de E de centre (ou le long de) Y, que l'on note

$$\sigma : \mathrm{Bl}_Y E \longrightarrow \mathrm{adh}(E),$$

de la façon suivante : $\mathrm{Bl}_Y E = \mathrm{adh}\big(\{(x,\delta) \in E \times \mathbb{R}^{n-d};\ (x_{d+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+ \cdot \delta\}\big)$, où $(x_1,\dots,x_n)$ sont les coordonnées cartésiennes de x dans $\mathbb{R}^n = Y \oplus Y^\perp$ et σ est la projection naturelle de $\mathrm{Bl}_Y E$ sur $\mathrm{adh}(E)$.

On note $\mathcal{C}_Y E = \sigma^{-1}(Y) \subset Y \times \mathbb{R}^{n-d}$ le diviseur exceptionnel de cet éclatement et on le nomme à la suite de Hironaka [24] le *cône normal extrinsèque à Y dans E*.

Lorsque E est un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}_Y E$ est aussi un sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ et si $Y = \{0\}$, le cône normal $\mathcal{C}_{\{0\}} E$ est le cône tangent de E en 0, dont la dimension ne dépasse pas celle de E.

La restriction $\sigma_{|\mathcal{C}_Y E}$ de σ à $\mathcal{C}_Y E$ donne des fibres au-dessus de Y. Pour $y \in Y$ on notera cette fibre $(\mathcal{C}_Y E)_y$, elle est non vide si et seulement si $y \in \mathrm{adh}(E)$. La fibre $(\mathcal{C}_Y E)_y$ apparaît comme l'ensemble limite en y des droites sécantes à E et normales à Y. On convient que $\dim((\mathcal{C}_Y E)_y) \leqslant 0$ signifie $y \notin \mathrm{adh}(E)$.

On peut bien sûr définir le cône normal dans un système de coordonnées induit par une somme directe $Y \oplus S = \mathbb{R}^n$, il est alors commode de le noter $\mathcal{C}_Y^S E$.

DÉFINITION 2.1 ([24]). – Avec les notations qui précèdent, on dit que E est *normalement pseudo-plat au-dessus de* Y si la projection : $\sigma_{|\mathcal{C}_Y E} :\to Y$ est ouverte.

Remarque. – Il résulte de [4] (*cf.* aussi [49], lemme (4.3)) que si X_1 et X_2 sont deux sous-analytiques de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, Y_1 et Y_2 deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et si $f : (\mathbb{R}^n, X_1, Y_1, 0) \to (\mathbb{R}^n, X_2, Y_2, 0)$ est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, dont la différentielle à l'origine est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la restriction de $\Theta_k(X_1, \cdot)$ à Y_1 est continue si et seulement si la restriction de $\Theta_k(X_2, \cdot)$ à Y_2 l'est. Par conséquent, lorsque l'on cherche des conditions suffisant à la continuité de la densité de X le long de Y, quitte à déformer Y sur son espace tangent à l'origine par une application sous-analytique, on peut supposer que $Y = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$. C'est ce que nous faisons dans la suite.

Par une stratification d'un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ nous entendons une partition localement finie en sous-variétés analytiques (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\omega$) et sous-analytiques de $\mathbb{R}^n$, connexes, les strates, ne vérifiant pas nécessairement la condition de la frontière, sauf si la stratification est de Whitney ou de Verdier [62].

Les $(d+1)$-demi-plans ouverts de $\mathbb{R}^n$ de bord Y sont paramétrés par les vecteurs unitaires de $Y^\perp = \{0\}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, c'est-à-dire par S^{n-d-1}. Pour $u \in \mathrm{S}^{n-d-1}$, on convient de noter Π_u, le $(d+1)$-demi-plan de $\mathbb{R}^n$ de bord Y tel que $\Pi_u \cap \mathrm{S}^{n-d-1} = u$.

DÉFINITION 2.2. – Soient Z un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$. Avec les notations qui précèdent, on dira que le couple (Z, Y) est $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$*-régulier* en $y \in Y$ s'il existe un sous-analytique dense $\mathcal{M}_y$ dans $\mathrm{S}^{n-d-1} \subset (\mathrm{T}_y Y)^\perp$ tel que, quels que soient $u \in \mathcal{M}_y$ et la sous-variété à bord $\mathcal{W} \cup \partial(\mathcal{W})$ (union disjointe) de $\mathbb{R}^n$, de bord $\partial(\mathcal{W}) = Y$, sous-analytique et de classe $\mathcal{C}^1$, dont le demi-espace tangent en y est Π_u, le germe $(Z\cap\mathcal{W})_y$ est soit vide, soit égal au germe $\mathcal{W}_y$ de $\mathcal{W}$ en y.

La définition 2.2 n'est pas une définition ex nihilo. Si E est une condition de régularité portant sur un couple (Z,Y) de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, dans [33] et [59] est définie la $E_{\mathrm{cod}(\ell)}$-régularité $(0\leqslant\ell\leqslant\mathrm{cod}(Y))$ de la façon suivante : le couple (Z,Y) est dit $E_{\mathrm{cod}(\ell)}$-régulier en $y\in Y$, s'il existe un ouvert dense $\mathcal{M}_y$ dans $\{\Pi\in\mathbb{G}(n-\ell,n),\,\mathrm{T}_yY\subset\Pi\}$ pour lequel on ait, quelle que soit la sous-variété $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $Y\subset\mathcal{W}$ dans un voisinage de y, l'implication : $\mathrm{T}_y\mathcal{W}\in\mathcal{M}_y$ et $Z\cap\mathcal{W}$ lisse dans un voisinage de $y\Longrightarrow(\mathcal{W}\cap Z,Y)$ est E-régulier en y. Lorsque (Z,Y) est $E_{\mathrm{cod}(\ell)}$-régulier en y pour tout ℓ, $0\leqslant\ell\leqslant\mathrm{cod}(Y)$, on dit que (Z,Y) est (E^*)-régulier en y.

Une étude de la (r^*), de la (b^*) et de la (w^*)-régularité est menée dans [39], [40], [41] et dans [42]. On s'intéresse ici à la $E_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régularité, avec E la condition f de la frontière : $Y_y\cap\mathrm{adh}(Z_y)\neq\emptyset\Longrightarrow Y_y\subset\mathrm{adh}(Z_y)$.

On déduit facilement du lemme 1.4 le corollaire suivant.

LEMME 2.3. – *Soient $y\in Y$ et Z un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$. Notons $s=\dim\big((\mathcal{C}_YZ)_y\big)$. Il existe un ensemble sous-analytique $\mathcal{G}_y$ $(=\mathcal{G}^q_y)$ dense dans $\mathbb{G}(q,n)$ tel que pour tout $V\in\mathcal{G}_y$, on ait l'existence d'un réel $\rho_V>0$ assurant :*

$$\big(\mathrm{adh}(Z\cap\mathrm{B}_{(y,\rho_V)})\smallsetminus Y\big)\cap\pi_V^{-1}(Y)=\emptyset$$

si et seulement si $s+d\leqslant q$. En particulier, $\dim((\mathcal{C}_YZ)_y)\leqslant k-d$ équivaut à l'existence d'un tel sous-analytique $\mathcal{G}_y\subset\mathbb{G}(k,n)$.

Preuve. – Remarquons que comme l'ensemble :

$$\big\{V\in\mathbb{G}(q,n);\ \forall\rho>0,\ \exists x\in Y,\ \text{tel que }(x+V^\perp)\cap\big(\mathrm{adh}(Z\cap\mathrm{B}_{(y,\rho)})\smallsetminus Y\big)\neq\emptyset\big\}$$

est un ensemble sous-analytique de $\mathbb{G}(q,n)$, s'il est non négligeable il possède un intérieur non vide, et donc il existe un supplémentaire S de Y dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathcal{F}=\big\{V^\perp\subset S;\ \forall\rho>0,\ \exists x\in Y,\ \text{tel que }(x+V^\perp)\cap\big(\mathrm{adh}(Z\cap\mathrm{B}_{(y,\rho)})\smallsetminus Y\big)\neq\emptyset\big\}$$

est non négligeable dans $\mathbb{G}(n-q,n-d)$.

Considérons alors le cône normal extrinsèque à Y dans $\mathrm{adh}(Z)$ défini par la direction S. Chaque élément de $\mathcal{F}$ donne au moins une direction limite de $(\mathcal{C}^S_Y\,\mathrm{adh}(Z))_y$, ainsi on obtient pour tout $V^\perp\in\mathcal{F}$, $(\mathcal{C}^S_Y\,\mathrm{adh}(Z))_y\cap V^\perp\neq\{0\}$. Mais par le lemme 1.4 (i), il s'agit d'une contradiction, puisque $(n-q)+\dim((\mathcal{C}^S_YZ)_y)\leqslant n-d$.

Réciproquement, supposons qu'existe $\mathcal{G}_y$. Notons qu'un $(d+n-q)$-plan général $\pi_V^{-1}(Y)$ de $\mathbb{R}^n$ contenant Y est donné par un élément général W de $\mathbb{G}(n-q,n-d)$. Si $s\geqslant q-d+1$, par le lemme 1.4 (ii), les W qui coupent $(\mathcal{C}_YZ)_y$ sont dans un sous-analytique d'intérieur non vide. Soit alors $W\in\mathbb{G}(n-q,n-d)$ et $\ell\in(\mathcal{C}_YZ)_y$ tels que $\ell\in W$ et $(W\oplus Y)^\perp$ est dans l'intérieur $\mathcal{G}_y^{\text{rég}}$ de $\mathcal{G}_y$. Si γ est une courbe analytique tracée dans Z, qui aboutit à y et qui donne lieu à ℓ, $\gamma\smallsetminus\{y\}$ est (localement en y) dans l'ouvert de $\mathbb{R}^n$:

$$\Big(\bigcup_{(W'\oplus Y)^\perp\in\mathcal{G}_y^{\text{rég}}}W'\oplus Y\Big)\smallsetminus Y.$$

Mais cet ouvert ne rencontre pas Z au voisinage de y, par définition de $\mathcal{G}_y$; il s'agit d'une contradiction. □

Terminologie. – Soient $\mathcal{A}$ un ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^n$ de dimension k, $Y = \mathbb{C}^d \times \{0\}^{n-d} \subset \mathcal{A}$. Lorsqu'il existe un ouvert de Zariski dense dans la Grassmannienne des $(n-k+d)$-plans vectoriels de $\mathbb{C}^n$ contenant Y, tel que quel que soit H dans cet ouvert, les germes $(H \cap \mathcal{A})_y$ et $(H \cap Y)_y$ coïncident, on dit que $\mathcal{A}$ est *équisécable le long de Y au voisinage de y* (*cf.* [22], définition 6.2). Le lemme 2.3 montre ainsi que $\dim((\mathcal{C}_Y Z)_y) \leqslant k-d$ si et seulement si Z est équisécable le long de Y au voisinage de y (*cf.* [55], chapitre 1, théorème 5.5 ; [22], théorème 6.3).

LEMME 2.4. – *Avec les notations qui précèdent,*
(i) *Soit Z un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\leqslant k$, normalement pseudo-plat au-dessus de Y. Quel que soit $y \in Y$, on a la majoration* : $\dim((\mathcal{C}_Y Z)_y) \leqslant k-d$.
(ii) $\dim(\mathcal{C}_Y \operatorname{fr}(X))_y \leqslant n-d-1$ *si et seulement si le couple (X,Y) est $f_{\operatorname{cod}(n-d-1)}$-régulier en y si et seulement si* $\operatorname{fr}(X)$ *est équisécable le long de Y en y.*

Preuve. – Pour montrer (i), on suppose qu'existe $y \in Y$ tel que $\dim((\mathcal{C}_Y Z)_y) > k-d$ et montre qu'alors Z n'est pas normalement pseudo-plat au-dessus de Y.

Soit une stratification (b)-régulière $\Sigma = \{Z_i\}_{i \in I}$ du sous-analytique fermé de dimension $\leqslant k$, $\operatorname{adh}(Z) \cup Y$, compatible avec Y et Z (ces deux ensembles sont réunion de strates) et considérons $Z_{i_0} \in \Sigma$, $Z_{i_0} \subset Y$ telle que $y \in \operatorname{adh}(Z_{i_0})$ et $\dim(Z_{i_0}) = d$. On observe que quel que soit $y' \in Z_{i_0}$, $(\mathcal{C}_Y Z)_{y'} = (\mathcal{C}_{Z_{i_0}} Z)_{y'} = (\mathcal{C}_{Z_{i_0}} \operatorname{adh}(Z))_{y'}$.

Soit maintenant $\nu : [0,1] \to Z_{i_0}$ un arc analytique tel que $\nu(]0,1]) \subset Z_{i_0}$ et $\nu(0) = y$. Pour tout $t \in]0,1]$, on a : $\dim((\mathcal{C}_Y Z)_{\nu(t)}) \leqslant k-d$. En effet, il est prouvé dans [24] et [20], que si un sous-analytique fermé F de $\mathbb{R}^n$ est muni d'une stratification (b)-régulière Σ, l'égalité $(\mathcal{C}_{Z_i} F)_z = \mathcal{C}_z(F \cap (z + Z_i^\perp))$ a lieu, quels que soient la strate Z_i de Σ et $z \in Z_i$. Or la (a)-régularité de Σ donne $\dim(F \cap (z + Z_i^\perp)) \leqslant \dim(F) - d$.

En notant $N = (\nu(t), (\mathcal{C}_Y Z)_{\nu(t)}))_{t \neq 0}$ on obtient la majoration : $\dim(N) \leqslant k-d+1$. Comme $\{y\} \times (\mathcal{C}_Y Z)_y \not\subset N$ et $\dim(\operatorname{adh}(N) \setminus N) \leqslant \dim(N) - 1 \leqslant k-d$, on a nécessairement $\{y\} \times (\mathcal{C}_Y Z)_y \not\subset \operatorname{adh}(N)$ et on en déduit que l'on peut trouver un ouvert de $Y \times \mathrm{S}^{k-d-1}$ qui coupe $\{y\} \times (\mathcal{C}_Y Z)_y$ mais non $N = (\nu(t), (\mathcal{C}_Y Z)_{\nu(t)})_{t \in]0,\varepsilon[}$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. En conséquence, la projection $\sigma_{|\mathcal{C}_Y \mathcal{Y}} : \mathcal{C}_Y \mathcal{Y} \to Y$ ne saurait être ouverte et le premier point du lemme est prouvé.

Pour montrer (ii) il suffit de remarquer que (X,Y) est $f_{\operatorname{cod}(n-d-1)}$-régulier en y si et seulement si $\operatorname{fr}(X)$ est équisécable le long de Y en y. Le lemme 2.3 termine alors la preuve. □

Remarque. – On a au passage prouvé que la dimension générique des fibres de $\mathcal{C}_Y Z$ est $\dim(Z) - \dim(Y)$. En particulier, la condition $f_{\operatorname{cod}(n-d-1)}$ est générique le long de Y.

Comme corollaire du lemme 2.3 on donne une preuve simple du théorème 0.1 (ii) de Hironaka dans le langage installé par la proposition 1.8 ; celui des profils polaires locaux.

Preuve de 0.1 (ii). – Soit $\mathcal{Y} \subset \mathcal{A}$ un ensemble analytique complexe non singulier de dimension d et $y \in Y$ et supposons $\mathcal{A}$ normalement pseudo-plat le long de $\mathcal{Y}$ au voisinage de y.

Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{Y}$ de limite $y = y_\infty$, on montre que $\lim_{n \to \infty} e(\mathcal{A}, y_n) = e(\mathcal{A}, y_\infty)$, $e(\mathcal{A}, y_n)$ désignant la multiplicité de $\mathcal{A}$ en y_n, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Par les lemmes 2.4 (i) et 2.3, $\mathcal{A}$ est équisécable le long de $\mathcal{Y}$ au voisinage de y_∞ : il existe un ouvert de Zariski $\widetilde{\mathcal{G}}_{y_\infty}$ de $\mathbb{G}(k,n)$ (la Grassmannienne des k-plans complexes de $\mathbb{C}^n$), tel que pour tout $V \in \widetilde{\mathcal{G}}_{y_\infty}$, on ait un réel $\rho_V > 0$, avec la propriété :

$$\big(\operatorname{adh}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{B}_{(y_\infty, \rho_V)} \setminus \mathcal{Y}\big) \cap \pi_V^{-1}(\mathcal{Y}) = \emptyset.$$

Soit $V \in \widetilde{\mathcal{G}}_{y_\infty} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \infty} \mathcal{E}_{\mathcal{A}_{y_n}}$ (qui n'est pas vide par le lemme 1.4). Considérons V comme un $2k$-plan réel, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{Y}$ comme des ensembles sous-analytiques de $\mathbb{R}^{2n}$, respectivement de dimension $2k$ et $2d$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on a :

$$\big(\mathrm{adh}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{B}_{(y_\infty,\rho_\mathcal{V})} \smallsetminus \{y_n\}\big) \cap \pi_\mathcal{V}^{-1}(\{y_n\}) = \emptyset.$$

On peut donc supposer, dès que $r < \rho_\mathcal{V}$, que $\mathrm{K}_1^{r,V}, \ldots, \mathrm{K}_{n_{y_\infty},V}^{r,V}$ (*cf.* proposition 1.8 (iv)) sont des représentants des profils polaires locaux de $\mathcal{A}_{y_\infty}$, et que pour n suffisamment grand, pour tout $j \in \{1, \ldots, n_{y_n,V}\}$ il existe $p_j \in \{1, \ldots, n_{y_\infty,V}\}$ tel que :

$$\mathcal{K}_j^{\mathcal{A}_{y_n},V} = \big(\mathrm{K}_{p_j}^{r,V}\big)_{y_n} \quad \text{et} \quad e_j^{\mathcal{A}_{y_n},V} = e_{p_j}^{\mathcal{A}_{y_\infty},V}.$$

La transversalité en y_n, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, de $V^\perp$ et $\mathcal{A}$, c'est-à-dire $V^\perp \cap \mathcal{C}_{y_n}\mathcal{A} = \{0\}$, assure alors (*cf.* [63]) que $n_{y_\infty,V} = 1$, $e_1^{\mathcal{A}_{y_\infty},V} = e(\mathcal{A}, y_\infty)$ et $e_1^{\mathcal{A}_{y_n},V} = e(\mathcal{A}, y_n)$. □

On en vient maintenant à la proposition principale de cette section :

PROPOSITION 2.5. – *Soit Z un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension pure n. Si le couple (Z, Y) est $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régulier, la restriction à Y de la fonction densité de Z est continue.*

On en déduit facilement la proposition qui suit.

PROPOSITION 2.6. – *Soient $X^{\mathrm{rég}}$ l'intérieur de X et Σ une stratification de $\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}})$. Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée, la restriction à Y de la fonction densité de X est continue.*

(i) $\mathrm{fr}(X)$ *ou* $\mathrm{fr}(\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}}))$ *est normalement pseudo-plat le long de Y.*
(ii) $\dim((\mathcal{C}_Y \,\mathrm{fr}(X))_y)$ *ou* $\dim((\mathcal{C}_Y \,\mathrm{fr}(\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}})))_y)$ *est majoré par $k - d - 1$, pour tout $y \in Y$.*
(iii) (X, Y) *ou* $(\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}}), Y)$ *est $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régulier.*
(iv) *$Y \in \Sigma$ et Σ est de Whitney ou normalement pseudo-plate.*

Preuve. – Pour montrer la continuité de $\Theta_n(X, \cdot)$ le long de Y, il suffit de montrer la continuité de $\Theta_n(\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}}), \cdot)_{|Y}$. Le sous-analytique $\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}})$ étant de dimension pure n, la proposition 2.5 permet de conclure lorsque $(\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}}), Y)$ est $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régulier. Comme l'inclusion $\mathrm{fr}(\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}})) \subset \mathrm{fr}(X)$ montre que le couple $(\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}}), Y)$ est $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régulier lorsque (X, Y) l'est, par le lemme 2.3 les deux premières hypothèses impliquent la conclusion. La dernière hypothèse assure également la conclusion, car par [20] ou [43] le long de strates de Whitney un fermé est normalement pseudo-plat □

Il ne reste qu'à prouver la proposition 2.5 pour conclure l'étude de la continuité de la densité des sous-analytiques de dimension n de $\mathbb{R}^n$. C'est à cette preuve que l'on se consacre maintenant.

Pour tout entier $\ell \in [1, n-1]$, notons φ_ℓ les coordonnées sphériques sur $\mathrm{S}^{n-\ell-1}$. Si $\ell = n-1$, on pose $P_{n-1} = \{-1, 1\}$ et $\varphi_{n-1} = \mathrm{Id}_{P_{n-1}}$, et si $\ell < n-1$, on pose

$$\begin{aligned} \varphi_\ell : P_\ell =]0, 2\pi[\times]0, \pi[^{n-\ell-2} &\longrightarrow \mathrm{S}^{n-\ell-1}, \\ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-\ell-1}) &\longmapsto \varphi_\ell(\theta) = (\delta_1^\ell, \ldots, \delta_{n-\ell}^\ell), \end{aligned}$$

où classiquement φ_ℓ est défini par récurrence de la façon suivante :

$$\varphi_{n-2}(\theta_1) = \big(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)\big),$$

et pour tout $\ell \in [1, n-3]$, on pose :

$$\delta_1^\ell = \sin(\theta_{n-\ell-1})\delta_1^{\ell+1},$$
$$\dots$$
$$\delta_{n-\ell-1}^\ell = \sin(\theta_{n-\ell-1})\delta_{n-\ell-1}^{\ell+1},$$
$$\delta_{n-\ell}^\ell = \cos(\theta_{n-\ell-1}).$$

Notons alors :

$$\Phi : \mathbb{R}^d \times P_d \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$\xi = (x_1, \dots, x_d, \theta, \rho) \longmapsto \zeta = (x_1, \dots, x_n) = \big(x_1, \dots, x_d, \rho\varphi_d(\theta)\big).$$

Soit Z un sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension pure n. Dans [29], sont introduits les ensembles suivants pour $\varepsilon > 0$ et x dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}_{Z,x,\varepsilon}$ est le cône de sommet x engendré par $\mathrm{B}_{(x,\varepsilon)} \cap Z$ et $\mathcal{I}_{Z,x} = \bigcap_\varepsilon \mathcal{C}_{Z,x,\varepsilon}$.

La preuve de la proposition 2.5 s'appuie sur l'égalité suivante, tirée de [29].

PROPOSITION 2.7 ([29], Proposition 2.1). – *Si μ_n désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a* :

$$\Theta_n(Z,x) = \frac{1}{\mu_n}\mathcal{H}^n(\mathrm{B}_{(x,1)} \cap \mathcal{I}_{Z,x}).$$

Notation. – Notons $\frac{1}{2}\mathrm{B}_{d+1} = \{(x_1, \dots, x_d, \rho) \in \mathbb{R}^{d+1};\ \|(x_1, \dots, x_d, \rho)\| \leqslant 1,\ \rho > 0\}$ la demi-boule supérieure de $\mathbb{R}^{d+1}$ et $R_{n,d}$ la quantité :

$$R_{n,d} = \int\limits_{\frac{1}{2}\mathrm{B}_{d+1}} \rho^{n-d-1}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d+1}(x_1, \dots, x_d, \rho).$$

Un $(d+1)$-demi-plan ouvert Π de $\mathbb{R}^n$ de bord $Y = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$, donné par un vecteur unitaire de $Y^\perp = \{0\}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ de coordonnées θ sera noté Π_θ. Si le couple (Z,Y) est $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régulier en y et si $\mathcal{M}_y \subset \mathrm{S}^{n-d-1} \subset (\mathrm{T}_y Y)^\perp = Y^\perp$ est le sous-analytique dense dans S^{n-d-1} de la définition 2.2, on note : $\mathcal{P}_y = \varphi_d^{-1}(\mathcal{M}_y) \subset P =]0,2\pi[\times]0,\pi[^{n-d-2}$ et $\mathcal{Q}_y = \{\theta \in \mathcal{P}_y;\ (\Pi_\theta)_y = (Z \cap \Pi_\theta)_y\}$.

LEMME 2.8. – *Si le couple (Z,Y) $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régulier en y, on a l'égalité* :

$$\Theta_n(Z,y) = \frac{R_{n,d}}{\mu_n}\int\limits_{\theta \in \mathcal{Q}_y} F(\theta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-d-1}(\theta),$$

où $F(\theta)$ est une fonction analytique.

Preuve. – Si $\chi_{[E]}$ désigne la fonction caractéristique d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, en tenant compte de la proposition 2.7, on a :

$$\Theta_n(Z,y) = \frac{1}{\mu_n}\mathcal{H}^n(\mathrm{B}_{(y,1)} \cap \mathcal{I}_{Z,y}) = \frac{1}{\mu_n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{[\mathrm{B}_{(y,1)} \cap \mathcal{I}_{Z,y}]}(\zeta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(\zeta).$$

En notant $\check{\xi}$ la variable $(x_1, \dots, x_d, \rho)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$, le théorème de changement de variables et le théorème d'intégration ([14], 3.2.12) sur les fibres de la projection $p : \mathbb{R}^d \times P_d \times \mathbb{R}_+^* \to P_d$ donnent successivement :

$$
\begin{aligned}
\Theta_n(Z,y) &= \frac{1}{\mu_n} \int\limits_{\mathbb{R}^d\times P_d\times\mathbb{R}_+^*} \big(\chi_{[\mathrm{B}_{(y,1)}\cap\mathcal{I}_{Z,y}]}\circ\Phi\big)(\xi)|\mathrm{Jac}\,\Phi(\xi)|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(\xi)\\
&= \frac{1}{\mu_n}\int\limits_{\theta\in P_d}\Bigg(\int\limits_{p^{-1}(\theta)=\mathbb{R}^d\times\{\theta\}\times\mathbb{R}_+^*} \chi_{[\Phi^{-1}(\mathrm{B}_{(y,1)}\cap\mathcal{I}_{Z,y})]}(\xi)|\mathrm{Jac}\,\Phi(\xi)|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d+1}(\xi)\Bigg)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-d-1}(\theta)\\
&= \frac{1}{\mu_n}\int\limits_{\theta\in P_d} F(\theta)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+^*}\rho^{n-d-1}\chi_{[\Pi_\theta\cap\mathrm{B}_{(y,1)}\cap\mathcal{I}_{Z,y}]}(\xi)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d+1}(\check{\xi})\Bigg)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-d-1}(\theta)\\
&= \frac{1}{\mu_n}\int\limits_{\theta\in\mathcal{P}_y} F(\theta)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+^*}\rho^{n-d-1}\chi_{[\mathrm{B}_{(y,1)}\cap\mathcal{I}_{Z\cap\Pi_\theta,y}]}(\xi)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d+1}(\check{\xi})\Bigg)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-d-1}(\theta).
\end{aligned}
$$

La dernière égalité provient de la stabilité de $\mathcal{I}_{Z,y}$ par sections planes et de la densité de $\mathcal{P}_y$ dans P_d, et l'avant-dernière de l'égalité $|\mathrm{Jac}\,\Phi(\xi)| = \rho^{n-d-1}F(\theta)$, avec $F(\theta)$ une fonction analytique.

Mais si $\theta\in\mathcal{P}_y\setminus\mathcal{Q}_y$, le germe $(Z\cap\Pi_\theta,y)$ est vide et $\mathcal{I}_{Z\cap\Pi_\theta,y}$ est également vide et si $\theta\in\mathcal{Q}_y$, on a $(\Pi_\theta)_y=(\Pi_\theta\cap Z)_y$ et par conséquent $\mathrm{B}_{(y,1)}\cap\mathcal{I}_{Z\cap\Pi_\theta},y=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}_{d+1}$. On en déduit donc :

$$
\begin{aligned}
\Theta_n(Z,y) &= \frac{1}{\mu_n}\int\limits_{\theta\in\mathcal{Q}_y} F(\theta)\Bigg(\int\limits_{\check{\xi}\in\frac{1}{2}\,\mathrm{B}_{d+1}}\rho^{n-d-1}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d+1}(\check{\xi})\Bigg)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-d-1}(\theta)\\
&= \frac{R_{n,d}}{\mu_n}\int\limits_{\theta\in\mathcal{Q}_y} F(\theta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-d-1}(\theta).
\end{aligned}
$$

Remarque. – La formule du lemme 2.8 a trivialement lieu sous les mêmes hypothèses pour $d=n-1$, avec $P_{n-1}=\{-1,1\}$ et $F=\chi_{[P_{n-1}]}$.

On est maintenant en mesure de prouver la proposition 2.5.

Preuve de la proposition 2.5. – Si $d=n-1$, par définition même de la $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régularité, la densité de Z en y est localement constante (et égale à 0, 1/2 ou 1), donc constante le long de Y.

Si $d\leqslant n-2$ montrons que $\lim_{Y\ni y\to 0}\Theta_n(Z,y)=\Theta_n(Z,0)$.

Le couple (Y,Z) étant $f_{\mathrm{cod}(n-d-1)}$-régulier le long de Y, en chaque point y de Y sont définis les sous-analytiques $\mathcal{M}_y$ de $\mathrm{S}^{n-d-1}\subset(\mathrm{T}_yY)^\perp$, $\mathbb{P}_y=\varphi_d^{-1}(\mathcal{M}_y)$ et $\mathcal{Q}_y=\{\theta\in\mathcal{P}_y\,;\,(\Pi_\theta)_y=(Z\cap\Pi_\theta)_y\}$ de $P=]0,2\pi[\times]0,\pi[^{n-d-2}$. D'après le lemme 2.8, l'égalité suivante a lieu :

$$
\Theta_n(Z,y)=\frac{R_{n,d}}{\mu_n}\int\limits_{\theta\in P_d}F(\theta)\chi_{[\mathcal{Q}_y]}(\theta)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-d-1}(\theta).
$$

Comme par hypothèse, $\mathcal{P}_0$ est un sous-analytique dense de P_d et que les conditions « appartenir à $\mathcal{Q}_y$ » et « ne pas appartenir à $\mathcal{Q}_y$ » sont ouvertes le long de Y, le théorème de continuité sous le signe somme conclut la preuve de la proposition 2.5. □

Remarque. – Dans les énoncés que l'on vient de prouver, Y est arbitrairement situé relativement au sous-analytique X (ou Z) dont on calcule la densité. Il n'est pas nécessaire par exemple de supposer que $Y\subset\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}})$ pour que ces énoncés soient valides (excepté bien sûr, lorsque Y est une strate d'une stratification de Whitney de $\mathrm{adh}(X^{\mathrm{rég}})$).

3. Le cas général

On démontre ici les théorèmes 0.3 et 0.4, le sous-analytique $X \subset \mathbb{R}^n$ est donc de dimension k, avec $k < n$ et $Y = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$, $d < k$.

Le sous-analytique $\mathcal{D} = \{V \in \mathbb{G}(k,n);\ V^\perp \oplus Y = \mathbb{R}^n\}$ est dense dans $\mathbb{G}(k,n)$ par le lemme 1.4 (i). Dans la suite on supposera, sans le rappeler, que les k-plans V que l'on considère sont des éléments de $\mathcal{D}$; pour de tels k-plans $\pi_V(Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, nous l'identifierons systématiquement à Y. Ainsi, $\pi_V^{-1}(Y)$ signifiera $\pi_V^{-1}(\pi_V(Y))$.

LEMME 3.1. – *Soit Z un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$. Notons $s = \dim((\mathcal{C}_Y Z)_0)$ et soit $\ell \in [d+s, n]$.*

(i) *Pour tout supplémentaire S de Y dans $\mathbb{R}^n$, il existe un ensemble sous-analytique dense $\mathcal{S}^\ell$ dans la Grassmannienne $\mathbb{G}(n-\ell, n-d)$ des $(n-\ell)$-plans de S, tel que pour tout $V \in \mathbb{G}(\ell,n)$, $V^\perp \in \mathcal{S}^\ell$, existe un réel $\alpha_V > 0$ pour lequel : $(\mathcal{C}_Y^{S\cap V}\pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}))_y = \pi_V((\mathcal{C}_Y^S Z)_y)$, pour tout $y \in Y \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}$.*

(ii) *Il existe un ensemble sous-analytique dense $\mathcal{R}^\ell$ dans $\mathbb{G}(\ell,n)$ tel qu'à tout $V \in \mathcal{R}^\ell$, on puisse associer un réel $\beta_V > 0$ assurant : $\dim((\mathcal{C}_Y \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\beta_V)}))_y) \leqslant \dim((\mathcal{C}_Y Z)_y)$, pour tout $y \in Y \cap \mathrm{B}_{(0,\beta_V)}$.*

En particulier, si $\dim((\mathcal{C}_Y Z)_y) \leqslant k-d$, un tel sous-analytique dense $\mathcal{R}^k \subset \mathbb{G}(k,n)$ existe.

Preuve. – Soit S un supplémentaire de Y dans $\mathbb{R}^n$. Si $V^\perp \subset S$, on a bien sûr $V = (S \cap V) \oplus Y$ et en notant $p_S^{\mathbb{R}^n}$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur Y associée à la somme directe $\mathbb{R}^n = S \oplus Y$, et $p_{S\cap V}^V$ la projection linéaire de V sur Y donnée par la somme directe $V = (S \cap V) \oplus Y$, on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{p_S^{\mathbb{R}^n}} & Y \\ {\scriptstyle \pi_V V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_V} \\ V & \xrightarrow{p_{S\cap V}^V} & Y \end{array}$$

Puisque $\ell \geqslant d+s$ et $\dim((\mathcal{C}_Y^S Z)_0) = \dim((\mathcal{C}_Y Z)_0)$, le lemme 1.4 (i) donne l'existence d'un ensemble sous-analytique $\mathcal{S}^\ell$ dense dans la Grassmannienne des $(n-\ell)$-plans de S, tel que :

$$(*) \qquad V \in \mathbb{G}(\ell,n), \quad V^\perp \in \mathcal{S}^\ell \Longrightarrow V^\perp \cap \left(\mathcal{C}_Y^S Z\right)_0 = \{0\}.$$

Mais facilement, cette condition est ouverte le long de Y, c'est-à-dire que :

$$(**) \quad \forall V \in \mathbb{G}(\ell,n),\ V^\perp \in \mathcal{S}^\ell,\ \exists \alpha'_V > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{B}_{(0,\alpha'_V)},\ V^\perp \cap (\mathcal{C}_Y^S Z)_x = \{0\}.$$

On a également, à la suite de (*) :

$$(***) \quad \forall V \in \mathbb{G}(\ell,n),\ V^\perp \in \mathcal{S}^\ell,\ \exists \alpha''_V > 0 \text{ tel que } \left(\mathrm{adh}(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha''_V)}) \setminus Y\right) \cap \pi_V^{-1}(Y) = \emptyset.$$

Posons alors $\alpha_V = \min(\alpha'_V, \alpha''_V)$ et montrons que pour tout $y \in \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}$ on a l'égalité :

$$\left(\mathcal{C}_Y^{S\cap V}\pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)})\right)_y = \pi_V\left((\mathcal{C}_Y^S Z)_y\right).$$

Fixons $y \in \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}$ et soit $\delta \in (\mathcal{C}_Y^{S\cap V}\pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}))_y$, $|\delta| = 1$. Il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}$ telle que $(\pi_V(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, $\pi_V(y_n) \notin Y$ et la direction de $\pi_V(y_n) - p_{S\cap V}^V(\pi_V(y_n))$ converge vers celle de δ. L'égalité (***) montre que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Notons alors, puisque $y_n \notin Y$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{R}_+(y_n - p_S^{\mathbb{R}^n}(\pi_V(y_n))) = \mathbb{R}_+\tilde{\delta}$, $\tilde{\delta} \in (\mathcal{C}_Y^S Z)_y \cap \mathrm{S}^{n-d-1}$. Comme le diagramme ci-dessus est commutatif et que par (**), $V^\perp \cap (\mathcal{C}_Y^S Z)_y = \{0\}$, on a $\pi_V(\mathbb{R}_+ \cdot \tilde{\delta}) = \mathbb{R}_+ \cdot \delta$ et donc l'inclusion :

$$\left(\mathcal{C}_Y^{S\cap V} \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)})\right)_y \subset \pi_V\left((\mathcal{C}_Y^S Z)_y\right).$$

L'inclusion réciproque étant toujours vérifiée, la première partie du lemme est démontrée.

Montrons maintenant (ii). Supposons l'ensemble sous-analytique :

$$\mathcal{F} = \left\{V \in \mathbb{G}(\ell,n);\ \forall \beta > 0,\ \exists y \in \mathrm{B}_{(0,\beta)},\ \dim\left(\left(\mathcal{C}_Y \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\beta)})\right)_y\right) > \dim\left((\mathcal{C}_Y Z)_y\right)\right\}$$

d'intérieur non vide dans $\mathbb{G}(\ell,n)$, $\{V^\perp;\ V \in \mathcal{F}\}$ rencontre alors tout ensemble dense de $\mathcal{S}^\ell$, et si $V^\perp \in \mathcal{S}^\ell$, d'après ce qui précède : $(\mathcal{C}_Y^{S\cap V} \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}))_y = \pi_V((\mathcal{C}_Y^S Z)_y)$, pour tout $y \in Y \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}$. Or :

$$\dim\left(\left(\mathcal{C}_Y^{S\cap V} \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)})\right)_y\right) = \dim\left(\left(\mathcal{C}_Y \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)})\right)_y\right)$$

et

$$\dim\left(\pi_V\left((\mathcal{C}_Y^S Z)_y\right)\right) = \dim\left((\mathcal{C}_Y^S Z)_y\right), \quad \text{pour } V^\perp \text{ générique dans } \mathcal{S}^\ell.$$

Donc, si $V \in \mathbb{G}(\ell,n)$ et $V^\perp$ est générique dans $\mathcal{S}^\ell$, pour tout $y \in Y \cap \mathrm{B}_{(0,\alpha_V)}$, on a :

$$\dim\left(\left(\mathcal{C}_Y \pi_V(Z \cap \mathrm{B}_{(0,\beta_V)})\right)_y\right) = \dim\left((\mathcal{C}_Y Z)_y\right).$$

Cette contradiction termine la preuve. □

PROPOSITION 3.2. – *Supposons que* $\dim((\mathcal{C}_Y X)_0) \leqslant k - d$ *et que pour* $\gamma_{k,n}$*-presque tout* $V \in \mathcal{E}_X$ *existe un représentant* $\Delta_0(X,V)$ *du lieu discriminant local de* X_0 *en* 0 *associé à* V, *tel qu'on ait l'existence d'un voisinage ouvert* $\mathcal{U}_V$ *de* 0 *dans* Y *tel que* :

$$\forall y \in \mathcal{U}_V, \quad \dim\left(\mathcal{C}_Y\left(\Delta_0(X,V)\right)_y\right) \leqslant k - d - 1.$$

La restriction $\Theta_k(X,\cdot)_{|Y}$ *à* Y *de la fonction densité de* X *est alors continue en* 0.

On retiendra que lorsque localement en l'origine la dimension des fibres des cônes normaux à Y dans X et dans les lieux discriminants locaux généraux n'excède pas la dimension générique, la densité de X restreinte à Y est continue.

Preuve. – Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Y ayant 0 pour limite, notons 0 par y_∞ et montrons que $\lim_{n\to\infty} \Theta_k(X, y_n) = \Theta_k(X, y_\infty)$.

Comme par hypothèse $\dim((\mathcal{C}_Y X)_{y_\infty}) \leqslant k - d$, le lemme 2.3 donne l'existence du sous-analytique dense $\mathcal{G}_{y_\infty}$ de $\mathbb{G}(k,n)$. Quitte à couper cet ensemble par un autre ensemble de complémentaire $\gamma_{k,n}$-négligeable dans $\mathbb{G}(k,n)$, on peut supposer que pour tout $V \in \mathcal{G}_{y_\infty}$ et pour des représentants $\mathcal{K}_1^{X_\infty,V}, \ldots, \mathcal{K}_{n_{y_\infty},V}^{X_\infty,V}$ des profils polaires locaux de X_{y_∞} en y_∞ associés à V, on ait un voisinage ouvert $\mathcal{U}_V$ de y_∞ dans Y tel que :

$$\forall y \in \mathcal{U}_V, \quad \dim\left(\left(\mathcal{C}_Y \operatorname{fr}\left(\bigcup_{j\in\{1,\ldots,n_{y_\infty},V\}} \mathcal{K}_j^{X_\infty,V}\right)\right)_y\right) \leqslant k - d - 1,$$

puisque fr $\left(\bigcup_{j\in\{1,\ldots,n_{y_\infty,V}\}}\mathcal{K}_j^{X_\infty,V}\right)=\Delta_0(X,V)$. Par ailleurs, la formule de Cauchy–Crofton pour la densité (théorème 1.10), donne pour tout $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$:

$$\Theta_k(X,y_n)=\int\limits_{V\in\mathcal{E}_{X_{y_n}}}\sum_{j=1}^{n_{y_n,V}} e_j^{X_{y_n},V}\,\Theta_k\big(\mathcal{K}_j^{X_{y_n},V},y_n\big)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

Comme la version non locale de 1.9 (*cf.* aussi [15], [17], [18], [19] ou [8]) donne une majoration uniforme des $e_j^{X_y,V}$, pour y dans un voisinage de y_∞, il suffit de prouver que pour V générique dans $\mathcal{G}_{y_\infty}$ a lieu l'égalité :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n_{y_n,V}} e_j^{X_{y_n},V}\,\Theta_k\big(\mathcal{K}_j^{X_{y_n},V},y_n\big)=\sum_{j=1}^{n_{y_\infty,V}} e_j^{X_{y_\infty},V}\,\Theta_k\big(\mathcal{K}_j^{X_{y_\infty},V},y_\infty\big).$$

Fixons pour cela $V\in\mathcal{G}_\infty$. Si $r<\rho_V$ (ρ_V est donné par 2.3), $\big(\mathrm{adh}(X\cap\mathrm{B}_{(y_\infty,r)})\setminus Y\big)\cap\pi_V^{-1}(Y)=\emptyset$ et a fortiori, quel que soit $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$:

$$\big(\mathrm{adh}(X\cap\mathrm{B}_{(y_\infty,r)})\setminus\{y_n\}\big)\cap\pi_V^{-1}(\{y_n\})=\emptyset.$$

Cette dernière égalité pour $n=\infty$ assure que les ouverts $\mathrm{K}_j^{r,V}$ sont des représentants des profils polaires locaux de X_{y_∞} en y_∞ associés à V, et que pour n assez grand, pour chaque profil polaire local $\mathcal{K}_j^{X_{y_n},V}$, $j\in\{1,\ldots,n_{y_n,V}\}$, de X_{y_n} en y_n associé à V, il existe $p_j\in\{1,\ldots,n_{y_\infty,V}\}$ tel que :

$$\mathcal{K}_j^{X_{y_n},V}=\big(\mathrm{K}_{p_j}^{r,V}\big)_{y_n}\quad\text{et}\quad e_j^{X_{y_n},V}=e_{p_j}^{X_{y_\infty},V}.$$

Avec la convention $\Theta_k(\mathrm{K}_{p_j}^{r,V},y_n)=0$ si $y_n\notin\mathrm{adh}(\mathrm{K}_{p_j}^{r,V})$, on obtient pour n suffisamment grand :

$$\sum_{j=1}^{n_{y_n,V}} e_j^{X_{y_n},V}\,\Theta_k\big(\mathcal{K}_j^{X_{y_n},V},y_n\big)=\sum_{j=1}^{n_{y_\infty,V}} e_j^{X_{y_\infty},V}\,\Theta_k\big(\mathrm{K}_j^{r,V},y_n\big).$$

Par hypothèse, quel que soit $j\in\{1,\ldots,n_{y_\infty,V}\}$, $\dim((\mathcal{C}_Y\,\mathrm{fr}(\mathrm{K}_j^{r,V}))_y)\leqslant k-d-1$, dès que y_n est proche de y_∞. La proposition 2.6 permet alors d'écrire : $\lim_{n\to\infty}\Theta_k(\mathrm{K}_j^{r,V},y_n)=\Theta_k(\mathrm{K}_j^{r,V},y_\infty)=\Theta_k(\mathcal{K}_j^{X_{y_\infty},V},y_\infty)$, et de conclure. □

Preuve du théorème 0.3. – Ce théorème résulte immédiatement de la proposition 3.2 et du lemme 2.4 (i) (resp. du lemme 2.3). □

Parce que la définition $(\mathcal{E})$ de l'équisingularité opère par induction, elle indique naturellement la définition suivante des lieux discriminants locaux itérés : lieux discriminants locaux de lieux discriminants locaux... Et le théorème 0.3 conduit immédiatement au corollaire 3.6.

DÉFINITION 3.3. – Étant donné $V\in\mathcal{E}_X$, le lieu discriminant local (à l'origine) $\Delta_0(X,V)$ associé à V admet lui-même des lieux discriminants locaux (à l'origine) et ainsi de suite. On définit par induction *la suite des lieux discriminants locaux généraux itérés* :

$$\big(X_0,\big(\Delta_0(X,V)\big)_{V\in\mathcal{E}_X},\big(\Delta_0\big(\Delta_0(X,V),V'\big)\big)_{V\in\mathcal{E}_X,V'\in\mathcal{E}_{\Delta_0(X,V)}},\ldots,0\big).$$

On dit que cette suite est *normalement pseudo-plate le long de* Y, si ses éléments généraux le sont.

COROLLAIRE 3.4. – *Si la suite des lieux discriminants locaux généraux itérés est normalement pseudo-plate le long de Y, la densité des lieux discriminants locaux généraux itérés est continue le long de Y.*

PROPOSITION 3.5. – *Supposons que* $\dim((\mathcal{C}_Y X)_0) \leqslant k-d$*, que pour y dans un voisinage de* 0, $\dim((\mathcal{C}_Y \operatorname{fr} X)_y) \leqslant k-d-1$*, et que pour $\gamma_{k,n}$-presque tout $V \in \mathcal{E}_X$ et pour des représentants $\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}$ et $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}})$ respectivement du lieu polaire local et de l'image polaire locale en l'origine de X_0 associés à V, existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_V$ de 0 dans Y tel que :*

$$\forall y \in \mathcal{U}_V, \quad \dim\big((\mathcal{C}_Y \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}))_y\big) \leqslant k-d-1 \quad \textit{ou} \quad \dim\big((\mathcal{C}_Y \mathcal{C}_{\pi_{V|X}})_y\big) \leqslant k-d-1.$$

La restriction $\Theta_k(X,\cdot)_{|Y}$ à Y de la fonction densité de X est alors continue en 0.

Preuve. – On se ramène aux hypothèses de la proposition 3.2. Considérons pour V général dans $\mathcal{G}_0$, le représentant $\Delta_0^r(X,V) = \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X\cap \mathrm{B}_{(0,r)}}} \cup \operatorname{fr}(X \cap \mathrm{B}_{(0,r)}))$ du lieu discriminant local de X en l'origine, r étant un réel qui vérifie $0 < r < \rho_V$ (ρ_V donné pas le lemme 2.3). On a, pour tout $y \in Y$, suffisamment proche de l'origine et pour tout $\beta \in]0,\rho_V]$:

$$\big(\mathcal{C}_Y \Delta_0^r(X,V)\big)_y = \big(\mathcal{C}_Y \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}})\big)_y \cup \big(\mathcal{C}_Y \pi_V(\operatorname{fr}(X) \cap \mathrm{B}_{(0,\beta)})\big)_y.$$

Or, comme par hypothèse au voisinage de l'origine la dimension de la fibre du cône normal à Y dans $\operatorname{fr}(X)$ est majorée par sa dimension générique $k-d-1$, le lemme 3.1 (ii) montre que dès que y est dans un certain voisinage de 0 et dès que β est suffisamment petit, $\dim((\mathcal{C}_Y \pi_V(\operatorname{fr}(X) \cap \mathrm{B}_{(0,\beta)}))_y) \leqslant \dim((\mathcal{C}_Y \operatorname{fr}(X))_y) \leqslant k-d-1$.

Les hypothèses de la proposition 3.2 sont alors satisfaites si et seulement si la dimension de $(\mathcal{C}_Y \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}))_y$ est majorée par $k-d-1$, pour y au voisinage de l'origine. Supposons donc que $\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}$ soit un représentant du lieu polaire local à l'origine de X_0 associé à V, vérifiant $\dim((\mathcal{C}_Y \mathcal{C}_{\pi_{V|X}})_y) \leqslant k-d-1$, pour y dans un voisinage de 0. Si $\beta \in]0,\rho_V]$, le lemme 2.3 montre que $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}} \cap \mathrm{B}_{(0,\beta)})$ représente l'image polaire locale à l'origine de X_0 associée à V et à nouveau grâce au lemme 3.1 (ii), on a la majoration $\dim((\mathcal{C}_Y \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}} \cap \mathrm{B}_{(0,\beta)}))_y) \leqslant \dim((\mathcal{C}_Y \mathcal{C}_{\pi_{V|X}})_y) \leqslant k-d-1$, lorsque y est proche de 0 et β est petit. □

Retour sur l'exemple donné en introduction. – Cet exemple est celui d'un semi-algébrique lisse X normalement pseudo-plat au-dessus de $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = z = 0\}$ et présentant en l'origine une discontinuité de sa fonction densité. Il illustre a contrario la proposition 3.5.

Puisque X est normalement pseudo-plat le long de Y, quel que soit $y \in Y$ on a la majoration : $\dim((\mathcal{C}_Y X)_y) \leqslant k-d = 2-1 = 1$ (lemme 2.4 (i)) et de plus $\mathcal{C}_Y \operatorname{fr}(X) = \emptyset$. La seule hypothèse de la proposition 3.5 non vérifée par X est la majoration de la dimension des fibres, au voisinage de l'origine, du cône normal à Y dans les images polaires locales générales ou dans les lieux polaires locaux généraux de X_0.

Une telle majoration signifie qu'au voisinage de l'origine les images polaires locales (ou de façon équivalente, les lieux polaires locaux) sont génériquement vides. Or, à l'origine tel n'est pas le cas : si V est un 2-plan de $\mathbb{R}^3$ distinct de (xOz), le lieu polaire local de X_0 en l'origine associé à V est un germe de courbe non vide.

Le lemme 2.4 (i) donne lieu à la version stratifiée de la proposition 3.5.

THÉORÈME 3.6. – *Soient X un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ et Y une strate d'une stratification normalement pseudo-plate de* $\operatorname{adh}(X)$. *Sous l'hypothèse de pseudo-platitude normale au-dessus des images de la strate Y (resp. au-dessus de Y) des images polaires locales (resp. des lieux polaires locaux) génériques de X, la densité de X est continue le long de Y.*

Dans la catégorie analytique complexe il est connu depuis [55] (chapitre V, théorème 1.2) et [21] que la condition (b) de Whitney pour le couple $(\mathcal{A}^{\text{rég}}, Y)$ équivaut à la constance le long de Y de la suite

$$M^*_{\mathcal{A},y} = \left(m_y\left(P_0(\mathcal{A},y)\right), m_y\left(P_1(\mathcal{A},y)\right), \ldots, m_y\left(P_{k-1}(\mathcal{A},y)\right)\right),$$

où pour tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, l'entier $m_y(P_j(\mathcal{A},y))$ désigne la multiplicité en y de la variété polaire locale de $\mathcal{A}$ en y associée à des $(k-j+1)$-plans complexes généraux de $\mathbb{C}^n$. En particulier, la condition (b) de Whitney pour le couple $(\mathcal{A}^{\text{rég}}, Y)$ implique la pseudo-platitude normale le long de Y de la variété polaire locale $P_1(\mathcal{A},y)$ associée à des k-plans généraux.

Dans la catégorie sous-analytique, et plus généralement encore dans une catégorie o-minimale, trouver des conditions (de régularité pour une stratification) en amont de la pseudo-platitude normale le long de Y des lieux polaires locaux généraux ou des images polaires locales générales des strates k-dimensionnelles, reste un problème ouvert. Par exemple, le long des strates d'une stratification de Whitney, les images polaires locales des strates k-dimensionnelles sont-elles normalement pseudo-plates (*cf.* le lemme 3.8 ci-dessous) ?

On peut toutefois prouver que le long de strates de Verdier d'un fermé les images polaires locales génériques sont équisécables (c'est-à-dire que la dimension des fibres de leur cône normal est la dimension générique), ce qui suffit pour assurer la continuité de la densité le long de ces strates :

PROPOSITION 3.7. – *Soient X un sous-analytique de $\mathbb{R}^n$, Y une strate d'une stratification de Verdier (resp. d'une stratification (b^*)-régulière, d'une stratification de Whitney avec* $\dim(Y)$) *de* $\operatorname{adh}(X)$. *Les images polaires locales génériques de X sont équisécables le long de Y.*

Preuve du théorème 0.4. – Ce théorème résulte facilement de la proposition précédente, du lemme 2.3, de la proposition 3.2, de [20] (ou [43]) et du lemme 2.4 (i). □

Pour montrer la proposition 3.7, commençons par un lemme, qui résulte également de [45].

LEMME 3.8. – *Soit Z un ensemble sous-analytique fermé de $\mathbb{R}^n$ et Y une strate d'une stratification de Whitney de Z telle que* : $\dim(Z) = t = \dim(Y) + 1$. *Les lieux polaires locaux (et les images polaires locales) de Z sont alors normalement pseudo-plats, c'est-à-dire vides, le long de Y.*

Preuve du lemme 3.8. – Le lemme 2.4 (i) montre bien l'équivalence entre la pseudo-platitude normale le long de Y des lieux polaires locaux génériques de Z et leur vacuité, car ces derniers sont de même dimension que Y.

Supposons alors qu'existent $y \in Y = \mathbb{R}^{t-1} \times \{0\}^{n-t+1}$ et un ensemble $\mathcal{J}$ d'intérieur non vide dans $\mathbb{G}(t,n)$ tel que pour tout $V \in \mathcal{J}$, le lieu polaire local de Z en y associé à V soit non vide. Soit V_0 un point intérieur de $\mathcal{J}$ et S un supplémentaire de Y dans $\mathbb{R}^n$ contenant $V_0^\perp$. On va montrer que l'ensemble $\mathcal{K} = \{V^\perp \subset S,\ V \in \mathbb{G}(t,n)\,;\ V^\perp \cap (\mathcal{C}_Y^S Z^{\text{rég}}) \neq \{0\}\}$ est non négligeable dans $\mathbb{G}(n-t, n-t+1)$, la Grassmannienne des $(n-t)$-plans de S ; [20] ou [43] et les lemmes 2.4 (i) et 1.4 (i) assureront alors la contradiction recherchée.

Pour des $(n-t)$-plans $V^\perp$ de S dans un voisinage de $V_0^\perp$, le lieu polaire local de Z associé à V est non vide. Soit $V^\perp$ dans un tel voisinage et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}_{\pi_{V|X}} \subset Z^{\text{rég}}$ de limite y donnant lieu à la direction $\mathbb{R}_+ \cdot \ell^V$ de $(\mathcal{C}_Y^S \mathcal{C}_{\pi_{V|X}})_y$. Montrons que $\mathbb{R}_+ \cdot \ell^V \subset V^\perp$. Notons (quitte à extraire de la suite $\mathrm{T}_{x_n} Z^{\text{rég}}$ de $\mathbb{G}(t,n)$ une suite convergente) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_{x_n} Z^{\text{rég}} = T$. La condition (b) donne $Y \subset \mathrm{T}$ et $\mathbb{R}_+ \cdot \ell \subset \mathrm{T}$; de plus, $\mathrm{T} \cap V^\perp \neq \{0\}$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V^\perp \cap \mathrm{T}_{x_n} Z^{\text{rég}} \neq \{0\}$. Mais les dimensions de Y et Z montrent que $\mathrm{T} \cap S = \mathbb{R}_+ \cdot \ell$ et donc nécessairement $\mathbb{R}_+ \cdot \ell \subset V^\perp$. □

Preuve de la proposition 3.7. – Si la stratification Σ de $\mathrm{adh}(X)$ que l'on considère est (w)-régulière, elle est aussi (w^*)-régulière par [40] et donc est (b^*)-régulière par [27]. De même, si cette stratification est (b)-régulière et si Y est de dimension 1, pour toute strate Z contenant Y dans son adhérence, le couple (Y, Z) est (b^*)-régulier par [40]. En particulier, il existe un sous-analytique Ω dense dans la Grassmannienne des $(d+n-k+1)$-plan de $\mathbb{R}^n$ contenant Y tel que pour tout $H \in \Omega$, $\{Z \cap H\,;\, Z \in \Sigma\}$ est une stratification de Whitney du fermé $\mathrm{adh}(X) \cap H$ (par [37], Corollaire 10.5). Remarquons qu'existe un sous-analytique dense $\mathcal{U}$ de $\mathbb{G}(k,n)$ vérifiant : pour tout $V \in \mathcal{U}$ il existe un sous-analytique dense $\mathcal{U}_V$ de la Grassmannienne des $(d+1)$-plans de V contenant (l'image de) Y tel que pour tout $U \in \mathcal{U}_V$, $U \oplus \pi_V^{-1}(U)$ est dans Ω. Montrons alors que l'image polaire locale de X associée à tout élément de $\mathcal{U}$ est équisécable. On va montrer pour cela que pour tout $(d+1)$-plan U de $\mathcal{U}_V$, $\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}) \cap U = \emptyset$.

Soit donc $V \in \mathcal{U}$, $U \in \mathcal{U}_V$ et notons $H = U \oplus \pi_V^{-1}(U) \in \Omega$. Si S est une strate de dimension k de $\mathrm{adh}(X)$, le sous-analytique $H \cap S$ est une strate de Whitney de $\mathrm{adh}(X) \cap H$ de dimension $d+1$, contenant Y dans son adhérence, par le lemme 3.8 le lieu polaire de $H \cap S$ associé à la projection de H sur U induite par V est vide. Or ce lieu polaire local est l'intersection de H et du lieu polaire local de X associé à V. On a donc $H \cap \mathcal{C}_{\pi_{V|X}} = \emptyset$ et par conséquent $U \cap \pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}) = \emptyset$. □

Remarque. – Le théorème 0.4, via la proposition 3.7, résulte du résultat fondamental de [40] : la condition (w) de Verdier implique la condition (w^*). On ne sait toujours pas si en toute généralité la condition (b) de Whitney implique la condition (b^*).

Il est montré dans [3], que même dans le cadre algébrique réel, la condition (w) est strictement plus forte que la condition (b).

Dans [38], il est annoncé que le long de strates de Verdier d'un semi-analytique les images polaires sont normalement pseudo-plates.

En vertu de la deuxième section, les énoncés 0.3, 0.4, 3.4, 3.6 et 3.7 restent vrais lorsque $k = n$, au prix de l'artifice suivant : la seule projection de $\mathbb{G}(n,n)$ est l'identité, le lieu discriminant local, l'image polaire locale et le lieu polaire local d'un sous-analytique X de codimension nulle dans $\mathbb{R}^n$, associés à l'identité, sont $\mathrm{fr}(X)$, enfin l'intérieur $X^{\text{rég}}$ de X est l'unique profil polaire local de X.

Remerciements

Je tiens à remercier K. Kurdyka, J.M. Lion, M. Merle, B. Teissier ainsi que D. Trotman, qui m'a posé la question qui a prévalu à ce travail : celle de la continuité du nombre de Lelong sur des strates de Whitney, et qui reste indécise.

Des discussions que nous avons eues j'ai pu dégager les idées qui précèdent †.

RÉFÉRENCES

[1] BESICOVITCH A.S., On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points (I), (II), (III), *Math. Ann.* **98, 115, 116** (1927, 1938, 1939) 422–464, 296–329, 346–357.

[2] BRIANÇON J., SPEDER J.P., Les conditions de Whitney impliquent μ^* constant, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **26** (1976) 153–163.

[3] BRODERSEN H., TROTMAN D., Whitney (b)-regularity is strictly weaker than Kuo's ratio test for real algebraic stratifications, *Math. Scand.* **45** (1979) 27–34.

† Ce travail a été accompli au C.M.I. de l'Université de Provence, dans sa majeure partie, ainsi qu'au Fields Institute de Toronto.

[4] COMTE G., Multiplicity of complex analytic sets and bilipschitz maps, in: Fukuda T., Fukui T., Izumiya S., Koike S. (Eds.), *Real Analytic and Algebraic Singularities*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. **381**, 1998, pp. 182–188.

[5] COMTE G., Formule de Cauchy–Crofton pour la densité des ensembles sous-analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **328** (1999) 505–508.

[6] COMTE G., LION J.-M., ROLIN J.-P., Nature Log-analytique du volume des sous-analytiques, *Illinois J. Math.* (à paraître).

[7] DEMAILLY J.-P., Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité, *Acta Math.* **159** (3–4) (1987) 153–169.

[8] DENKOWSKA Z., ŁOJASIEWICZ S., STASICA J., Sur le nombre de composantes connexes de la section d'un sous-analytique, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **XXX** (7–8) (1982) 333–335.

[9] DENKOWSKA Z., STASICA J., Ensembles sous-analytiques à la polonaise, 1985.

[10] DENKOWSKA Z., WACHTA K., Sur la sous-analyticité de l'application tangente, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **XXX** (7–8) (1982) 329–331.

[11] DRAPER R.N., Intersection theory in analytic geometry, *Math. Ann.* **180** (1969) 175–204.

[12] VAN DEN DRIES L., MILLER C., Geometric categories and o-minimal structures, *Duke Math. J.* **84** (1996) 497–540.

[13] FEDERER H., The (Φ, k) rectifiable subsets of n-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947) 114–192.

[14] FEDERER H., *Geometric Measure Theory*, Grundlehren Math. Wiss., Vol. **153**, Springer-Verlag, 1969.

[15] GABRIELOV A.M., Projections of semianalytic sets, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **2** (4) (1968) 418–430.

[16] GORESKY M., MACPHERSON R., *Stratified Morse Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), Vol. **14**, Springer-Verlag, 1988.

[17] HARDT R.M., Topological properties of subanalytic sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **211** (1975) 57–70.

[18] HARDT R.M., Stratifications of real analytic mappings and images, *Invent. Math.* **28** (1975) 193–208.

[19] HARDT R.M., Semialgebraic local triviality in semialgebraic mappings, *Amer. J. Math.* **102** (1980) 291–302.

[20] HENRY J.-P., MERLE M., Stratifications de Whitney d'un ensemble sous-analytique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A* **308** (1989) 357–360.

[21] HENRY J.-P., MERLE M., Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka, in: *Proc. Symp. in Pure Math. 40, Vol. 1*, Arcata 1981, Amer. Math. Soc., 1983, pp. 575–584.

[22] HENRY J.-P., MERLE M., Conditions de régularité et éclatements, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **37** (1987) 159–190.

[23] HENRY J.-P., MERLE M., SABBAH C., Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **17** (1984) 227–268.

[24] HIRONAKA H., Normal cones in analytic Whitney stratifications, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **36** (1970) 127–138.

[25] HIRONAKA H., Subanalytic sets, in: *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp. 453–493.

[26] KLEIMAN S., On the transversality of a general translate, *Compositio Math.* **28** (1974) 287–297.

[27] KUO T.C., The ratio test for analytic Whitney stratifications, in: Wall C.T.C. (Ed.), *Liverpool Singularities Symposium I*, Lect. Notes in Math., Vol. **192**, 1971, pp. 141–149.

[28] KURDYKA K., Points réguliers d'un sous-analytique, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **38** (1988) 133–156.

[29] KURDYKA K., RABY G., Densité des ensembles sous-analytiques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **39** (1989) 753–771.

[30] LELONG P., Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957) 239–262.

[31] LÊ DŨNG TRÁNG, RAMANUJAM C.P., The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, *Amer. J. of Math.* **98** (1976) 67–78.

[32] LÊ DŨNG TRÁNG, TEISSIER B., Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, *Ann. Math.* **114** (1981) 457–491.

[33] LÊ DŨNG TRÁNG, TEISSIER B., Cycles évanescents et conditions de Whitney II, in: *Proc. Symp. in Pure Math. 40, Vol. 2*, Arcata 1981, Amer. Math. Soc., 1983, pp. 65–103.

[34] LION J.-M., ROLIN J.-P., Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **47** (1997) 859–884.

[35] LION J.-M., ROLIN J.-P., Intégration des fonctions sous-analytiques et volume des sous-ensembles sous-analytiques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **48** (1998) 755–767.

[36] LIPMAN J.H., Equimultiplicity, reduction and blowing-up, in: *Proc. Conference on Transcendental Methods in Commutative Algebra (1979)*, Lect. Notes in P. and Appl. Math., Vol. **68**, Dekker, New York, 1982, pp. 111–147.

[37] MATHER J., *Notes on Topological Stability*, Harvard University, 1970.

[38] MAWOUSSI K.Y., Conditions de Whitney et variétés polaires en géométrie analytique réelle, *Thèse*, Université Paris-7, Denis-Diderot, 1997.

[39] NAVARRO AZNAR V., Conditions de Whitney et sections planes, *Invent. Math.* **61** (1980) 199–226.

[40] NAVARRO AZNAR V., TROTMAN D., Whitney regularity and generic wings, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **31** (1981) 87–111.

[41] ORRO P., Conditions de régularité, espaces tangents et fonctions de Morse, *Thèse*, Orsay, 1984.

[42] ORRO P., TROTMAN D., On the regular stratifications and conormal structure of subanalytic sets, *Bull. London Math. Soc.* **18** (1986) 185–191.

[43] ORRO P., TROTMAN D., Cône normal et régularités de Kuo–Verdier, *Preprint*.

[44] PARUSIŃSKI A., Lipschitz stratifications of subanalytic sets, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 4e *série* **27** (1994) 661–696.

[45] PAWŁUCKI W., Quasi-regular boundary and Stokes formula for a subanalytic leaf, in: *Seminar on Deformations, Łodz–Warsaw (1981–1983)*, Lect. Notes in Math., Vol. **1165**, Springer-Verlag, 1985, pp. 235–252.

[46] SANTALÓ L.A., Integral geometry and geometric probability, in: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 1*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1976.

[47] SCHICKHOFF W., Whitneysche Tangentenkegel, Multiplizitätsverhalten, Normal-Pseudoflachheit und Äquisingularitätstheorie für Ramissche Räume, *Schriftenreihe des Math. Inst. des Universtät Münster 2, Serie Heft* **12** (1977).

[48] SIERPIŃSKI W., Sur la densité des ensembles plans, *Fund. Math.* **9** (1927) 172–185.

[49] SIU Y.T., Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Invent. Math.* **27** (1974) 53–156.

[50] SPEDER J.P., Équisingularité et conditions de Whitney, *Amer. J. of Math.* **97** (3) (1974) 571–588.

[51] STOLL W., Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.* **57** (1952) 116–154.

[52] TAMM M., Subanalytic sets in the calculus of variations, *Acta Math.* **146** (1981) 167–199.

[53] TEISSIER B., Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, in: *Singularités à Cargèse*, Astérisque, Vol. **7–8**, 1973, pp. 285–362.

[54] TEISSIER B., Introduction to equisingularity problems, in: *Proc. Symp. in Pure Math. 29*, Arcata 1974, Amer. Math. Soc., 1975, pp. 593–632.

[55] TEISSIER B., Variétés polaires II : multiplicités polaires, sections planes et conditions de Whitney, in: *Actes de la conférence de géométrie algébrique à la Ràbida*, Lect. Notes in Math., Vol. **961**, Springer-Verlag, 1981, pp. 314–491.

[56] TEISSIER B., Tame and stratified objects, in: *Geometric Galois Actions, 1. Around Grothendieck's esquisse d'un Programme*, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. **242**, 1997, pp. 231–242.

[57] THIE P., The Lelong number of a point of a complex analytic set, *Math. Ann.* **172** (1967) 269–312.

[58] THOM R., Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969) 240–284.

[59] TROTMAN D., Comparing regularity conditions on stratifications, in: *Proc. Symp. in Pure Math. 40, Vol. 2*, Arcata 1981, Amer. Math. Soc., 1983, pp. 575–586.

[60] A.N. VARCHENKO, Theorems of topological equisingularity, *Izvestia Ak. Nauk SSSR, Ser. Math.* **36** (1972).

[61] VARCHENKO A.N., Algebro-geometrical equisingularity and local topological classification of smooth mappings, in: *Proc. Int. Congress of Mathematicians, Vol. 1*, Vancouver B.C., 1974, Canad. Math. Congress, Montreal, Quebec, 1975, pp. 427–431.

[62] VERDIER J.-L., Stratifications de Whitney et théorème de Bertini–Sard, *Invent. Math.* **36** (1976) 295–312.

[63] WHITNEY H., *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.

[64] ZARISKI O., Studies in equisingularity (I), (II), (III), *Amer. J. of Math.* **87, 87, 90** (1965, 1965, 1968) 507–536, 972–1006, 961–1023.

[65] ZARISKI O., Some open questions in the theory of singularities, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971) 481–491.

[66] ZARISKI O., On equimultiple subvarieties of algebroid hypersurfaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **72** (4) (1975) 1425–1426 [Correction : *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **72** (8) (1975) 3260].

[67] ZARISKI O., Foundations of a general theory of equisingularity on r-dimensional algebroid and algebraic varieties, of embedding dimension $r + 1$, *Amer. J. of Math.* **101** (1979) 453–514.

(Manuscrit reçu le 19 février 1999 ;
accepté, après révision, le 28 janvier 2000.)

Georges COMTE
Laboratoire J.A.-Dieudonné,
UMR CNRS 6621,
Université de Nice–Sophia-Antipolis,
28, avenue de Valrose,
06108 Nice cedex 2, France
E-mail: comte@math.unice.fr