Annales scientifiques de l'É.N.S.

Mihai Damian

Formes fermées non singulières et propriétés de finitude des groupes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 33, nº 3 (2000), p. 301-320
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_2000_4_33_3_301_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 33, 2000, p. 301 à 320.

FORMES FERMÉES NON SINGULIÈRES ET PROPRIÉTÉS DE FINITUDE DES GROUPES

PAR MIHAI DAMIAN

ABSTRACT. – Let M^n a closed, connected manifold, $n \geqslant 6$. Denote by $\mathrm{Nov}(M)$ and $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M)$ the minimal number of zeros of a generic closed one-form defined on M, resp. the minimal number of zeros of a generic closed one-form on $M \times \mathbf{R}^k$ which is almost quadratic at infinity.

Under an assumption on the Bieri–Neumann–Strebel and Bieri–Renz invariants of $\pi_1(M)$, we show the implication $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}} = 0 \Rightarrow \mathrm{Nov} = 0$. If we drop this assumption, the implication above turns out to be false in general. In fact, our assumption is closely related to the implication $\mathcal{FP}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_2$, therefore, it's in some sense optimal.

Applications in Novikov homology theory and in symplectic topology are given. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

RÉSUMÉ. – Soit M^n une variété différentielle compacte et connexe, $n \geqslant 6$. On note par $\mathrm{Nov}(M)$ et $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M)$ respectivement le nombre minimal de zéros d'une 1-forme fermée non-dégénérée sur M et celui d'une 1-forme fermée non-dégénérée et presque quadratique à l'infini sur $M \times \mathbf{R}^k$.

Si les invariants de Bieri–Neumann–Strebel et de Bieri–Renz associés au groupe fondamental de M satisfont une certaine condition, on montre l'implication $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}} = 0 \Rightarrow \mathrm{Nov} = 0$. On construit des exemples de variétés pour lesquelles l'implication ci-dessus n'est pas vraie ; en fait la condition sur les invariants BNS et BR est liée à l'implication $\mathcal{FP}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_2$. Elle est donc optimale dans un certain sens.

Comme application, on montre une propriété d'ouverture de l'homologie de Novikov, ainsi qu'un résultat de disjonction symplectique dans le fibré cotangent. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soit M une variété compacte et connexe de dimension n. Toute fonction réelle sur M a des points critiques. Plus précisément, le nombre de points critiques d'une fonction générique (appelée aussi fonction de Morse) est minoré par la somme des nombres de Betti de M via les inégalités de Morse. Ces inégalités restent valables pour les fonctions de Morse $f : M \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ qui sont *quadratiques à l'infini* — c'est-à-dire égales à une forme quadratique non-dégénérée à l'extérieur d'un compact de $M \times \mathbf{R}^k$ [13]. Donc, si on note par $\mu(M)$ (resp. $\mu_{\mathrm{st}}(M)$) le nombre minimal de points critiques d'une fonction générique sur la variété M (resp. quadratique à l'infini sur $M \times \mathbf{R}^k$), on a l'inégalité :

$$\mu(M) \geqslant \mu_{\mathrm{st}}(M) \geqslant \sum_i \beta_i(M) \tag{1}$$

où β_i sont les nombres de Betti de M.

Pour M simplement connexe de dimension supérieure ou égale à 6 S. Smale a montré l'égalité $\mu(M)=\mu_{\mathrm{st}}(M)$ [35]. Ce résultat a été généralisé par Sharko [30,31] pour certaines classes de variétés non simplement connexes. Mais la question générale reste ouverte.

Le même problème peut être posé pour des 1-formes fermées. Dans [26] S. Novikov introduit une notion d'homologie associée à une 1-classe de cohomologie réelle dans le but de généraliser les inégalités de Morse dans le cas des 1-formes fermées. D'après ces inégalités, dites de Morse–Novikov, le nombre de zéros d'une 1-forme fermée non-dégénérée α appartenant à une classe $u \in H^1(M;\mathbf{R})$ est supérieur au rang de la partie libre de l'homologie de Novikov $H_*(M;u)$.

Une 1-forme fermée α sur $M \times \mathbf{R}^k$ est dite *presque quadratique à l'infini* si la différence entre α et la différentielle d'une forme quadratique non-dégénérée Q sur $\mathbf{R}^k$ est bornée en norme.

Comme précédemment, les inégalités de Morse–Novikov persistent pour des 1-formes fermées génériques sur $M \times \mathbf{R}^k$ qui sont presque quadratiques à l'infini. En particulier, si $\mathrm{Nov}(M)$ et $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M)$ sont respectivement le nombre minimal de zéros d'une 1-forme fermée non-dégénérée sur M et le nombre minimal de zéros d'une 1-forme fermée non-dégénérée presque quadratique à l'infini sur $M \times \mathbf{R}^k$, on aura :

$$\mathrm{Nov}(M) \geqslant \mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M) \geqslant \min_{u\in H^1(M;\mathbf{R})} rg\big(H_*(M;u)\big). \tag{2}$$

Le but de ce article est de répondre à la question suivante :

Q: Sous quelles hypothèses a-t-on $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M)=0 \Rightarrow \mathrm{Nov}(M)=0$?

Notre motivation pour aborder ce problème réside dans le fait qu'il est lié à une question de topologie symplectique : trouver des conditions nécessaires pour que la section nulle 0_M du fibré cotangent T^*M puisse être disjointe d'elle-même par une isotopie symplectique (voir l'énoncé du Th. 1.4 ci-après).

L'implication ci-dessus est vraie pour $n \leqslant 2$ et pour $n=3$ et M irréductible [37,6,38]. En grande dimension, $n \geqslant 6$, elle a été démontrée par J.-C. Sikorav [32] pour $\pi_1(M)=\mathbf{Z}$, puis généralisée par A. Pajitnov [27] pour $\pi_1(M)=H\times\mathbf{Z}$, sous une certaine hypothèse.

Notre résultat améliore les précédents pour $n \geqslant 6$: on montre l'implication $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M)=0 \Rightarrow \mathrm{Nov}(M)=0$ sous une hypothèse plus faible qui porte sur les invariants de Bieri–Neumann–Strebel et de Bieri–Renz associés au groupe $G=\pi_1(M)$. Ces invariants, notés $\Sigma^i(G)$ et $\Sigma^i(G;\mathbf{Z})$, sont des sous-ensembles ouverts de la sphère unité $S(G)=(\mathrm{Hom}(G;\mathbf{R})\setminus\{0\})/\mathbf{R}_+^*$. Si $u: G\to\mathbf{Z}$, dire que $\pm u\in\Sigma^i(G;\mathbf{Z})$ (ou $\pm u\in\Sigma^i(G)$) équivaut à une condition de finitude sur $\mathrm{Ker}(u)$ (voir Théorème 4.1). La définition de ces invariants sera rappelée en §4.

Voici les énoncés des résultats principaux :

THÉORÈME 1.1. – *Soit M^n une variété compacte connexe de dimension $n \geqslant 6$. On suppose aussi que les deuxièmes invariants de Bieri–Renz et de Bieri–Neumann–Strebel associés à $\pi_1(M)$ vérifient l'inclusion*

$$\big[\Sigma^2\big(\pi_1(M);\mathbf{Z}\big)\cap -\Sigma^2\big(\pi_1(M);\mathbf{Z}\big)\big] \subset \overline{\Sigma}^2\big(\pi_1(M)\big). \tag{$*$}$$

Alors $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M)=0 \Rightarrow \mathrm{Nov}(M)=0$.

Des exemples de groupes qui vérifient la condition $(*)$ sont donnés en §4.1. Le résultat qui suit montre que cette condition ne peut pas être supprimée dans l'énoncé du Théorème 1.1. En fait elle est optimale dans un certain sens puisque l'égalité des invariants $\Sigma^2(G;\mathbf{Z})$ et $\Sigma^2(G)$ était une conjecture avant qu'elle ne soit infirmée par les résultats récents de Bestvina et Brady [2].

PROPOSITION 1.2. – *Pour tout $n \geqslant 8$ il existe une variété compacte et connexe M^n telle que* $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M) = 0$ *et* $\mathrm{Nov}(M) \neq 0$.

Dans un travail ultérieur je montrerai que pour $n \geqslant 6$ l'égalité $\mathrm{Nov}(M) = \mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M)$ est vraie si on renforce la condition $(*)$ en : $\overline{\Sigma}^2(\pi_1(M)) = S(\pi_1(M))$. Je pense que cette dernière condition peut être encore améliorée ; cependant elle est satisfaite par beaucoup de groupes, dont par exemple ceux qui admettent au moins un morphisme $G \to \mathbf{R}$ non nul sur le centre $Z(G)$.

On énonce maintenant deux applications du Théorème 1.1. La première est une propriété d'ouverture de l'homologie de Novikov :

PROPOSITION 1.3. – *L'ensemble des classes $u \in H^1(M;\mathbf{R})$ dont l'homologie de Novikov est nulle est un ouvert de $H^1(M;\mathbf{R})$ (pour la topologie standard).*

Voici le résultat de disjonction symplectique qui était envisagé. Il est également conséquence du Théorème 1.1, via la théorie des formes génératrices des sous-variétés lagrangiennes de T^*M.

THÉORÈME 1.4. – *Soit M^n une variété compacte connexe de dimension $n \geqslant 6$ et dont le groupe fondamental vérifie la condition $(*)$. Sur le fibré cotangent T^*M on considère la forme symplectique standard $\omega_M = d\lambda_M$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une isotopie symplectique $(\Phi_t)_{t\in[0,1]}$ partant de l'Identité qui vérifie*

$$\Phi_1(0_M) \cap 0_M = \emptyset$$

où 0_M est l'image de la section nulle de T^*M.

(ii) *Il existe une fibration $p: M \to \mathbf{S}^1$.*

On voit facilement que la condition (ii) est équivalente à $\mathrm{Nov}(M) = 0$: ce résultat est connu sous le nom de théorème de Tischler [39].

Le texte est structuré comme suit :

Dans le paragraphe 2 on rappelle un théorème de Latour qui sera l'ingrédient principal pour la démonstration du Théorème 1.1. Il donne en grande dimension des conditions algébriques nécessaires et suffisantes que doit vérifier une 1-classe de cohomologie réelle sur M pour qu'elle contienne une forme non-dégénérée sans zéro. On généralise ce théorème et on obtient une caractérisation algébrique de $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M) = 0$. On utilise ces résultats pour montrer la Proposition 1.3.

Le paragraphe 3 est consacré à la construction d'un contre-exemple qui démontre la Proposition 1.2.

Dans le dernier paragraphe on prouve le Théorème 1.1 et son application symplectique 1.4.

2. Le théorème de Latour

2.1. Énoncé et conséquences

On s'intéresse aux classes u qui peuvent être représentées par une forme non-singulière (i.e. sans aucun zéro). L'ensemble de ces classes est un cône ouvert dans $H^1(M;\mathbf{R})$; suivant [20] on le notera par $\mathcal{C}(M)$.

Au vu des inégalités de Novikov, l'homologie $H_*(M;u)$ est une obstruction à l'existence d'une forme non-singulière dans u. Mais elle n'est pas la seule : lorsque $H_*(M;u)$ est nulle on définit la torsion de Whitehead associé à u [18], notée $\tau(M;u)$. L'annulation de cet élément du groupe de Whitehead $Wh(\pi_1(M);u)$ est une autre condition nécessaire. Dans [18] F. Latour ajoute une condition de stabilité aux deux conditions ci-dessus et démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. – *Si M est une variété compacte connexe sans bord et de dimension $n \geqslant 6$, une condition nécessaire et suffisante pour que la classe $u \in H^1(M)$ contienne une forme non-singulière est :*

$$\begin{cases} (1)\ H_*(M;-u)=0, \\ (2)\ \tau(M;-u)=0, \\ (3)\ u \textit{ et } -u \textit{ sont stables.} \end{cases}$$

L'idée de la preuve est d'éliminer tous les zéros d'une 1-forme fermée non-dégénérée comme dans la démonstration du théorème de s-cobordisme de Stallings [37,21] ; à noter que la troisième condition sert uniquement à éliminer les zéros d'indices 2 et $n-2$.

Les conditions de Latour pour une classe u *rationnelle* (i.e. telle que l'image du morphisme $u : \pi_1(M) \to \mathbf{R}$ est infinie cyclique) apparaissent aussi dans le travail de Pajitnov [27] et également de façon implicite dans les travaux plus anciens de Browder–Levine, Farrell et Siebenmann.

Dans ce paragraphe on va généraliser le théorème de Latour pour une variété de la forme $M \times \mathbf{R}^{2k}$, $k \geqslant 2$ (Théorème 2.6). Comme conséquence on obtiendra :

PROPOSITION 2.2. – *Soit M une variété sans bord, compacte et connexe. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M)=0$.

(ii) *Il existe $u \in H^1(M;\mathbf{R})$ telle que $H_*(M;-u)=0$ et $\tau(M;-u)=0$.*

Compte tenu de 2.1 et 2.2, pour démontrer le Théorème 1.1 il faut prouver que sous l'hypothèse $(*)$ les deux premières conditions de Latour impliquent la troisième. Ensuite, montrer la Proposition 1.2 revient à montrer que la troisième condition n'est pas redondante.

Pour les définitions et les propriétés des notions dont il est question dans les conditions du Théorème 2.1, on renvoie le lecteur à [26,34,28] pour l'homologie de Novikov, à [25,22,18] pour la torsion de Whitehead (associée à u) et à [18] pour la stabilité d'une classe u.

2.2. Une généralisation du théorème de Latour

On commence par quelques définitions. Considérons la forme quadratique non-dégénérée de signature (k,k) sur $\mathbf{R}^{2k}$:

$$Q_0(x_-,x_+) = -|x_-|^2 + |x_+|^2$$

(où $x_-, x_+ \in \mathbf{R}^k$).

DÉFINITION. – *Soit α une 1-forme fermée sur $M \times \mathbf{R}^{2k}$. On définit l'application $i_{\partial v}\alpha : M \times \mathbf{R}^{2k} \to \mathbf{R}$ par*

$$(q,v) \mapsto \big(\alpha_{q,v}(\partial v_1), \alpha_{q,v}(\partial_{v_2}), \ldots, \alpha_{q,v}(\partial_{v_{2k}})\big).$$

La forme α sera appelée standard à l'infini si l'application

$$(q,v) \mapsto \|i_{\partial v}\alpha - dQ_0\|$$

est bornée.

Remarques. –

1. Si la forme quadratique non-dégénérée n'est pas donnée à l'avance dans la définition précédente, on retrouve la notion classique de 1-forme presque quadratique à l'infini.

2. Les zéros d'une telle forme sont tous contenus dans un compact de $M \times \mathbf{R}^{2k}$.
3. Étant donnée une 1-forme fermée presque quadratique à l'infini α sur $M \times \mathbf{R}^{k'}$, il existe k assez grand et Q une forme quadratique non-dégénérée sur $\mathbf{R}^{2k-k'}$ telle que $\alpha + dQ$ soit standard à l'infini. L'addition de dQ ne change pas le nombre de zéros de α. Donc, on peut calculer $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}$ en utilisant uniquement des 1-formes fermées standard à l'infini sur $M \times \mathbf{R}^{2k}$ (pour k entier positif). C'est ce qu'on fera dans la suite.

On introduit aussi la notion suivante :

DÉFINITION. – *Soit α une 1-forme fermée générique sur $M \times \mathbf{R}^{2k}$ qui est standard à l'infini. On appelle pseudo-gradient pour α un champ de vecteurs ξ vérifiant les conditions suivantes :*
(a) *Pour chaque zéro c de α, il existe une carte de Morse $h: U(c) \to \mathbf{R}^{n+2k}$ et une forme quadratique non-dégénérée Q sur $\mathbf{R}^{n+2k}$ telles que $h_*(\xi|_{U(c)}) = \mathrm{grad}(Q)|_{h(U(c))}$.*
(b) *Pour tout $x \in M \times \mathbf{R}^{2k} \setminus \mathrm{Crit}(\alpha)$, on a $\alpha(\xi_x) > 0$.*
On dit que le pseudo-gradient est standard à l'infini s'il vérifie de plus la condition suivante :
(c) *Le champ ξ coïncide avec le gradient de Q_0 en dehors d'un compact de $M \times \mathbf{R}^{2k}$.*

On peut facilement construire un pseudo-gradient standard à l'infini pour α en utilisant une partition de l'unité.

Pour chaque zéro c de α on fixe un relèvement $\tilde{c}$ dans le revêtement universel $\widetilde{M} \times \mathbf{R}^{2k}$. Soit $\Lambda = \mathbf{Z}[\pi_1(M)]$, $\hat{\Lambda} = \mathbf{Z}[[\pi_1(M)]]$. Notons par C_q le Λ-module libre engendré par les points $\tilde{c}$ pour lesquels l'indice de Morse $I(c)$ est égal à q. Pour $u = [\alpha]$, vue comme morphisme $\pi_1(M) \to \mathbf{R}$, on pose par définition :

$$C_q(\alpha) := \Lambda_{-u} \otimes_{\Lambda} C_q,$$

où *l'anneau complété* Λ_{-u} est

$$\Lambda_{-u} := \left\{ \lambda = \sum n_i g_i \in \hat{\Lambda} \mid u(g_i) \to -\infty \right\}.$$

La convergence vers $-\infty$ signifie ici que pour tout $A < 0$, $u(g_i) < A$ pour tout g_i qui apparaît dans l'écriture de λ, à l'exception d'un nombre fini.

Les propositions qui suivent sont des généralisations des résultats de [18], Théorème 2.18, Prop. 4.6, Prop. 4.7. Voici leurs énoncés :

PROPOSITION 2.3. – *Soit α une 1-forme fermée non-dégénérée et standard à l'infini sur $M \times \mathbf{R}^{2k}$. On prend un pseudo-gradient pour α qui est standard à l'infini et générique (dans le sens où les variétés stables intersectent transversalement les variétés instables). Il existe alors un Λ_{-u}-complexe $C_\bullet(\alpha, \xi)$ avec les propriétés suivantes :*
(a) *Les modules de $C_\bullet(\alpha, \xi)$ sont $C_q(\alpha)$.*
(b) *L'homologie $H_*(C_\bullet(\alpha, \xi))$ est égale à $H_{*-k}(M; -u)$. Lorsque l'homologie est nulle, on a*

$$\tau\big(C_\bullet(\alpha, \xi)\big) = (-1)^k \tau(M; -u).$$

Les groupes de cohomologie $H^1(M; \mathbf{R})$ et $H^1(M \times \mathbf{R}^{2k}; \mathbf{R})$ sont canoniquement isomorphes. Si $u \in H^1(M; \mathbf{R})$, on notera par $\bar{u}$ l'image de u par cet isomorphisme. On a :

PROPOSITION 2.4. – *Supposons que $k \geqslant 2$ et $H_m(M; -u) = 0$ pour un $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Soit $\beta \in \bar{u}$ non-dégénérée et standard à l'infini n'ayant que des zéros d'indice compris entre $m + k$ et $n + 2k - 3$. Il existe une forme fermée dans $\bar{u}$, standard à l'infini, sans zéro d'indice inférieur ou égal à $m + k$ et ayant les mêmes zéros d'indice $l > m + k + 2$ que β.*

PROPOSITION 2.5. – *On suppose $k \geqslant 2$. Soit $\beta \in \bar{u}$ de Morse et standard à l'infini dont les indices des zéros sont deux entiers consécutifs situés entre 3 et $n + 2k - 3$. Alors, si $H_*(M; -u) = 0$ et $\tau(M; -u) = 0$, la forme β est cohomologue à une forme standard à l'infini et non-singulière.*

On en obtient comme conséquence la généralisation du Théorème 2.1 qui est l'objectif de ce paragraphe et qui implique 2.2 :

THÉORÈME 2.6. – *Soit $u \in H^1(M; \mathbf{R})$, fixée. Pour $k \geqslant 2$, les affirmations suivantes sont équivalentes :*
(i) *Il existe une forme non-singulière et standard à l'infini dans la classe $\bar{u} \in H^1(M \times \mathbf{R}^{2k}; \mathbf{R})$.*
(ii) $H_*(M; -u) = 0$ *et* $\tau(M; -u) = 0$.

Démonstration. –
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\beta \in \bar{u}$ vérifie la condition (i). Pour un pseudo-gradient standard à l'infini quelconque ξ associé à β, le complexe $C_\bullet(\beta, \xi)$ est nul, donc, en vertu de 2.3, $H_*(M; -u) = 0$ et $\tau(M; -u) = 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\alpha \in u$ définie sur M, qu'on suppose générique. On peut prendre α sans zéro d'indice 0 et n (on appelle une telle forme *sans centre* [20]). La forme $\beta := \alpha + dQ_0$ est standard à l'infini et ses zéros ont leurs indices situés entre $k + 1$ et $n + k - 1$. En utilisant 2.4 pour la forme $\alpha + dQ_0$ et pour $m = 1$, on trouve une forme fermée, encore notée β, qui n'a pas de zéro d'indice inférieur ou égal à $k + 1$.
Puis, en procédant par récurrence, on obtient finalement une forme $\beta \in \bar{u}$ standard à l'infini et dont les zéros ont pour indice q ou $q + 1$ pour un $q \in \{k + 1, \ldots, n + k - 1\}$. Comme $\tau(M; -u) = 0$, on utilise 2.5 pour éliminer tous les points critiques de β. □

Remarque. – Il est intéressant de constater que l'hypothèse (purement algébrique) de *stabilité* du Théorème 2.1 est compensée dans l'énoncé précédent par la stabilisation par dQ_0 sur $M \times \mathbf{R}^{2k}$. En fait, la stabilité de $\pm u$ implique l'existence d'une primitive de u sur le revêtement universel $\widetilde{M}$, dont les niveaux sont simplement connexes ([18, Prop. 5.20]). Cela permet d'éliminer des paires de trajectoires (d'orientations opposées) entre des zéros d'indices consécutifs : à l'aide d'un disque de Whitney produit par cette condition, on sépare la variété stable de la variété instable dans une feuille $\tilde{f}^{-1}(c)$.
La stabilisation par dQ_0 a pour effet de rendre les niveaux simplement connexes (comme il n'y a plus de point critique de petit ou de grand indice, tout disque s'appuyant sur un niveau $\tilde{f}^{-1}(c)$ peut être projeté dans $\tilde{f}^{-1}(c)$, en suivant les trajectoires d'un pseudo-gradient). La condition de stabilité devient donc inutile.

Les preuves de 2.3–2.5 ne sont pas substantiellement différentes de celles de [18], une fois qu'on a observé que toutes les modifications qu'on fait subir à une 1-forme non-dégénérée standard à l'infini ont un support compact. Voici quelques détails :

Démonstration de 2.3. – Soit ξ un pseudo-gradient pour α qui est standard à l'infini. Donc $\xi = \mathrm{grad}(Q_0)$ à l'extérieur d'un compact noté par K. Le compact K est supposé de la forme $M \times \{||v_-|| \leqslant R, ||v_+|| \leqslant R\}$.
Soit $\gamma : I \to M \times \mathbf{R}^{2k}$ un morceau de trajectoire de ξ ; par définition, sa longueur mesurée par β est donnée par

$$L(\gamma) := \int_I \gamma^* \beta.$$

La longueur est strictement positive si γ n'est pas constante. On s'intéresse maintenant aux trajectoires de ξ qui joignent deux zéros de α. Le résultat qui permet de construire le complexe $C_\bullet(\alpha,\xi)$ comme dans le cas compact est :

LEMME. – *Une orbite de ξ joint deux zéros de α si et seulement si elle est de longueur finie.*

Démonstration. – Le fait qu'une trajectoire entre deux zéros ait une longueur finie est évident. Réciproquement, si une trajectoire a une longueur finie elle ne peut pas sortir de K : une trajectoire γ_t qui passe par un point extérieur de K va à l'infini dans $M \times \mathbf{R}^{2k}$ pour $t \to \infty$ ou pour $t \to -\infty$ et sa longueur est infinie. La suite de la preuve est identique au cas compact [18]. □

On a vu que les trajectoires qui joignent deux zéros sont contenues dans le compact K. Pour $A > 0$ on note par $\mathcal{L}(c,d;A)$ l'ensemble des trajectoires allant de c à d qui sont de longueur inférieure à A. Si $I(d) = I(c) + 1$, pour ξ générique, $\mathcal{L}(c,d;A)$ est formée d'un nombre fini de trajectoires [18].

On fixe une orientation pour chaque variété stable $W^s(d)$. Cela induit des co-orientations pour les variétés instables. Les liaisons de $\mathcal{L}(c,d;A)$ sont munies dans le cas $I(d) = I(c) + 1$ d'un signe $\varepsilon = \pm 1$ qui est l'orientation de l'intersection transverse de $W^s(d)$ avec $W^u(c)$.

Définissons la différentielle $d_q : C_q(\alpha) \to C_{q-1}(\alpha)$. Soit $c, d \in \mathrm{Crit}(\alpha)$ et $l \in \mathcal{L}(c,d)$. Si on relève l dans $\widetilde{M} \times \mathbf{R}^{2k}$ à partir de $\tilde{d}$ on obtient un chemin entre $\tilde{d}$ et $g(l)\tilde{c}$, où $g(l) \in \pi_1(M)$. Supposons maintenant que $I(d) - I(c) = 1$. On définit le « nombre d'incidence » $[\tilde{d},\tilde{c}] \in \Lambda_{-u}$ comme suit :

$$[\tilde{d},\tilde{c}] := \sum_{l \in \mathcal{L}(c,d)} \varepsilon(l) g(l).$$

Comme pour tout $A > 0$ $\mathcal{L}(c,d;A)$ ne contient qu'un nombre fini de liaisons, on vérifie facilement que $[\tilde{d},\tilde{c}]$ est un élément de Λ_{-u}.

On définit la différentielle $d_{q+1}(\xi) : C_{q+1}(\beta) \to C_q(\beta)$ sur les générateurs de $C_{q+1}(\beta)$ par la formule :

$$d_{q+1}(\tilde{d}) := (-1)^q \sum_{I(c)=q} [\tilde{d},\tilde{c}]\tilde{c}.$$

Cette formule s'étend par Λ_{-u}-linéarité à $C_{q+1}(\beta)$.

Pour $g \in \pi_1(M)$ on a $[g\tilde{d},\tilde{c}] = g[\tilde{d},\tilde{c}]$ et $[\tilde{d}, g\tilde{c}] = g^{-1}[\tilde{d},\tilde{c}]$. Par suite, la différentielle ne dépend pas du choix des relevés $\tilde{c}$.

Pour terminer la construction il reste à montrer que $d_q(\xi) d_{q+1}(\xi) = 0$. La démonstration est analogue à celle de [18]. Pour montrer que l'homologie et la torsion de $C_\bullet(\alpha,\xi)$ vérifient les égalités de l'énoncé on procède également comme dans le cas compact [18].

Démonstration des Propositions 2.4 et 2.5. – La démonstration est analogue à celle de [18] ; en fait toutes les opérations qu'on applique à la forme β pour éliminer ses zéros d'indice $m+k$ ont le support compact — le caractère standard à l'infini de β n'est donc pas affecté. Voici les modifications autorisées [18] :

I. Monter (ou descendre) des zéros :
- *données* : c, zéro de β ; $0 < L < L'$ des réels.
- *hypothèse* : aucune ξ-trajectoire partant de c n'a une longueur (mesurée par β) inférieure à L'.
- *support de la modification* : un voisinage tubulaire V de $W^u(c, L')$ (la variété instable formée des trajectoires partant de c jusqu'à la longueur L').

– *modification* : $(\beta,\xi) \Rightarrow (\beta',\xi)$ de telle sorte que si $f: V \to \mathbf{R}$ est la primitive de β sur V vérifiant $f(c)=0$, alors $\beta'|_V$ admet une primitive f' égale à f sur ∂V et telle que $f'(c)=L$.

II. Ajouter une paire de zéros d'indices consécutifs :
– *données* : une boule ouverte $U \subset M \times \mathbf{R}^{2k}$, un entier q.
– *hypothèse* : U qui ne contient pas de zéro de β.
– *support de la modification* : U.
– *modification* : $(\beta,\xi) \Rightarrow (\beta',\xi')$; β' a deux zéros d'indices $q, q+1$ situés dans U.

III. Éliminer une paire de zéros d'indices consécutifs :
(Lemme de Morse–Smale) :
– *données* : deux zéros de β d'indices $q, q+1$.
– *hypothèse* : il existe une ξ-trajectoire allant de c à d de longueur L et toutes les autres trajectoires entre c et d ont une longueur strictement supérieure à L.
– *support* : un voisinage V de $\Omega(c) \cup W^s(d, L-\varepsilon)$, où $\Omega(c)$ est un voisinage de Morse de c de diamètre 2ε.
– *modification* : $(\beta,\xi) \Rightarrow (\beta',\xi')$ où $\beta'|_V$ n'a pas de zéro.

IV. Ajouter des liaisons :
– *données* : des relevés $\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_k \in \widetilde{M} \times \mathbf{R}^{2k}$ des zéros d'indice q et des relevés $\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_l \in \widetilde{M} \times \mathbf{R}^{2k}$ des zéros d'indice $q+1$; $g_0 \in \pi_1(M)$; $\eta = \pm 1$; $L > 0$; $\tilde{f}: \widetilde{M} \times \mathbf{R}^{2k} \to \mathbf{R}$ une primitive de β.
– *hypothèse* : β n'a pas de zéros d'indice $< q$ (où $q \geqslant 2$) ; $\tilde{f}(\tilde{d}_1) > \tilde{f}(\tilde{d}_2) + u(g_0)$.
– *support* : Un voisinage tubulaire d'un compact K contenu dans la feuille $\mathcal{F} = \pi(\tilde{f}^{-1}(t_0))$, où $t_0 \in]\tilde{f}(\tilde{d}_2) + u(g_0), \tilde{f}(\tilde{d}_1)[$ est fixé au départ.
– *modification* : $(\beta,\xi) \Rightarrow (\beta,\xi')$ où ξ' vérifie les propriétés suivantes pour $A = \sup_{i,j}(\tilde{f}(\tilde{d}_j) - \tilde{f}(\tilde{c}_i))$:

$$[\tilde{d}_1,\tilde{c}_i]_{\xi'} = [\tilde{d}_1,\tilde{c}_i]_{\xi} + \eta g_0[\tilde{d}_2,\tilde{c}_i]_{\xi} + (u < A - L),$$
$$\forall j \geqslant 2, \quad [\tilde{d}_j,\tilde{c}_i]_{\xi'} = [\tilde{d}_j,\tilde{c}_i]_{\xi} + (u < A - L).$$

Ici $[\tilde{d}_j,\tilde{c}_i] \in \Lambda_{-u}$ est le « nombre d'incidence » défini à l'aide des trajectoires allant de c_i à d_j [18]. Puis, $(u < A - L)$ désigne un élément $\lambda = \sum n_i g_i$ de Λ_{-u} tel que $u(g_i) < A - L$ pour tout i.

V. Éliminer des liaisons :
– *données* : c, d deux zéros de β d'indices respectifs q et $q+1$; $L > 0$; l, l' des ξ-trajectoires entre c et d de longueur inférieure à L.
– *hypothèse* : β n'a pas de zéro d'indice $< q$ et $q \geqslant 3$; les relèvements de l et l' à partir de $\tilde{d} \in \widetilde{M} \times \mathbf{R}^{2k}$ aboutissent au même point $g\tilde{c}$ dans la fibre de c ; les orientations de l et l' (comme intersections des variétés stables et instables) sont opposées.
– *support* : un voisinage d'un disque de Whitney situé dans la feuille $\mathcal{F} = \pi(\tilde{f}^{-1}(t))$, où $t \in]\tilde{f}(g\tilde{c}), \tilde{f}(\tilde{d})[$ est fixé au départ.
– *modification* : $(\beta,\xi) \Rightarrow (\beta,\xi')$ où ξ' a les mêmes liaisons de longueur $< L$ entre les zéros d'indice q et $q+1$ sauf l et l'.

Le support de toutes ces opérations étant compact, l'élimination des zéros est analogue au cas compact [18]. □

2.3. Conséquences : Propriétés de l'homologie de Novikov

A) Ouverture

La première conséquence des résultats 2.3–2.6 est le fait que l'ensemble des classes u dont l'homologie de Novikov est nulle est un ouvert dans $H^1(M;\mathbf{R})$ muni de la topologie standard. Ce résultat a été énoncé dans [18] (Prop. 1.17), mais sa preuve (par ailleurs complètement différente de celle-ci) n'est pas correcte (remarque de A. Pajitnov et J.-C. Sikorav).

Pour simplifier, on va noter par $\mathcal{X}$ l'ensemble des classes $u \in H^1(M;\mathbf{R})$ telles que l'homologie de Novikov associée à $-u$ est nulle et par $\mathcal{Y}$, le sous-ensemble de $\mathcal{X}$ formé des classes qui vérifient $\tau(M;-u)=0$. Par ce qui précède, on a l'inclusion :

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$$

où $\mathcal{C} \subset H^1(M)$ représente le cône ouvert formé des classes qui peuvent être représentées par des formes non-singulières.

On va montrer :

PROPOSITION 2.7. – *Les ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont également des (cônes) ouverts dans $H^1(M,\mathbf{R})$, muni de sa topologie standard.*

Démonstration. – L'ouverture de $\mathcal{Y}$ est une conséquence directe du Théorème 2.6. On a $u \in \mathcal{Y}$ si et seulement s'il existe une forme non-singulière et standard à l'infini dans la classe $\bar{u} \in H^1(M \times \mathbf{R}^{2k};\mathbf{R})$. Or cette dernière condition est évidemment ouverte en u.

La propriété analogue pour l'ensemble $\mathcal{X}$ repose sur le résultat suivant :

LEMMA A. – *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
(i) $u \in \mathcal{X}$.
(ii) *Pour tout $m \in \{0,1,\ldots,n+2k\}$ il existe une forme de Morse standard à l'infini dans la classe $\bar{u} \in H^1(M \times \mathbf{R}^{2k};\mathbf{R})$ qui n'a aucun zéro d'indice m.*

Montrons que la condition (ii) est ouverte. Si $(\text{ii})_m$ est cette condition formulée pour un m fixé, soit u vérifiant $(\text{ii})_m$. Notons par $\beta_m \in \bar{u}$ une forme produite par cette condition. Prenons U une réunion finie de petites boules disjointes de M telle que la totalité des zéros de β_m soit contenue dans $U \times \mathbf{R}^{2k}$.

Si β' est une 1-forme fermée sur M qui est nulle sur U et suffisamment proche de 0, il est clair que $\beta_m + \beta'$ a les mêmes zéros que β_m, donc pas de zéro d'indice m.

Par ailleurs, la flèche $H^1(M,U;\mathbf{R}) \to H^1(M;\mathbf{R})$ est surjective, donc si $u' \in H^1(M;\mathbf{R})$ est suffisamment proche de 0, alors $u+u'$ vérifie $(\text{ii})_m$.

Par conséquent, les conditions $(\text{ii})_m$ sont ouvertes, donc leur intersection (ii), l'est aussi. Il reste donc à prouver le Lemme A.

Démonstration du Lemme A. – (ii) $\Rightarrow$ (i) Fixons m entre k et $n+k$. Si $\beta_m \in \bar{u}$ vérifie la condition $(\text{ii})_m$, alors pour tout pseudo-gradient associé ξ_m on a $C_m(\beta_m,\xi_m)=0$, donc $H_m(C_\bullet(\beta_m,\xi_m))=0$. Par la Proposition 2.3, on obtient que $H_{m-k}(M;-u)=0$. Comme m a été arbitrairement choisi, on a $H_*(M;-u)=0$. Il suit que $u \in \mathcal{X}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Pour $m \leqslant k$ ou $m \geqslant n+k$ toute forme du type $\alpha + dQ_0$, avec $\alpha \in u$ sans centre et non-dégénérée, vérifie (ii). On suppose donc m compris entre $k+1$ et $n+k-1$.

Fixons m. On part avec une forme du type $\alpha + dQ_0$, comme ci-dessus. Une application répétée de 2.4 donne alors une forme $\beta \in \bar{u}$ dont les zéros ont pour indice $n+k$ ou $n+k+1$. Par conséquent, β vérifie la condition $(\text{ii})_m$. $\square$

La Proposition 2.7 est donc complètement démontrée. $\square$

B) Dualité

Soit $w: Wh(\pi_1(M); -u) \to Wh(\pi_1(M); u)$ le morphisme de groupes induit par $g \mapsto w_1(g)g^{-1}$ avec $w_1(g) = \pm 1$ selon le cas où l'action de g préserve ou change l'orientation de $\widetilde{M}$. Si α est une forme générique dans la classe u et ξ un pseudo-gradient associé, on considère les Λ_u-complexes $C_{n-\bullet}(-\alpha, -\xi)$ et $\mathrm{Hom}_{\Lambda_{-u}}(C_\bullet(\alpha, \xi), \Lambda_{-u})$ (la structure du deuxième étant définie à l'aide de w). Dans [18] (Prop. 2.30) on montre que ces complexes sont simplement isomorphes. On en obtient un résultat de dualité sur l'homologie de Novikov, via le théorème des coefficients universels. En particulier, on a :

PROPOSITION 2.8. – *Soit M une variété compacte et connexe de dimension n et u une 1-classe de cohomologie. Si $H_*(M; -u) = 0$ pour $* \leqslant l$, alors $H_*(M; u) = 0$ pour $* \geqslant n - l$. Si $l = n$, on a aussi la relation*

$$\tau(M; u) = (-1)^{n-1} w\big(\tau(M; -u)\big)$$

entre les torsions de Whitehead associées à u et $-u$.

On peut facilement montrer cette proposition en appliquant la Proposition 2.4 : en effet, si $H_*(M; u) = 0$ pour $* \leqslant l$, on utilise ce théorème pour trouver une 1-forme générique β dans la classe $\bar{u}$, qui est standard à l'infini et dont tous les zéros ont leurs indices strictement supérieurs à $k + l$. Donc, la forme $-\beta$ n'aura pas de zéro d'indice supérieur ou égal à $n + k - l$ et on conclut en utilisant la Proposition 2.3.

Quant à la relation entre les torsions, on l'obtient en trouvant une 1-forme β dans la classe $\bar{u}$ qui est standard à l'infini et dont tous les zéros ont deux indices consécutifs, $q, q+1$. Il suffit après de remarquer que les matrices des différentielles $d_{q+1}(\beta, \xi): C_{q+1} \to C_q$ et $d_{q+1}(\beta, \xi): C_{q+1} \to C_q$ se correspondent par w.

On l'utilisera cette proposition dans le §3.

3. Sur la condition de stabilité

Ce paragraphe est consacré à la construction d'un exemple qui prouve la Proposition 1.2. Compte tenu de 2.2, cela revient à montrer que la condition de stabilité dans le Théorème 2.1 n'est pas impliquée par les deux premières. Autrement dit, avec les notations antérieures, il faut prouver qu'en général $\mathcal{C} \neq \mathcal{Y}$.

La stabilité est une condition purement algébrique : elle dépend uniquement de $\pi_1(M)$ et de u (voir [18], Lemme 5.7). Pour une classe u rationnelle on a le critère suivant [18] :

PROPOSITION 3.1. – *Si le sous-groupe* $\mathrm{Ker}(u) \subset G$ *est de présentation finie alors les classes $\pm u$ sont stables. La réciproque est vraie si u est rationnelle.*

Lorsqu'un groupe est de présentation finie on dit aussi qu'il a la propriété de finitude $\mathcal{F}_2$. Par ailleurs, on montrera ci-après (Prop. 4.2) que si $u \in \mathcal{X}$ alors $\mathrm{Ker}(u)$ a la propriété de finitude $\mathcal{FP}_2$. On est donc amené à étudier des classes dont le noyau a (ou n'a pas) certaines propriétés de finitude. On va s'appuyer sur les résultats de Bestvina et Brady [2] qui fournissent des exemples de telles classes.

Commençons par rappeler les définitions et quelques résultats concernant les différentes propriétés de finitude des groupes.

3.1. Propriétés de finitude des groupes

Ce sont des généralisations naturelles pour les notions de « type fini » et « présentation finie ». Voici les définitions :

DÉFINITION. – *On dit que le groupe G est de type $\mathcal{F}_n$ si une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(i) *Il existe un complexe $K(G,1)$ dont le n-squelette est fini.*

(ii) *Il existe une action libre, propre, cellulaire, discontinue, fidèle et cocompacte de G sur un complexe $(n-1)$-connexe.*

DÉFINITION. – *On dit que le groupe G est de type $\mathcal{FH}_n$ s'il existe une action libre, propre, cellulaire, discontinue, fidèle et cocompacte de G sur un complexe K dont l'homologie réduite vérifie : $\widetilde{H}_i(K;\mathbf{Z})=0$ pour $i\leqslant n-1$.*

DÉFINITION. – *On dit que le groupe G est de type $\mathcal{FP}_n$ s'il existe une résolution de $\mathbf{Z}$*

$$P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbf{Z}$$

formée de $\mathbf{Z}[G]$-modules projectifs de type fini.

Les types de finitude ci-dessus ont été introduites par Wall [40] et Bieri [3]. On voit facilement qu'être de type $\mathcal{F}_1$ équivaut à être de type fini pour un groupe G ; puis G est de type $\mathcal{F}_2$ si et seulement s'il est de présentation finie. Voici d'autres propriétés :

1. $G\in\mathcal{F}_n \Rightarrow G\in\mathcal{FH}_n \Rightarrow G\in\mathcal{FP}_n$.
2. $G\in\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow G\in\mathcal{FP}_1 \Leftrightarrow G$ de type fini.
3. Pour $n\geqslant 2$, $G\in\mathcal{F}_n \Leftrightarrow G\in\mathcal{F}_2\cap\mathcal{FP}_n$ [9].

Une question naturelle est de savoir s'il existe des groupes qui ont un certain type de finitude, mais n'en ont pas un autre. Par exemple, si F_2 est le groupe libre à 2 générateurs, le morphisme $u:F_2\times F_2\to\mathbf{Z}$ qui envoie tous les générateurs en 1 a son noyau de type fini mais pas de présentation finie [36]. Plus généralement, Stallings (pour $n=3$) et Bieri ont montré que le morphisme analogue $u:F_2^n\to\mathbf{Z}$ a le noyau de type $\mathcal{F}_{n-1}$ mais pas de type $\mathcal{FP}_n$ [36,4].

L'implication $\mathcal{FP}_2\Rightarrow\mathcal{F}_2$ (qui entraînerait $\mathcal{FP}_n\Rightarrow\mathcal{F}_n$) a été conjecturée, mais elle a été infirmée par le résultat récent de Bestvina et Brady [2]. Ce résultat généralise les exemples de Stallings et Bieri et fournit du même coup une large panoplie d'exemples de morphismes $u:G\to\mathbf{Z}$ dont le noyau a un type de finitude et n'en a pas un autre. Le travail de Bestvina et Brady a lui-même été généralisé par Meier, Meinert et van Wyk [23] pour des morphismes $u:G\to\mathbf{R}$. On va présenter un bref résumé de ces résultats.

3.2. Le résultat de Bestvina et Brady

Tous les exemples de [2] sont des noyaux de morphismes $u:G\to\mathbf{Z}$; les groupes G sont des groupes associés à des graphes qui ont la propriété d'être le 1-squelette d'un complexe drapeau fini. Voici la définition exacte :

DÉFINITION. – *Un complexe simplicial L est un complexe drapeau si tout ensemble de sommets de L mutuellement adjacents engendre un simplexe de L.*

Remarques. –

1. Un complexe drapeau est complètement déterminé par son 1-squelette.
2. La première subdivision barycentrique de n'importe quel complexe simplicial est un complexe drapeau.

Soit $g_1,g_2,\dots,g_m$ les sommets d'un complexe drapeau L, supposé fini. On associe à L (plus précisément à son 1-squelette $Sk^1(L)$) un groupe G_L de la manière suivante :

DÉFINITION. – *On appelle groupe d'Artin à angles droits associé à L le groupe* :

$$G_L=\langle g_1,g_2,\dots,g_m\rangle/[g_i,g_j]=1\quad \forall g_i,g_j \textit{ adjacents dans } Sk^1(L).$$

Le résultat principal de [23] qui généralise celui de [2] s'énonce comme suit :

THÉORÈME 3.2. – *Soit L un complexe drapeau fini, G_L le groupe d'Artin associé et $u:G_L \to \mathbf{Z}$ un morphisme. On suppose que $u(g_i) \neq 0$ pour tout générateur g_i dans la présentation ci-dessus. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, le noyau de u vérifie :*
(i) Ker(u) *de type $\mathcal{FP}_m$ si et seulement si L est $(m-1)$-acyclique.*
(ii) Ker(u) *de type $\mathcal{F}_m$ si et seulement si L est $(m-1)$-connexe.*

On va utiliser ce théorème pour donner un exemple de classe $u \in \mathcal{Y}$ qui n'est pas stable sur une variété M.

3.3. Construction d'un exemple de $u \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$

On va chercher notre exemple parmi celles de Bestvina et Brady. Mais il faut encore trouver un lien entre des propriétés de finitude de Ker(u) et l'homologie de Novikov. On l'établit par le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3. – *Soit M^n une variété (ou un CW-complexe) compacte et connexe telle que $\widetilde{M}$ soit m-connexe pour un $m \geqslant 1$ fixé. Alors, si $u:\pi_1(M) \to \mathbf{R}$ est un morphisme dont le noyau est de type $\mathcal{FP}_{m+1}$, on a $H_*(M;\pm u) = 0$ pour $* \leqslant m$.*

Démonstration. – L'image de u est isomorphe à $\mathbf{Z}^s \subset \mathbf{R}$. Si $\widetilde{M}$ est m-connexe, l'homologie de Novikov associée à u vérifie [34] :

$$H_*(M;u) = \mathrm{Tor}_*^{\Lambda}(\Lambda_u, \mathbf{Z}) \quad \forall * \leqslant m.$$

Autrement dit, pour $* \leqslant m$, l'homologie de Novikov coïncide avec l'homologie du groupe fondamental de M à coefficients dans le Λ-module Λ_u. Pour relier celle-ci au noyau de u on utilise la suite spectrale de Hochschild et Serre [15] :

PROPOSITION 3.4 (voir [9, p. 171]). – *Si $1 \to K \to G \to Q \to 1$ est une suite exacte de groupes et R est un G-module, alors il existe une suite spectrale E^r_{pq} convergeant vers $H_{p+q}(G;R)$ telle que :*

$$E^2_{pq} = H_p\big(Q; H_q(K;R)\big).$$

Ici Q agit sur $H_q(K;R)$ par conjugaison.

Dans notre contexte $G = \pi_1(M)$, $Q = \mathbf{Z}^s$, $K = \mathrm{Ker}(u)$ et $R = \Lambda_u$; on obtient donc une suite qui converge vers l'homologie de Novikov pour $p+q \leqslant m$. Comme $Q = \mathbf{Z}^s$, le groupe E^2_{pq} est nul pour $p \neq 0, 1, \ldots, s$. Par ailleurs, on a :

LEMME 3.5. – *Si* Ker(u) *est de type $\mathcal{FP}_{m+1}$, alors $E^2_{pq} = 0$ pour $q \neq 0$, $q \leqslant m$.*

Admettons pour l'instant ce lemme. Voici alors la fin de la preuve de 3.3. Si u est rationnelle (i.e. Im$(u) \approx \mathbf{Z}$), c'est plus simple : On vient de montrer que tous les groupes E^2_{pq} avec $p+q \leqslant m$ sont nuls à l'exception de E^2_{00} et E^2_{10}. Par conséquent la même remarque est valable pour les groupes E^∞_{pq}. Cela implique $H_*(M;u) = 0$ pour $2 \leqslant * \leqslant m$. Mais $H_1(M;u)$ est également nul puisque Ker(u) est de type $\mathcal{FP}_1$, donc de type fini ([18, Prop. 5.8]).

Dans le cas général montrons que $E^2_{p0} = 0$ pour tout p. On a tout d'abord

$$H_0\big(\mathrm{Ker}(u); \Lambda_u\big) = \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}[\mathrm{Ker}(u)]} \Lambda_u \approx \mathbf{Z}[[t_1, t_2, \ldots, t_s]][t_1^{-1}, \ldots t_s^{-1}].$$

On voit que l'action de $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}^s] \approx \mathbf{Z}[t_1, t_2, \ldots, t_s]$ sur l'anneau des séries de Laurent à s variables ci-dessus est donnée par la multiplication canonique. Pour $s = 1$, comme $1 - t$ est inversible dans l'anneau des séries de Laurent, on a $H_*(\mathbf{Z};\mathbf{Z}[[t]][t^{-1}])=0$ (pour la résolution canonique $0\to\mathbf{Z}[[t]][t^{-1}]\overset{*(1-t)}{\to}\mathbf{Z}[[t]][t^{-1}]\to\mathbf{Z}$).

Puis, on procède par récurrence ; on a $\mathbf{Z}[t_1,t_2,\ldots,t_s]\approx\mathbf{Z}[t_1,t_2,\ldots,t_{s-1}]\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[t_s]$ (de même pour des séries de Laurent) et on utilise la formule de Künneth.

Par conséquent, $E^2_{pq}=0$ pour $p+q\leqslant m$, donc $H_*(M;u)=0$ pour $*\leqslant m$.

Comme $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Ker}(-u)$, on obtient de manière analogue la nullité de $H_*(M;-u)$ pour $*\leqslant m$. □

Voici maintenant la démonstration du Lemme 3.5.

Le résultat suivant a été démontré par Bieri et Eckmann [5] :

THÉORÈME 3.6. – *Soit K un groupe et m un nombre entier positif. Les affirmations suivantes sont équivalentes* :

(i) *Le groupe K est de type $\mathcal{FP}_{m+1}$.*

(ii) *Le foncteur $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{Z}[K]}(\mathbf{Z},\cdot)$ commute avec les produits directs pour tout $*\leqslant m$.*

Pour $K=\mathrm{Ker}(u)$ cela implique immédiatement le Lemme 3.5. En effet, considérons pour $l\in\mathrm{Im}(u)$ les $\mathbf{Z}[\mathrm{Ker}(u)]$-modules suivants

$$\Lambda(l)=\Big\{\sum_i n_i g_i\in\Lambda\mid u(g_i)=l\ \forall i\Big\}.$$

Il est évident que les modules $\Lambda(l)$ sont libres sur $\mathbf{Z}[\mathrm{Ker}(u)]$. En effet, si $t\in\pi_1(M)$ est tel que $u(t)=l$, on voit que $\{t\}$ est une base pour le $\mathbf{Z}[\mathrm{Ker}(u)]$-module $\Lambda(l)$.

On définit maintenant pour $k\in\mathbf{N}$ les $\mathbf{Z}[\mathrm{Ker}(u)]$-modules

$$\Lambda_k=\prod_{l\geqslant -k}\Lambda(l).$$

Le Théorème 3.6 implique que $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{Z}[K]}(\mathbf{Z},\Lambda_k)=0$ pour tout $1\leqslant *\leqslant m$ et pour tout k. Pour finir, il suffit de remarquer que Λ_u est la limite directe des Λ_k via les inclusions canoniques. Comme le foncteur Tor commute avec les limites directes, on obtient $H_*(\mathrm{Ker}(u);\Lambda_u)=0$ pour $1\leqslant *\leqslant m$. La démonstration du Lemme 3.5 est terminée.

On utilise la Proposition 3.3 et le Théorème 3.2 pour donner l'exemple souhaité :

PROPOSITION 3.7. – *Il existe une variété différentielle compacte et connexe M et un système fini de générateurs $\{g_1,\ldots,g_m\}$ de son groupe fondamental tels que* :

(i) *Aucune classe $u\in H^1(M;\mathbf{R})$ ne satisfait la condition $\pm u$ stables. En particulier M ne fibre pas sur le cercle* (*cf. Théorème* 2.1)

(ii) *Pour toute classe rationnelle $u\in H^1(M;\mathbf{R})$, non nulle sur les générateurs g_i, on a $H_*(M;u)=0$.*

(iii) *Pour toute classe $u\in H^1(M;\mathbf{R})$ le groupe de Whitehead $Wh(\pi_1(M);u)$ est nul.*

Démonstration. – On prend d'abord un complexe fini acyclique non simplement connexe L (par exemple une sphère d'homologie privée d'un disque). Quitte à prendre sa première subdivision barycentrique, on peut supposer que L est un complexe drapeau fini. Soit G_L le groupe d'Artin associé et $u:G_L\to\mathbf{Z}$ un morphisme qui est non nul sur les générateurs de G_L (pour la présentation canonique). Grâce au Théorème 3.2, $\mathrm{Ker}(u)$ est de type $\mathcal{FP}_\infty$, mais pas de type $\mathcal{F}_2$.

Le groupe G_L admet un espace d'Eilenberg–Mac Lane $Q\sim K(G_L,1)$ qui est un complexe compact (voir [24,11], ou [2] pour la construction).

Pour obtenir une variété à partir du complexe Q on utilise un procédé classique. Si q est la dimension de Q, on plonge Q dans $\mathbf{R}^{2q+3}$ et on épaissit son image dans $\mathbf{R}^{2q+3}$; on obtient ainsi une variété à bord W qui a le même type d'homotopie que Q. Notons par M le bord ∂W — c'est une variété compacte et connexe de dimension $2q+2$.

Par position générale, un objet de dimension $q+2$ n'intersecte pas l'âme $Q \subset W$. En particulier, on a une application bien définie et surjective

$$\pi_i(Q) \approx \pi_i(W) \to \pi_i(M)$$

pour tout $i \leqslant q+1$. Il suit que $\widetilde{M}$ est $(q+1)$-connexe.

La variété M et le système canonique de générateurs pour le groupe d'Artin $G_L = \pi_1(M)$ satisfont aux conditions de l'énoncé. Vérifions d'abord la condition (i).

Soit u non nulle sur les générateurs g_i. En vertu du critère 3.1, la condition (i) est satisfaite si u est rationnelle, car $\mathrm{Ker}(u)$ n'est pas de présentation finie. Mais la stabilité est une condition ouverte en u [18], donc a est vérifiée pour toute classe u. En particulier, la variété M ne fibre pas sur le cercle.

(ii) Soit u rationnelle, non nulle sur les générateurs g_i. Appliquons la Proposition 3.3. On obtient que $H_*(M; \pm u) = 0$ pour tout $* \leqslant q+1$. En appliquant la dualité 2.8, il suit que $H_*(M; \pm u) = 0$ pour tout $*$, donc $u \in \mathcal{X}$.

(iii) L'espace d'Eilenberg–Mac Lane Q pour G_L peut être choisi à courbure négative [2] dans le sens de Gromov [17]. Par ailleurs, si X est un complexe à courbure négative, son groupe fondamental vérifie $\mathit{Wh}(\pi_1(K)) = 0$. Ce résultat a été prouvé par Farrell–Jones pour des variétés [14]. La généralisation dans le cas des complexes est due à Hu [16]. Par conséquent, on a

$$\mathit{Wh}\big(\pi_1(M)\big) \approx \mathit{Wh}\big(\pi_1(Q)\big) = 0.$$

Il suit facilement que $\mathit{Wh}(\pi_1(M); u) = 0$ pour toute 1-classe u sur M. $\square$

Cet exemple constitue une preuve pour la Proposition 1.2. En effet on trouve des classes $u \in \mathcal{Y}$ (car la torsion de Whitehead associée à une classe u, d'homologie $H_*(M; u) = 0$, appartient au groupe $\mathit{Wh}(\pi_1(M); u)$ qui est nul). Donc $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}}(M) = 0$ en vertu de la Proposition 2.2. Par ailleurs $\mathrm{Nov}(M) \neq 0$ par 2.1.

Puis, on peut fabriquer de telles variétés M^n pour tout $n \geqslant 8$: en effet, d'après [2], il existe un complexe d'Eilenberg–Mac Lane $K(G_L, 1)$ de dimension $q = \dim(L) + 1$. On peut partir de $\dim(L) = 2$ et obtenir une variété de dimension 8.

4. La démonstration du Théorème 1.1

Tout d'abord, on rappelle la définition et quelques propriétés des invariants géométriques qui interviennent dans la condition $(*)$.

4.1. Les invariants $\Sigma^i(G)$ et $\Sigma^i(G; \mathbf{Z})$

Ces invariants ont été introduits par Bieri, Neumann, Strebel et Renz en [6–8,29]. Pour G ayant un type de finitude donné, ils donnent des informations sur les types de finitude des sous-groupes $N \subset G$ pour lesquels le quotient G/N est abélien libre. Pour simplifier, on va appeler BNS les invariants $\Sigma^i(G)$ et BR les invariants $\Sigma^i(G; \mathbf{Z})$. Voici leurs définitions.

Notons par $[G, G]$ le sous-groupe des commutateurs du groupe G. Si G est de type fini, le quotient $G/[G, G]$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^m \oplus \textit{torsion}$ pour un m entier positif, appelé rang de G.

Considérons l'ensemble Hom(G; $\mathbf{R}$) des morphismes $u: G \to \mathbf{R}$. Les invariants BNS et BR sont des sous-ensembles de la sphère unité

$$\mathbf{S}^{m-1} \approx S(G) = \big(\mathrm{Hom}(G;\mathbf{R}) \setminus \{0\}\big)/\mathbf{R}_+^*$$

définie via l'action canonique $(r,u) \mapsto ru$ de $\mathbf{R}_+$ sur les morphismes. On note par $[u]$ la classe du morphisme u.

Considérons un groupe G de type $\mathcal{F}_q$. Il admet donc un espace $Q \approx K(G,1)$ dont le q-squelette est fini. Étant donné un morphisme $u: G \to \mathbf{R}$, on choisit une primitive $\tilde{f}: \widetilde{Q} \to \mathbf{R}$ pour u (i.e. une fonction qui vérifie $\tilde{f}(gx) = u(g) + \tilde{f}(x)$ pour tout $(g,x) \in G \times \widetilde{Q}$). On peut construire $\tilde{f}$ en choisissant un arbre maximal T dans le 1-squelette de Q, en le relevant en $\widetilde{T} \subset \widetilde{Q}$ et en imposant $\tilde{f}|_{\widetilde{T}} = 0$, $\tilde{f}|_{g\widetilde{T}} = u(g)$, puis en prolongeant $\tilde{f}$ à $\widetilde{Q}$ de telle sorte qu'elle soit affine sur chaque simplexe. Notons par $Q_{u,r}$ l'ensemble

$$\{x \in \widetilde{Q} \mid \tilde{f}(x) \geqslant -r\}, \quad r \in \mathbf{R}.$$

DÉFINITION. – *La classe* $[u]$ *appartient à* $\Sigma^q(G)$ (*resp.* $\Sigma^q(G;\mathbf{Z})$) *s'il existe un nombre réel* r *tel que l'inclusion* $Q_{u,0} \overset{i}{\hookrightarrow} Q_{u,r}$ *vérifie* $\pi_k(i) = 0$ (*resp.* $\widetilde{H}_k(i) = 0$) *pour tout* $k < q$. *On a noté par* π_k (*resp.* $\widetilde{H}_k$) *le k-ième foncteur d'homotopie* (*resp. d'homologie réduite*).

Remarque. – Dans la définition précédente on aurait pu prendre à la place de $\widetilde{Q}$ un espace $(q-1)$-connexe sur lequel G agit de manière libre, cellulaire, propre, discontinue, fidèle et cocompacte.

Propriétés
1. (voir [6]) $[u] \in \Sigma^1(G) \Leftrightarrow H_1(M;u) = 0$.
2. (voir [7]) $\Sigma^1(G) = \Sigma^1(G;\mathbf{Z})$.
3. [6, Théorème A], [7, Théorème A] Les ensembles $\Sigma^q(G;)$ et $\Sigma^q(G;\mathbf{Z})$ sont des ouverts de $S(G)$.
4. $\Sigma^i(G) = \Sigma^i(G;\mathbf{Z}) \cap \Sigma^2(G)$ (par Hurewicz).

La propriété essentielle de ces invariants est la suivante :
Soit N un sous-groupe de G tel que G/N soit un groupe abélien. On définit

$$S(G,N) = \{[u] \in S(G) \mid u|_N = 0\}.$$

C'est une grande sous-sphère de $S(G)$ de dimension $rg(G/N) - 1$. On a :

THÉORÈME 4.1 ([6, Théorème B1] et [7, Théorème B]). – *Le sous-groupe* N *est de type* $\mathcal{F}_q$ (*resp.* $\mathcal{FP}_q$) *si et seulement si* $\Sigma^q(G)$ (*resp.* $\Sigma^q(G;\mathbf{Z})$) *contient la sphère* $S(G,N)$. *En particulier, si* Ker(u) *est de type* $\mathcal{F}_q$ (*resp.* $\mathcal{FP}_q$) *alors* $\pm u \in \Sigma^q(G)$ (*resp.* $\Sigma^q(G;\mathbf{Z})$).

On voit facilement que pour une classe u rationnelle $S(G,\mathrm{Ker}(u)) = \{\pm u\}$. On a alors :

COROLLAIRE (voir aussi Prop. 3.1). – *Si* u *est rationnelle, alors* Ker(u) *est de type* $\mathcal{F}_q$ (*resp.* $\mathcal{FP}_q$) *si et seulement si* $\pm u \in \Sigma^q(G)$ (*resp.* $\Sigma^q(G;\mathbf{Z})$).

Groupes (de présentation finie) qui vérifient la condition $(*)$.

La condition $(*)$ n'est pas vérifiée pour tous les groupes. En effet, l'exemple construit dans la Proposition 3.7 contredirait le Théorème 1.1. Voici quelques classes de groupes pour lesquels cette condition est satisfaite :
1. Groupes dont le sous-groupe des commutateurs est de présentation finie (en particulier les groupes abéliens). Dans ce cas $\Sigma^2(G) = S(G)$.

2. Groupes pour lesquels la restriction $\mathrm{Hom}(G,\mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(Z(G),\mathbf{R})$ est non nulle. Si $g_0 \in Z(G)$ est non-trivial et le morphisme u vérifie $u(g_0) \neq 0$, alors $[u] \in \Sigma^k(G)$ pour tout $k \geqslant 1$ [24,7]. En particulier $\overline{\Sigma}^2(G) = S(G)$.
3. Groupes fondamentaux des variétés compactes de dimension 3. Si $G = \pi_1(M^3)$, on a $\Sigma^1(G) = \mathcal{C}(M)/\mathbf{R}_+$ $(= -\Sigma^1(G))$ [6,38]. En particulier, $\Sigma^1(G) = \Sigma^2(G)$ et la relation $(*)$ suit trivialement.
4. Groupes de présentation finie à une seule relation. Pour ces groupes on a $\Sigma^q(G) = \Sigma^1(G)$ et $\Sigma^1(G;\mathbf{Z}) = \Sigma^q(G;\mathbf{Z})$ [8]. Cela entraîne en particulier l'égalité $\Sigma^2(G) = \Sigma^2(G;\mathbf{Z})$.
   En fait, si le nombre de générateurs d'une présentation finie à une relation est supérieur à 3, on a $\Sigma^i(G;\mathbf{Z}) = \emptyset$ (voir 5. ci-après) ; pour une présentation à deux générateurs et une relation, l'invariant $\Sigma^1(G)$ a été explicitement calculé par Brown [10].
5. Groupes qui admettent une présentation à défaut supérieur à 2 (par définition, le défaut d'une présentation est le nombre de générateurs — le nombre de relations). Dans ce cas, on a $\Sigma^1(G) = \emptyset$ [6,34,20].
6. Groupes associés à des graphes cordaux (par définition, un graphe cordal n'admet pas des sous-graphes pleins engendrés par plus de 3 sommets qui sont des circuits) — voir [12, 24]. Plus généralement, tout groupe associé à un graphe dont le complexe drapeau est simplement connexe vérifie $(*)$ (en vertu de 3.2).
7. Groupes vérifiant $\Sigma^2(G;\mathbf{Z}) = \emptyset$. Un exemple est $G = F_2 \times F_2$ [7]. Plus généralement, tout groupe associé à un graphe dont le complexe drapeau n'est pas 1-cyclique vérifie cette condition (en particulier c'est le cas des graphes qui n'ont aucun 3-circuit).

Le Théorème 1.1 est une conséquence immédiate du résultat qui suit.

4.2. Un résultat de J.-C. Sikorav

La nullité de l'homologie de Novikov impose une certaine propriété de finitude pour le noyau de la classe u, comme le montre la proposition suivante. Elle a été prouvée par J.-C. Sikorav dans le cas $\pi_2(M) = 0$ (communication privée), mais on n'a pas besoin de cette condition.

PROPOSITION 4.2. – *On considère une variété M compacte et connexe. Soit u une 1-classe de cohomologie rationnelle sur M vérifiant $H_i(M;\pm u) = 0$ pour $i = 1,2$. Alors* $\mathrm{Ker}(u)$ *est de type $\mathcal{FP}_2$.*

Démonstration. – Tout d'abord, quitte à remplacer M par $M \times \mathbf{S}^4$, on peut supposer que sa dimension est supérieure à 5. Ensuite, comme $H_1(M;\pm u) = 0$, on peut éliminer comme dans [18] les points critiques d'indice 1 et $n-1$ d'une forme non-dégénérée α de u (supposée sans centre). En particulier, on peut trouver une primitive $\tilde{f}$ de α dont toutes les feuilles $\tilde{f}^{-1}(c)$ sont connexes.

Puis, on utilise la suite suivante [34] qui est exacte pour tout k :

$$0 \to \varprojlim{}^1 H_{k+1}(\widetilde{M}, \tilde{f} \leqslant c) \to H_k(M;u) \to \varprojlim H_k(\widetilde{M}, \tilde{f} \leqslant c) \to 0$$

où, par définition, $\varprojlim{}^1 A_n = \Pi A_n / \{\pi(\alpha) - \alpha\}$ (ici $\pi : \Pi A_n \to \Pi A_n$ est l'application donnée par les projections π_n du système projectif $(A_n)_n$).

En particulier, la nullité du deuxième groupe d'homologie de Novikov entraîne $\varprojlim H_2(\widetilde{M}, \tilde{f} \leqslant c) = 0$. Mais, du fait que $\tilde{f}$ n'a pas de point critique d'indice $0, 1, n-1, n$, il suit que pour $c < c'$ les morphismes canoniques

$$H_1(\tilde{f} \leqslant c) \to H_1(\tilde{f} \leqslant c')$$

sont surjectifs. On a le diagramme commutatif suivant (à lignes horizontales exactes) :

$$\begin{tikzcd}
H_2(\widetilde{M}) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(\widetilde{M}, \tilde{f} \leqslant c) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(\tilde{f} \leqslant c) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H_2(\widetilde{M}) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(\widetilde{M}, \tilde{f} \leqslant c') \arrow[r] & H_1(\tilde{f} \leqslant c') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Une chasse sur ce diagramme prouve que les flèches

$$H_2(\widetilde{M}, \tilde{f} \leqslant c) \to H_2(\widetilde{M}, \tilde{f} \leqslant c')$$

sont également surjectives. Mais, si les morphismes sont surjectifs, la nullité de la limite projective implique la nullité de tous les groupes du système projectif. Donc, on a $H_2(\widetilde{M}, \tilde{f} \leqslant c) = 0$ et en utilisant encore le diagramme, $H_1(\tilde{f} \leqslant c) = 0$ pour tout réel c. De manière analogue on a $H_1(\tilde{f} \geqslant c) = 0$. En appliquant Mayer–Vietoris, il suit que tous les niveaux de $\tilde{f}$ sont 1-acycliques (puisque $H_2(\tilde{f} \geqslant c) \to H_2(\widetilde{M})$ est surjective). Comme toutes les feuilles de α sont compactes, on obtient une action libre, propre, discontinue, cellulaire, fidèle et cocompacte de $\mathrm{Ker}(u)$ sur chaque feuille $\tilde{f}^{-1}(c)$. Par suite, $\mathrm{Ker}(u)$ est de type $\mathcal{FH}_2$, donc $\mathcal{FP}_2$. □

Remarque. – On pourrait se demander si la nullité de $H_i(M, \pm u)$ pour $i \leqslant m$ détermine le type de finitude de $\mathrm{Ker}(u)$ pour tout m. Si on ajoute la condition de stabilité, on peut utiliser effectivement la même démonstration pour prouver l'énoncé suivant :

Soit $n/2 > m > 2$. Si $\widetilde{M}$ est $(m-1)$-connexe et si $\pm u$ sont stables vérifiant $H_*(M; \pm u) = 0$ pour $* \leqslant m$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ *est de type $\mathcal{F}_m$.*

En revanche, si on n'a pas la condition de stabilité, je ne sais pas si $\mathrm{Ker}(u)$ est de type $\mathcal{FP}_m$.

Démonstration de 1.1. – Compte tenu de 2.2, si $\mathrm{Nov}_{\mathrm{st}} = 0$, l'ensemble $\mathcal{Y}$ est non-vide. Prenons $u \in \mathcal{Y}$. Comme l'ensemble $\mathcal{Y}$ est ouvert, on peut prendre u rationnelle. En vertu de 4.2, on a aussi $\mathrm{Ker}(u)$ de type $\mathcal{FP}_2$. Ensuite, on utilise 4.1 et la condition $(*)$ et on trouve $u \in \overline{\Sigma}^2(\pi_1(M))$. Puisque $\mathcal{Y}$ est ouvert on peut alors supposer que $u \in \mathcal{Y} \cap \Sigma^2(\pi_1(M))$.

Considérons la classe $-u$. Comme précédemment, on démontre qu'elle appartient à $\overline{\Sigma}^2(\pi_1(M))$. En utilisant de nouveau l'ouverture de $\mathcal{Y}$ et aussi celle de $\Sigma^2(\pi_1(M))$, on remplace u par une classe rationnelle u' assez proche, qui appartient à $\mathcal{Y} \cap \Sigma^2(\pi_1(M)) \cap -\Sigma^2(\pi_1(M))$. Cela implique que $\pm u'$ sont stables (voir le Corollaire de 4.1). Donc, grâce au Théorème 2.1, on obtient que la classe u' contient une forme non-singulière, en particulier $\mathrm{Nov}(M) = 0$.

La démonstration du Théorème 1.1 est maintenant complète. □

4.3. Application : Disjonction symplectique de la section nulle dans le fibré cotangent

Cette section est consacrée à la preuve du Théorème 1.4. Ce résultat peut être vu comme un cas particulier de la conjecture d'Arnold [1], dans la mesure où, génériquement, le nombre d'intersections $(\Phi_1(0_M) \cap 0_M)$ (ici nul) excède $\mathrm{Nov}(M)$. Rappelons que la conjecture de Arnold affirme que si Φ_t est engendré par un hamiltonien à support compact $H_t : T^*M \to \mathbf{R}$ dépendant du temps $t \in [0,1]$, alors, génériquement, $\#(\Phi_1(0_M) \cap 0_M) \geqslant \mu(M)$. Elle n'a été démontrée que dans des cas particuliers (p.ex. $n \geqslant 6$ et $\pi_1(M) = 0$) où sous une forme plus faible, dans laquelle on remplace $\mu(M)$ par $\mu_{\mathrm{st}}(M)$ (à son tour minoré par la somme des nombres de Betti de M) [19].

On peut formuler une version non-hamiltonienne, où on ne demande pas que l'isotopie symplectique soit engendrée par un hamiltonien ; dans ce cas on a Nov(M) comme minorant.

Dans le cas $\pi_1(M) = \mathbf{Z}$ et $\dim(M) \geqslant 6$, la démonstration du Théorème 1.4 a été donnée par J.-C. Sikorav dans [32]. Elle a été généralisé par A. Pajitnov pour $\pi_1(M) = \mathbf{Z} \times G$, sous l'hypothèse que la classe de Liouville de $\Phi_1(0_M)$ est la projection sur $\mathbf{Z}$ [27]. Comme dans la démonstration qui suit, la théorie des fonctions génératrices y est l'outil principal. En voici une brève présentation.

Fonctions et formes génératrices

Pour une présentation plus complète des notions développées ici, on renvoie le lecteur à [33]. On commence par rappeler la définition des fonctions et des formes génératrices presque quadratiques à l'infini. On utilise la notation « fgqi » pour les deux notions et on déduit du contexte s'il s'agit d'une forme ou d'une fonction.

DÉFINITION. – *Soit α une 1-forme fermée presque quadratique à l'infini sur $M \times \mathbf{R}^k$. On dit que α est une « fgqi » si l'origine $0 \in \mathbf{R}^k$ est une valeur régulière pour l'application $i_{\partial v}\alpha : M \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$.*

Si $\alpha = dS$ est exacte, on dit que S est une fonction génératrice presque quadratique à l'infini. Si de plus S est quadratique à l'extérieur d'un compact, S s'appelle fonction génératrice quadratique à l'infini.

Supposons que α est comme dans la définition ci-dessus. On considère alors la sous-variété de $M \times \mathbf{R}$ définie comme suit :

$$\Sigma_\alpha := \{(q, v) \in M \times \mathbf{R} \mid i_{\partial v}\alpha(q, v) = 0\}.$$

Puis, on définit une immersion $i_\alpha : \Sigma_\alpha \to T^*M$ par la formule :

$$(q, v) \mapsto (q, \alpha_{q,v})$$

où $\alpha_{q,v}$ est vue comme application linéaire de T_qM dans $\mathbf{R}$.

On voit facilement que i_α est une immersion lagrangienne. De plus, si α est exacte, alors l'immersion lagrangienne i_α est également exacte. Les intersections de L avec la section nulle s'identifient via l'application i_α avec les zéros de la forme α. Par cette identification, les intersections transverses de L avec 0_M correspondent aux zéros non-dégénérés de α.

DÉFINITION. – *On dit que la variété lagrangienne $L := i_\alpha(\Sigma_\alpha)$ est engendrée par la forme génératrice α.*

On utilise le théorème suivant de [33] :

THÉORÈME 4.3. – *Toute variété symplectiquement isotope à 0_M admet une fgqi définie sur $M \times \mathbf{R}^{2k}$ et standard à l'infini.*

Le résultat est démontré dans [33] dans le cas exact. La généralisation non-hamiltonienne en est une conséquence immédiate [32]. On passe maintenant à la :

Démonstration de 1.4. – (ii) $\Rightarrow$ (i) Si Nov(M) = 0, pour α forme fermée non-singulière de degré 1, l'isotopie de plongements lagrangiens $\Phi_t : M \to T^*M$, définie par $q \mapsto t\alpha_q$ disjoint la section nulle d'elle-même.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si l'auto-disjonction est réalisée par une isotopie Φ_t, la variété lagrangienne $\Phi_1(0_M)$ admet d'après le Théorème 4.3 une fgqi non-singulière. Donc $\mathrm{Nov_{st}}(M) = 0$ et, en vertu du Théorème 1.1, Nov(M) = 0. Cela implique que M fibre sur le cercle. □

Remarque. – La question suivante est ouverte :

Question. – Existe-t-il une variété compacte et connexe M ne fibrant pas sur le cercle pour laquelle la section nulle de T^*M peut être disjointe d'elle-même par une isotopie symplectique ?

Il s'agit donc de supprimer la condition $(*)$ de l'énoncé 1.4. Les contre-exemples potentiels sont à chercher parmi les variétés ayant la propriété de la Proposition 3.7 (existence d'une classe $u \in \mathcal{Y}$ telle que $\mathrm{Ker}(u) \notin \mathcal{F}_2$).

Remerciements

Je remercie François Laudenbach pour m'avoir fait découvrir l'article de F. Latour et Jean-Claude Sikorav pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur ces questions.

RÉFÉRENCES

[1] ARNOL'D V.I., First steps in symplectic topology, *Russ. Math. Surv.* **6** (1986) 3–18.
[2] BESTVINA M., BRADY N., Morse theory and finiteness properties of groups, *Invent. Math.* **129** (1997) 445–470.
[3] BIERI R., Homological Dimension of Discrete Groups, *Queen Mary College Mathematics Notes*, 1976.
[4] BIERI R., Normal subgroups in duality groups and in groups of cohomological dimension 2, *J. Pure App. Algebra* **7** (1976) 35–52.
[5] BIERI R., ECKMANN B., Finiteness properties of duality groups, *Comment. Math. Helv.* **49** (1974) 74–83.
[6] BIERI R., NEUMANN W., STREBEL R., A geometric invariant for discrete groups, *Invent. Math.* **90** (1987) 451–477.
[7] BIERI R., RENZ B., Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups, *Comment. Math. Helv.* **63** (1998) 464–497.
[8] BIERI R., STREBEL R., Geometric invariants for discrete groups, Frankfurt, Manuscript in progress.
[9] BROWN K.S., *Cohomology of Groups*, GTM 87, Springer, New York, 1982.
[10] BROWN K.S., Trees, valuations and the Bieri–Neumann–Strebel invariant, *Invent. Math.* **90** (1987) 479–504; 451–477.
[11] CHARNEY R., DAVIS M., Finite $K(\pi, 1)$'s for Artin groups, in: *Prospects in Topology*, Princeton, NJ, 1994, pp. 110–124.
[12] DROMS C., Subgroups of graph groups, *J. Algebra* **110** (1987) 519–522.
[13] ELIASHBERG Y., GROMOV M., Lagrangian intersections and the stable Morse theory, *J. Boll. Unione Mat. Ital., Ser. B11* **VII** (2) Suppl. (1997) 289–326.
[14] FARRELL F.T., JONES L.E., Stable pseudoisotopy spaces of non-positively curved manifolds, *J. Differential Geom.* **38** (1991) 769–834.
[15] HOCHSCHILD G., SERRE J.-P., Cohomology of group extensions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953) 110–134.
[16] HU B., Whitehead groups of finite polyhedra with non-positive curvature, *J. Differential Geom.* **38** (3) (1993) 501–517.
[17] GROMOV M., Hyperbolic groups, essays in group theory, in: Gersten S.M (Ed.), *M.S.R.I. Publ. 8*, Springer, New York, 1987, pp. 75–263.
[18] LATOUR F., Existence de 1-formes fermées non-singulières dans une classe de cohomologie de de Rham, *Publ. Math. IHES* **80** (1994).
[19] LAUDENBACH F., SIKORAV J.-C., Persistance de l'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent, *Invent. Math.* **82** (1985) 349–357.
[20] LEVITT G., 1-formes singulières et groupe fondamental, *Invent. Math.* **88** (1987) 635–667.
[21] KERVAIRE M., On the theorem of Barden–Mazur–Stallings, *Comment. Math. Helv.* **40** (1965) 31–42.

[22] MAUMARY S., Type simple d'homotopie, in: *Torsion et Type Simple d'Homotopie*, Lecture Notes in Math., Vol. **48**, Springer, Berlin, 1967.
[23] MEIER J., MEINERT H., VAN WYK L., Finiteness properties and abelian quotients of graph groups, *J. Math. Res. Lett.* **3** (1996) 779–785.
[24] MEIER J., VAN WYK L., The Bieri–Neumann–Strebel invariants for graph groups, *Proc. London Math. Soc.* **71** (1995) 263–280.
[25] MILNOR J., Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966) 358–426.
[26] NOVIKOV S.P., Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory, *Soviet. Math. Dokl.* **24** (2) (1981) 222–226.
[27] PAJITNOV A., Surgery on the Novikov complex, *K-theory* **10** (1996) 323–412.
[28] PAJITNOV A., On the sharpness of Novikov type inequalities for manifolds with free abelian group, *Math. USSR Sbornik* **68** (1991) 351–389.
[29] RENZ B., *Thesis*, University of Frankfurt, 1987.
[30] SHARKO V.V., The stable algebra of Morse theory, *Math. USSR-Izv.* **36** (3) (1991) 629–653.
[31] SHARKO V.V., *Functions on Manifolds. Algebraic and Topological Aspects*, Trans. Math. Monographs, Vol. **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
[32] SIKORAV J.-C., Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **19** (1986) 543–552.
[33] SIKORAV J.-C., Problèmes d'intersection et de points fixes en géométrie Hamiltonienne, *Comment. Math. Helv.* **62** (1987) 61–72.
[34] SIKORAV J.-C., Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologie réelle de degré un, Thèse Orsay, 1987.
[35] SMALE S., On the structure of manifolds, *Amer. J. Math.* **84** (1962) 387–399.
[36] STALLINGS J.R., A finitely presented group whose 3-dimensional integral homology is not finitely generated, *Amer. J. Math.* **85** (1963) 541–543.
[37] STALLINGS J.R., On fibering certain 3-manifolds, in: *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962, pp. 95–100.
[38] THURSTON W.P., A norm on the homology of 3-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **339** (1986).
[39] TISCHLER D., On fibering certain foliated manifolds over S^1, *Topology* **9** (1970) 153–154.
[40] WALL C.T.C., Finiteness conditions for CW-complexes, *Ann. of Math.* **81** (1965) 56–69.

(Manuscrit reçu le 13 juillet 1999.)

Mihai DAMIAN
Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques,
UMR 7640 CNRS,
91128 Palaiseau cedex, France
E-mail: damian@math.polytechnique.fr