C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 712–716

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbre homologique/Topologie différentielle

# Extensions de fonctions d'un voisinage de la sphère à la boule

## *Extending functions from a neighborhood of the sphere to the ball*

Valentin Seigneur

*Unité de mathématiques pures et appliquées, École normale supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France*

INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*
Reçu le 27 février 2018
Accepté après révision le 25 mai 2018
Disponible sur Internet le 31 mai 2018

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans cette note, nous nous intéressons au problème d'extension d'un germe de fonction défini le long de la sphère standard dont la restriction $f$ à la sphère est de Morse à une fonction $F$ sans points critiques définie sur la boule bordée par la sphère. Nous donnons une condition nécessaire sur les complexes de Morse à coefficients dans $\mathbb{Z}$ associés à $f$.



ABSTRACT

In this note, we are interested in the problem of extending a germ defined along the standard sphere and whose restriction to the sphere is Morse to a function $F$ defined on the ball bounded by the sphere, without critical point. We give an algebraic necessary condition dealing with the Morse complexes of $f$ with $\mathbb{Z}$ coefficients.



## 1. Introduction

Soit $\tilde{f}$ un germe de fonction lisse et sans points critiques au voisinage de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Peut-on l'étendre en une fonction $F$ sans points critiques définie sur toute la boule unité $\mathbb{D}^{n+1}$ ? Par une petite déformation, on pourra supposer que la restriction $f$ de $\tilde{f}$ à la sphère est une fonction de Morse.

Nous identifierons souvent le germe $\tilde{f}$ à un représentant de ce germe $\tilde{f} : \mathbb{S}^n \times [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, où $\varepsilon$ est un réel strictement positif aussi petit que nécessaire, et où le voisinage *collier* $\mathbb{S}^n \times [0, \varepsilon)$ de la sphère est plongé dans la boule $\mathbb{D}^{n+1}$ de la manière suivante : $(x, t) \mapsto (1 - t)x$. Nous noterons aussi systématiquement par $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ la restriction de $\tilde{f}$ à la sphère $\mathbb{S}^n \times \{0\}$.

Cette question a été abordée pour la première fois par Blank et Laudenbach [2], qui donnent une condition nécessaire et suffisante pour le cas $n = 1$. Curley donne une réponse pour $n = 2$, voir [4]. Les deux conditions sont de nature combinatoire et utilisent des graphes étiquetés définis naturellement par la fonction et les signes des dérivées normales à la sphère aux points critiques de $f$.

Dans cette note, nous annonçons une condition nécessaire d'extension sans point critique.

*Adresse e-mail :* valentin.seigneur@ens-lyon.fr.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.05.016

Elle s'appuie sur le travail de Barannikov [1], qui donne une condition nécessaire sur le complexe de Morse de $f$ à coefficients dans un corps, et un diagramme introduit dans l'article précité. Le résultat de Barannikov est également de nature combinatoire et utilise la théorie de Cerf. Nous référons aussi à Laudenbach [6] pour une exposition du travail de Barannikov. Notre condition est algébrique et s'exprime en termes des complexes de Morse de $f$ à coefficients entiers. Elle utilise la théorie de Morse et la théorie de Cerf, voir Laudenbach [5].

Ces résultats, assortis de leurs démonstrations, sont disponibles en anglais dans [9].

## 2. Théorème principal

Nous utilisons les notations de Curley dans ce qui suit.

Si $a$ est un point critique de $f$, nous avons deux possibilités, puisque $\tilde{f}$ n'a pas de point critique :

- $\partial_t \tilde{f}(a,0) > 0$ ; dans ce cas nous dirons que le point $a$ est d'*étiquette* $-$ ;
- $\partial_t \tilde{f}(a,0) < 0$ ; dans ce cas nous dirons que le point $a$ est d'*étiquette* $+$.

Une condition immédiate d'extension sans points critiques est que le maximum (resp. minimum) global de $f$ soit d'étiquette $+$ (resp. $-$). Sinon, par définition des étiquettes, toute extension de $\tilde{f}$ à la boule $\mathbb{D}^{n+1}$ aurait un extremum global à l'intérieur de la boule, ce qui est exclu. Nous supposons donc cette première condition réalisée pour tous les germes considérés par la suite.

Soit $X$ un champ de pseudo-gradient de type Morse–Smale adapté à $f$. Nous choisissons, pour tout entier $k$, un ordre sur les points critiques d'indice $k$ de $f$ tel que, pour cet ordre, tous les points d'étiquette $+$ soient antérieurs aux points d'étiquette $-$.

Soit $\partial_k$ l'opérateur de bord associé au complexe de Morse défini par $X$, qui agit sur le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k(f)$ librement engendré par les points d'indice $k$. La donnée de ces ordres sur les points critiques pour tout indice $k$ nous permet d'écrire $\partial_k$ comme une matrice :

$$\partial_k = \begin{pmatrix} \partial_{++,k} & \partial_{+-,k} \\ \partial_{-+,k} & \partial_{--,k} \end{pmatrix},$$

où $\partial_{\ell_1\ell_2,k}$ envoie $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{\ell_2}(\tilde{f})$, le module libre engendré par les points d'indice $k$ et d'étiquette $\ell_2$, vers $\mathbb{Z}\mathcal{C}_{k-1}^{\ell_1}(\tilde{f})$.

Soit $k$ un entier entre 0 et $n$. Notons $(a_j)_{1\le j\le p_k}$ les points critiques engendrant le sous-module $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{+}(\tilde{f})$, de rang $p_k$, et $(b_i)_{1\le i\le q_k}$ les points critiques engendrant le sous-module $\mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{-}(\tilde{f})$, de rang $q_k$. Le point $b_i$ est donc le $p_k+i$-ème point critique de $f$ pour l'ordre sur les points critiques.

Le *groupe d'isomorphismes* $G_k(\tilde{f})$ est le sous-groupe de $GL_{p_k+q_k}(\mathbb{Z})$ défini de la façon suivante. Une matrice $M_k$ appartient à $G_k(\tilde{f})$ si elle s'écrit sous la forme

$$M_k = \begin{pmatrix} I_{p_k} & 0 \\ N_k & I_{q_k} \end{pmatrix},$$

où $I_r$ est la matrice identité de rang $r$, et où $N_k$ est une matrice dont le coefficient $N_{k;(i,j)}$ en place $(i,j)$ est nul si $f(a_j) < f(b_i)$.

Nous pouvons rassembler tous ces groupes en un groupe global. Notons $s := \sum_{0\le k\le n} p_k + q_k$. Nous noterons $G(\tilde{f})$ le produit des groupes $G_k(\tilde{f})$. On peut réaliser $G(\tilde{f})$ comme un groupe de matrices par blocs dans $GL_s(\mathbb{Z})$ qui s'identifie à un sous-groupe d'automorphismes de $\mathbb{Z}\mathcal{C}(f)$ respectant le degré.

Ce groupe doit être interprété comme l'ensemble des glissements d'anses permis de points d'étiquette $+$ par-dessus les points d'étiquette $-$, qui permettent donc des modifications du pseudo-gradient adapté à $f$. Ainsi, un ensemble de glissements d'anses de points étiquetés $+$ au dessus de points étiquetés $-$ correspond à la conjugaison de l'opérateur de bord $\partial$ par un élément $M$ de $G(\tilde{f})$. Notons que cette action laisse la matrice

$$\partial_{+-} : \bigoplus_{0\le k\le n} \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{+}(\tilde{f}) \to \bigoplus_{0\le k\le n-1} \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^{-}(\tilde{f})$$

inchangée. L'interprétation donnée ci-dessus a cependant ses limites, et les éléments de $G(\tilde{f})$ sont, en général, de nature purement algébrique. Notamment, un glissement d'anses entre deux points critiques $a$ et $b$ de même indice $k$ est géométriquement réalisable seulement s'il existe une ligne strictement descendante de $a$ vers $b$, et si $1 \le k \le n-1$. Un glissement d'anse entre deux extrema n'a pas de sens géométrique non plus. Nous référons le lecteur à [9] pour les détails. Voici le théorème principal :

**Théorème 2.1.** *Soit $\tilde{f}$ un germe de fonction sans points critiques défini au voisinage de la sphère $\mathbb{S}^n$ dans le disque $\mathbb{D}^{n+1}$. On suppose que la restriction $f$ de $\tilde{f}$ à la sphère est une fonction de Morse qui n'a qu'un maximum et un minimum local. Soit $X$ un pseudo-gradient*

*Morse–Smale adapté à $f$ et notons $\partial$ l'opérateur de bord associé. Si le germe $\tilde{f}$ s'étend sans points critiques, alors il existe un élément $M$ de $G(\tilde{f})$, produit d'éléments $M_k$ de $G_k(\tilde{f})$, tel que pour tout indice $k$ :*

$$M_{k-1}\partial_k M_k^{-1} = \begin{pmatrix} \partial'_{++,k} & \partial_{+-,k} \\ 0 & \partial'_{--,k} \end{pmatrix},$$

*où le $\mathbb{Z}$-module gradué*

$$\bigoplus_{0\le k\le n} \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$$

*muni de l'opérateur de bord $\partial'_{++}$ est un complexe de chaîne dont l'homologie à coefficients entiers se réduit à 0 pour tout degré, sauf au degré $n$, où elle est $\mathbb{Z}$.*

Notons que si $f$ n'a qu'un seul maximum *max*, alors nous avons $\partial(max) = 0$ pour n'importe quel opérateur de bord issu d'un champ de pseudo-gradient Morse–Smale adapté à $f$. En effet, un tel opérateur de bord $\partial$ appliqué à *max* compte le nombre de lignes de gradient *avec signe* joignant *max* à un point critique d'indice $n-1$. Mais la variété stable d'un point critique d'indice $n-1$ est une droite orientée dont les deux extrémités tendent vers le maximum, puisqu'il est unique. Dans le comptage du bord $\partial(max)$, une des extrémités correspond à une ligne de gradient qui donne un $+1$ et la deuxième est une autre ligne de gradient qui donne un $-1$. Ainsi, en comptant les lignes de gradients avec signe, nous obtenons $\partial(max) = 1 + (-1) = 0$. Dans le cas où $f$ n'a qu'un maximum local, nous pouvons donc reformuler la deuxième condition du théorème par « *le $\mathbb{Z}$-module gradué*

$$\bigoplus_{0\le k\le n-1} \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$$

*muni de l'opérateur de bord $\partial'_{++}$ est un complexe de chaîne acyclique* ».

La preuve du théorème 2.1 utilise la théorie de Morse et la théorie de Cerf. Elle peut être décrite comme suit, les deux premiers points suivent Barannikov [1].

- Si $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}$ étend le germe $\tilde{f}$ sans points critiques, alors nous pouvons considérer un point $z$ dans l'intérieur de $\mathbb{D}^{n+1}$ et un voisinage fermé $B$ de ce point difféomorphe à une boule fermée. La fonction $F$ restreinte au bord de $B$ n'a qu'un maximum et un minimum pour tout point critique, et la dérivée de $F$ en le maximum dans la direction intérieure à $B$ est négative, tandis que celle en le minimum est positive. Ainsi, la restriction de $F$ à un voisinage collier de $\partial B$ dans $B$ définit un germe de fonction qui a, pour tout point critique, un maximum étiqueté $+$ et un minimum étiqueté $-$. Ce germe sera dénoté $\tilde{h}$, et nous parlerons alors de *germe hauteur*, car ses propriétés sont identiques au germe défini par la projection sur une coordonnée de l'espace euclidien $pr_k\ :\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto x_k$.
- La variété $\mathbb{D}^{n+1} \setminus B$ est difféomorphe à un cylindre $\mathbb{S}^n \times [0,1]$ et $F$, restreinte à ce cylindre, définit un chemin de fonctions entre $f$ et $F_{|\partial B}$ qui s'étend à un chemin entre les germes $\tilde{f}$ et $\tilde{h}$. Nous pouvons supposer ce chemin générique en conservant l'hypothèse que $F$ n'a pas de points critiques.
- Utilisant la théorie de Cerf et celle de Morse, voir [5], nous montrons tout d'abord le résultat important suivant.

  **Lemme 2.2.** *Si $X$ est un champ pseudo-gradient Morse–Smale adapté à $f$ vérifiant la condition nécessaire du Théorème 2.1, alors n'importe quel autre champ pseudo-gradient $X'$ qui est Morse–Smale et adapté à $f$ vérifiera aussi la condition nécessaire.*

  Ainsi, cette condition ne dépend en fait que de $\tilde{f}$ et pas de $X$, comme nous aurions pu le croire. Pour démontrer ce lemme, il faut utiliser le résultat suivant, issu de [7, Section 1.5].

  **Proposition 2.3.** *Si $X$ et $X'$ sont deux pseudo-gradients Morse–Smale adaptés à une fonction de Morse $f$, alors il existe un chemin $t \mapsto X^t$ de pseudo-gradients pour $t \in [0,1]$ tels que $X^0 = X$ et $X^1 = X'$, et tel que $X^t$ soit More–Smale pour tout $t$, sauf un nombre fini d'entre eux, pour lesquels il y a un glissement d'anse.*

- Pour démontrer le Lemme 2.2, il suffit de le faire dans le cas où il n'y a qu'un glissement d'anse entre $X$ et $X'$, ce qui se fait par des calculs matriciels, et dépend des étiquettes des points impliqués dans le glissement d'anse. Pour démontrer le théorème principal, il suffit de trouver un pseudo-gradient $X^0$ sur $\mathbb{S}^n$ qui est Morse–Smale et adapté à $f$ et un élément $M^0 \in G(\tilde{f})$ tels que, en notant $\partial^0$ l'opérateur de bord associé :
  - $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{-+} = 0$,
  - le module gradué

$$\bigoplus_{0\le k\le n} \mathbb{Z}\mathcal{C}_k^+(\tilde{f})$$

muni de l'opérateur de bord $(M^0\partial^0(M^0)^{-1})_{++}$ est un complexe de chaîne dont l'homologie est nulle en tout degré différent de $n$, et dont l'homologie est $\mathbb{Z}$ en degré $n$.

Pour trouver un tel pseudo-gradient, nous montrons d'abord le lemme suivant.

**Lemme 2.4.** *Un accident de type mort éliminant une paire de points critiques $(a, b)$ ne peut se produire sans points critiques pour $F$ que si les deux points sont de même étiquette.*

Le chemin induit par $F$ entre $\tilde{f}$ et le germe hauteur $\tilde{h}$ fournit alors un chemin générique avec un nombre fini d'accidents, tels que les accidents de type mort (ou naissance) ne tuent (ou font naître) que des points de même étiquette seulement.

- Nous pouvons alors faire une récurrence sur le nombre d'accidents en remontant le chemin, puisque trouver un pseudo-gradient qui remplit la condition nécessaire pour $\tilde{h}$ est évident. Finalement, nous devons démontrer :

**Lemme 2.5.** *Soit $t \mapsto f^t$, pour $t \in [0, 1+\varepsilon)$, un chemin entre deux fonctions de Morse $f^0$ et $f^1$ qui présente un unique accident. Supposons aussi que la fonction $F : (x,t) \mapsto f^t(x)$ n'a pas de points critiques et que $\widetilde{f^1}$, germe représenté par $(x,t) \in \mathbb{S}^n \times [1, 1+\varepsilon) \mapsto f^t(x)$ remplit les conditions du Théorème 2.1. Alors $\widetilde{f^0}$, germe représenté par $(x,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,\varepsilon) \mapsto f^t(x)$, remplit aussi les conditions du théorème.*

La démonstration de ce lemme est technique. Il s'agit de trouver un pseudo-gradient $X^0$ Morse–Smale et adapté à $f^0$ et une matrice $M^0 \in G(\widetilde{f^0})$ à partir d'un pseudo-gradient $X^1$ Morse–Smale et adapté à $f^1$ et une matrice $M^1 \in G(\widetilde{f^1})$. Elle se réduit dans la plupart des cas à des calculs matriciels. Le lecteur ou la lectrice pourra trouver les détails dans [9].

## 3. Autres résultats

La condition du Théorème 2.1 n'est cependant pas suffisante.

**Théorème 3.1.** *Il existe une fonction de Morse $f$ et un germe $\tilde{f}$ vérifiant la condition du théorème, mais ne s'étendant pas sans points critiques.*

La démonstration exhibe un germe explicite dont la fonction de Morse a six points critiques : un maximum étiqueté $+$, un minimum étiqueté $-$, un point d'indice $k$ et étiqueté $-$, deux points d'indice $k+1$ d'étiquettes différentes et un point d'indice $k+2$ étiqueté $+$. Le résultat repose sur de la théorie de Morse à bord, voir [3, Lemme 2.20], notamment le fait que si $F_1$ est une fonction de Morse sur une variété à bord $M$ et si $a$ est un point critique pour la restriction $f_1$ de $F_1$ à $\partial M$ étiqueté $+$, alors la sphère d'attachement de $a$ dans la variété de niveau de $F_1$ doit être homotopiquement triviale.

Le théorème n'est pas suffisant, mais nous avons le résultat :

**Théorème 3.2.** *Soit $\tilde{f}$ le germe d'une fonction de Morse $f$ qui vérifie les hypothèses du Théorème 2.1, alors il existe un germe $\tilde{f}_1$ d'une fonction de Morse $f_1$ tel que :*

- *$G(\tilde{f}_1) = G(\tilde{f})$, en particulier la fonction $f_1$ a le même nombre de points critiques que $f$, avec mêmes indices et mêmes étiquettes ;*
- *le germe $\tilde{f}_1$ s'étend sans points critiques.*

La démonstration de ce théorème exhibe un tel $\tilde{f}_1$ à partir de $\tilde{f}$. Nous construisons la fonction $f_1$ depuis $f$ par un chemin générique de fonctions dont les seuls accidents sont des croisements (il n'y a ni mort, ni naissance). Le germe $\tilde{f}_1$ est alors donné en choisissant les étiquettes qui conviennent pour les points critiques de $f_1$, ce qui est toujours possible. De plus, utilisant [7, Corollaire 2.2], nous pouvons même supposer avoir un pseudo-gradient Morse–Smale unique $X$ adapté à $f$ et à $f_1$. Ceci implique, en particulier, que $f$ et $f_1$ ont le même nombre de points critiques ayant un indice donné, et le même opérateur de bord.

Les seules choses qui diffèrent entre $f$ et $f_1$ sont les valeurs critiques.

Il semble en général difficile de vérifier en pratique si la condition nécessaire donnée par le Théorème 2.1 est satisfaite. En revanche, le problème est plus facile si on se restreint au cas où $G(\tilde{f})$ est le plus gros possible, c'est-à-dire au cas où les points d'indice $k$ et étiquetés $+$ sont tous au-dessus des points d'indice $k$ et étiquetés $-$, autorisant tous les glissements d'anses possibles de points $+$ au dessus de points $-$.

Dans le cas où $f$ n'a qu'un maximum local et qu'un minimum local, et que les indices des autres points critiques ne peuvent prendre que deux valeurs qui sont entre 2 et $n-2$, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.3.** *Soit un germe $\tilde{f}$ avec les propriétés ainsi décrites. Notons $j$ et $j+1$ les valeurs prises par les indices des points critiques non extrémaux. Supposons $n \geq 6$. Soit $X$ un pseudo-gradient Morse–Smale qui est adapté à $f$ et soit $\partial$ l'opérateur de bord associé. On note $d$ le p.g.c.d. des coefficients de $\partial_{+-,j+1}$. Alors le germe s'étend si et seulement si*

$$\det(\partial_{++,j+1}) \equiv \pm 1 \quad [d].$$

La suffisance de la condition provient du fait qu'il n'y a que deux indices non extrémaux possibles, et que la dimension $n$ est supérieure à 6. Les hypothèses de dimension $n \geq 6$ et $2 \leq k \leq n-2$ nous permettent en effet d'utiliser [8, Théorème 6.4] de cancellation de points critiques. Il est implicite dans le théorème que nous supposons que la matrice $\partial_{++,j+1}$ soit carrée, c'est-à-dire qu'il y ait autant de points critiques d'indice $j+1$ étiquetés $+$ que de points critiques d'indice $j$ étiquetés $+$. La démonstration de ce théorème est facile dans le sens direct. Dans l'autre sens, elle se résume à des considérations arithmétiques basiques d'une part, et à une utilisation de la théorie de Morse, d'autre part.

## Remerciements

Je souhaite remercier vivement le rapporteur anonyme pour ses commentaires. Je souhaite aussi remercier François Laudenbach pour ses nombreux commentaires et conseils.

## Références

[1] S. Barannikov, The framed Morse complex and its invariants, Adv. Sov. Math. 21 (1994) 93–115.
[2] S. Blank, F. Laudenbach, Extension à une variété de dimension 2 d'un germe de fonction donnée au bord, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 270 (1970) 1663–1665.
[3] M. Borodzik, A. Nemethi, A. Ranicki, Morse theory for manifolds with boundary, Algebraic Geom. Topol. 16 (2) (2016) 971–1023.
[4] C. Curley, Non-singular extension of Morse functions, Topology 16 (1977) 89–97.
[5] F. Laudenbach, Homologie de Morse dans la perspective de l'homologie de Floer, IMHOTEP J. Afr. Math. Pures Appl. 9 (2) (2010).
[6] F. Laudenbach, On an article by S.A. Barannikov, conférence donnée à une école d'hiver à La Llagone, France, 2013, http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~laudenba/barannikov_I-III.pdf.
[7] F. Laudenbach, A proof of Reidemeister–Singer's theorem by Cerf's methods, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) XXIII (1) (2014) 197–221.
[8] J. Milnor, Lectures on the h-Cobordism Theorem, Princeton University Press, 1965.
[9] V. Seigneur, Extending functions from a neighborhood of the sphere to the ball, arXiv:1805.06840, 2018.