C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 737–746

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe/Géométrie analytique

Une propriété de continuité associée aux classes de cohomologie de Hodge

A property of continuity associated with Hodge cohomology classes

Michel Méo

IECL, boulevard des Aiguillettes, BP 70239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 24 septembre 2016
Accepté après révision le 16 mai 2018
Disponible sur Internet le 24 mai 2018

Présenté par Jean-Pierre Demailly

RÉSUMÉ

Les obstructions, pour une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ fermée de bidimension (p,p) sur une variété projective, à être cohomologue à un cycle algébrique à coefficients complexes, sont explicitées au moyen de la transformation de Chow. Elles s'expriment par l'orthogonalité, sur la variété elle-même, à des familles paramétrées par la grassmannienne de courants complètement déterminés. Chacun de ces courants est dd^c-fermé et à support dans l'intersection de la variété avec le sous-espace projectif associé au paramètre. Par la théorie des formes harmoniques, une période est donc associée à cette forme différentielle pour chaque paramètre. On étudie l'ensemble des périodes, obtenu en faisant varier le paramètre, et on conclut à une continuité sur la grassmannienne, quand la classe de cohomologie est rationnelle. La même propriété peut être obtenue en se plaçant dans l'espace des diviseurs de la grassmannienne et en utilisant une caractérisation des formes de Chow. On raisonne ici directement, en calculant les périodes avec le théorème de Atiyah–Hirzebruch. Cette continuité globale entraîne alors l'orthogonalité pour tout paramètre.

ABSTRACT

The obstructions, for a closed smooth differential form of bidimension (p,p) on a projective manifold, to be cohomologous to an algebraic cycle with complex coefficients, are calculated in terms of the Chow transformation. They can be expressed as an orthogonality condition, on the manifold itself, with families parametrized by the Grassmannian of currents that are completely determined. Each of these currents is dd^c-closed and with support in the intersection of the manifold and of the projective subspace associated with the parameter. By the theory of harmonic forms, a period is thus associated with that differential form for each parameter. We study the set of periods, obtained when the parameter varies, and we arrive at a continuity on the Grassmannian, when the cohomology class is rational. The same property can be obtained by going to the space of divisors of the Grassmannian and by using a characterization of Chow forms. We proceed

Adresse e-mail : michel.meo@univ-lorraine.fr.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.05.008

here directly, by calculating the periods by means of the Atiyah–Hirzebruch theorem. This global continuity implies the orthogonality for all parameter.

1. Régularisation du potentiel du courant transformé de Chow

Soit X une sous-variété complexe fermée connexe de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n$, de dimension notée d_X. Pour $e_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $p \le d_X$, on note $G(p+1, V^*)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension $p+1$ de V^*, où V désigne la puissance symétrique $S^{e_0}(\mathbb{C}^{n+1})$.

Pour T un courant de bidimension (p, p) dans X, on considère le *transformé de Chow* $\mathcal{C}'(T)$ *d'ordre* e_0, qui est un courant de bidegré $(1, 1)$ dans $G(p+1, V^*) = G(q, V)$ avec $q = N - p$ et $\dim V = N + 1 = \binom{e_0+n}{n}$. On a :

$$\mathcal{C}'(T) = \mathcal{C}(\nu_* T)$$

où $\nu : X \hookrightarrow P(V)$ désigne la composée de l'injection $X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ avec le plongement de Veronese de degré $e_0 \ge 2$ de $\mathbb{P}_n$ dans $P(V)$ et $\mathcal{C}$ la transformation de Chow des courants définis sur $\mathbb{P}_N = P(V)$. On a, par définition,

$$\mathcal{C}(\Theta) = pr_{2*} pr_1^* \Theta$$

où $pr_1 : \Gamma \to P(V)$, $pr_2 : \Gamma \to G(q, V)$ sont les deux projections de la variété d'incidence Γ dans $P(V) \times G(q, V)$, formée des couples $([x], s)$ vérifiant $x \in s$.

Nous concluons ici une étude commencée dans notre thèse [8] sous la direction de Jean-Pierre Demailly.

Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note $V^{d,q}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales $f(z)$ sur V^q telles que

$$f(a_{11}z^1 + \ldots + a_{1q}z^q, \ldots, a_{q1}z^1 + \ldots + a_{qq}z^q) = (\det A)^d f(z)$$

pour toute matrice carrée $A = (a_{ll'})_{1 \le l, l' \le q}$ dans $M_q(\mathbb{C})$ et tout $z = (z^1, \ldots, z^q)$ dans V^q. Pour des $d_\nu \in \mathbb{N}^*$ et des $f_\nu \in V^{d_\nu, q}$ non nulles, on note D_ν le diviseur de $G(q, V)$ défini par f_ν.

Dans la note [9], on construit une famille finie d'opérateurs différentiels linéaires $(\mathcal{P}_j)_{1 \le j \le j_0}$ sur $G(q, V)$ et une famille finie de fonctions $(\psi_j)_{1 \le j \le j_0}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $G(q, V)$ tels que le diviseur $\sum_\nu c_\nu D_\nu$ avec des $c_\nu \in \mathbb{C}$ est la forme de Chow d'un cycle algébrique de X à coefficients complexes si et seulement si il existe $t \in \mathbb{C}$ vérifiant, pour tout $1 \le j \le j_0$, l'égalité $\mathcal{P}_j(\sum_\nu c_\nu \log ||f_\nu||) = t\psi_j$.

On suppose désormais T fermé et on écrit

$$\mathcal{C}'(T) = (\deg T)\Omega + dd^c U$$

avec U une distribution sur $G(q, V)$, Ω la $(1, 1)$-forme fondamentale de la métrique sur $G(q, V)$ et $\deg T$ le degré de T par rapport à la métrique induite dans X par la forme de Fubini–Study ω dans $P(V)$.

Proposition 1. *Il existe une suite $(U_m)_m$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $G(q, V)$ convergeant faiblement vers U telles que $\mathcal{P}_j(U_m) \to (\deg T)\psi_j$ dans l'espace $\mathcal{D}^0(G(q, V))$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ dans $G(q, V)$, pour tout $1 \le j \le j_0$, lorsque la classe de cohomologie $\{T\}$ contient un cycle algébrique à coefficients complexes.*

Démonstration. Voir [9]. □

Soit $(U_m)_m$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $G(q, V)$ convergeant faiblement vers U. Comme au sens des distributions $\mathcal{P}_j(U) = (\deg T)\psi_j$, la suite $\mathcal{P}_j(U_m)$ converge faiblement dans $G(q, V)$ vers $(\deg T)\psi_j$.

Proposition 2. *Sans hypothèse sur la classe de cohomologie $\{T\}$, il existe un sous-ensemble algébrique $A_1 \subset G(q, V)$ avec* $\dim A_1 < \dim G(q, V)$, *donc négligeable, tel que, pour tout $s \in G(q, V) \setminus A_1$, la suite $\mathcal{P}_j(U_m)(s)$ converge vers* $(\deg T)\psi_j(s)$.

Démonstration. Voir [10]. □

L'algébricité de $\{T\}$, c'est-à-dire la convergence vers $(\deg T)\psi_j(s)$ pour tout $s \in G(q, V)$, revient donc à ce que, pour tout $s \in A_1$, on ait $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s) = (\deg T)\psi_j(s)$.

1.1. *Existence a priori de* $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ *pour s quelconque*

On va utiliser une régularisation canonique U_m de U pour laquelle $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ existera pour tout s tel que $X \not\subset P(s)$, a priori.

D'abord, soit γ_s une forme de Green du sous-espace projectif $P(s)$ de $P(V)$ associé à s, c'est-à-dire une (p,p)-forme différentielle à coefficients L^1_{loc} dans $P(V)$ et $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V) \setminus P(s)$, vérifiant, au sens des courants dans $P(V)$, l'égalité

$$[P(s)] = \omega^{p+1} + \mathrm{dd^c}\gamma_s.$$

Proposition 3. *Si T est d'ordre 0, on peut prendre à une constante près $U(s) = \int_X T \wedge (\gamma_{s|X})$ pour presque tout $s \in G(q,V)$.*

Démonstration. Voir [8]. □

On suppose désormais T de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on pose

$$U_m(s) = \int\limits_X T \wedge (\gamma_{s,m|X})$$

où $\gamma_{s,m}$ est une régularisation de γ_s. La limite de $\mathcal{P}_j(U_m)(s)$ est alors égale à

$$\int\limits_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_{s|X}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{\rho_{s|X} > \epsilon} T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_{s|X})$$

avec

$$\rho_s([x]) = \{\mathrm{dist}(x,s)\}^2/(|x|^2)$$

pour $x \in V \setminus \{0\}$, ce qui permet de démontrer maintenant la convergence a priori.

Proposition 4. *Pour tout $s \in G(q,V)$ vérifiant $X \not\subset P(s)$, la suite $\mathcal{P}_j(U_m)(s)$ converge.*

Démonstration. Supposons d'abord la suite $\mathrm{Re}\, \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ minorée. Alors,

$$\lim_m \mathrm{Re}\, \mathcal{P}_j(U_m)(s) = \int\limits_{X \setminus (X \cap P(s))} \lim_{s' \to s} \mathrm{Re}\, (T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_{s'|X})).$$

Par le lemme de Fatou, c'est

$$\leq \lim_{s' \to s} \mathrm{Re} \int\limits_{X \setminus (X \cap P(s'))} T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_{s'|X}) \leq (\deg T) \lim_{s' \to s} \mathrm{Re}\, \psi_j(s') \leq (\deg T) \mathrm{Re}\, \psi_j(s).$$

Ainsi la suite $\mathrm{Re}\, \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ est majorée et ne peut tendre vers $+\infty$.

Si la suite $\mathrm{Re}\, \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ est majorée, la suite $-\mathrm{Re}\, \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ est minorée et on raisonne avec $-\mathcal{P}_j$ au lieu de $\mathcal{P}_j$. □

Comme $\mathcal{P}_j(U) = (\deg T)\psi_j$ pour toute forme différentielle T de classe $\mathcal{C}^\infty$ fermée de bidimension (p,p) dans X, on peut écrire au sens des courants dans X toujours si $X \not\subset P(s)$,

$$\mathcal{P}_j(\gamma_{s|X}) = \psi_j(s)\omega^p_{|X} + \partial(\rho^{1-L}_{s|X} a_{j,s}) + \overline{\partial}(\rho^{1-L}_{s|X} b_{j,s})$$

avec $a_{j,s}$ de bidegré $(p-1,p)$ et $b_{j,s}$ de bidegré $(p,p-1)$. On a donc, à s fixé,

$$\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s) = \int\limits_{]0,1]} t^{-L} (\rho_{s|X})_* \big(T \wedge \rho^L_{s|X} \mathcal{P}_j(\gamma_s)_{|X}\big)$$

tandis que, au sens des distributions,

$$(\deg T)\psi_j = \mathcal{P}_j(U) = \int\limits_{[0,1]} \Big(t^{-L}(\rho_{s|X})_* \big(T \wedge \rho^L_{s|X} \mathcal{P}_j(\gamma_s)_{|X}\big) + \text{mesure à support dans } \{0\}\Big).$$

Ainsi, le fait que la fonction $\psi_j(s)$ ait une valeur finie redonne bien la convergence a priori de l'intégrale $\int_{]0,1]} t^{-L}(\rho_{s|X})_*(T \wedge \rho^L_{s|X}\mathcal{P}_j(\gamma_s)_{|X})$.

En posant $u_j = \rho_{s|X}^{1-L} a_{j,s}$ et $v_j = \rho_{s|X}^{1-L} b_{j,s}$, on a en fait dans X, en désignant par $\tilde{}$ les extensions,

$$\mathcal{P}_j(\gamma_{s|X}) - \psi_j(s)\omega_{|X}^p = \partial\tilde{u}_j + \overline{\partial}\tilde{v}_j = (\partial u_j)\tilde{} + (\overline{\partial} v_j)\tilde{} + \text{courant à support dans } X \cap P(s).$$

Proposition 5. *La condition* $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s) = (\deg T)\psi_j(s)$ *à s fixé revient à*

$$0 = \int_X T \wedge \{\partial\tilde{u}_j - (\partial u_j)\tilde{} + \overline{\partial}\tilde{v}_j - (\overline{\partial} v_j)\tilde{}\}.$$

Démonstration. Cette condition sera étudiée dans la partie 3, qui redonnera le fait que le courant $\partial\tilde{u}_j - (\partial u_j)\tilde{} + \overline{\partial}\tilde{v}_j - (\overline{\partial} v_j)\tilde{}$ est à support dans $X \cap P(s)$. □

1.2. Régularisation U_m obtenue à partir d'une forme de Green explicite γ_s dans $\mathbb{P}_N$

Par la théorie des opérateurs de Monge–Ampère (cf. [3]), on a

$$[P(s)] = (\omega + \frac{1}{2}\mathrm{dd^c}\log\rho_s)^{p+1}.$$

Proposition 6. *On peut prendre pour forme de Green de $P(s)$ dans $P(V)$ la forme différentielle définie par*

$$\gamma_s = \frac{1}{2}(p+1)(\log\rho_s)\omega^p - \sum_{k'=1}^{p} \frac{\binom{p+1}{k'+1}}{k' 2^{k'+1}} (\frac{\mathrm{dd^c}\rho_s}{\rho_s})^{k'} \wedge \omega^{p-k'}.$$

Démonstration. Avec la formule

$$(\mathrm{dd^c}\log\rho_s)^{k'+1} = \mathrm{dd^c}\{-\frac{1}{k'}(\frac{\mathrm{dd^c}\rho_s}{\rho_s})^{k'}\}$$

et avec la formule du binôme. □

Ajoutant un multiple de ω^p à l'expression précédente de γ_s, on peut même supposer qu'on a l'égalité $\int_{P(V)} \gamma_s \wedge \omega^q = 1$ pour tout s.

En remplaçant ρ_s par $\rho_s + \frac{1}{m}$ dans l'expression précédente de γ_s, on obtient la régularisation

$$\gamma_{s,m} = C_0\omega^p + \frac{1}{2}(p+1)(\log(\rho_s + \frac{1}{m}))\omega^p - \sum_{k'=1}^{p} \frac{\binom{p+1}{k'+1}}{k' 2^{k'+1}} (\frac{\mathrm{dd^c}\rho_s}{\rho_s + \frac{1}{m}})^{k'} \wedge \omega^{p-k'}$$

de [10] qui est en particulier du type (1.1). Alors

$$\mathcal{P}_j(U_m)(s) = \int_X T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_{s,m|X})$$

avec donc

$$\mathcal{P}_j(\gamma_{s,m}) = C_0\mathcal{P}_j(1)\omega^p + \log(\rho_s + \frac{1}{m})\theta_{j,s,0} + \sum_{1\le l\le d_j} \frac{\theta_{j,s,l}}{(\rho_s + \frac{1}{m})^l},$$

pour une certaine constante C_0 et avec $\theta_{j,s,l}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$ pour $0 \le l \le d_j$.

L'existence de $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ revient ainsi à l'existence de

$$\lim_m \sum_{1\le l\le d_j} \int_X \frac{T \wedge \theta_{j,s,l}}{(\rho_s + \frac{1}{m})^l} = \lim_m \sum_{1\le l\le d_j} \int \frac{(\rho_{s|X})_*(T \wedge \theta_{j,s,l})}{(t + \frac{1}{m})^l} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{1\le l\le d_j} \int_{\rho_{s|X}>\varepsilon} \frac{T \wedge \theta_{j,s,l}}{(\rho_{s|X})^l}$$

et signifie un aplatissement en 0 de la fonction de t égale à

$$\mu(t) = \sum_{1\le l\le d_j} t^{d_j - l}(\rho_{s|X})_*(T \wedge \theta_{j,s,l}).$$

D'après [10], on sait que cette limite existe pour $s \in G(q,V) \setminus A_1$ avec, en fait,

$$A_1 = \{s \in \mathbb{G}_{N-p-1,N}, \dim(X \cap P(s)) \ge d_X - p\}.$$

Proposition 7. *L'aplatissement en* 0 *de* $\mu(t)$ *a lieu pour tout* s *tel que* $X \not\subset P(s)$.

Démonstration. L'aplatissement a lieu si

$$\dim \rho_{s|X}^{-1}(0) = \dim (X \cap P(s)) = d_X - p - 1$$

est générique. Si dim $(X \cap P(s))$ augmente et devient $\geq d_X - p$, l'aplatissement a lieu a fortiori. □

On retrouve ainsi la convergence a priori pour tout s tel que $X \not\subset P(s)$.

Proposition 8. *On a* $\mathcal{P}_j(1) = 0$, *autrement dit* $\mathcal{P}_j$ *n'a pas de terme d'ordre* 0.

Démonstration. On note $T_{IJ}(x)$ les coefficients de l'image inverse dans $V = \mathbb{C}^{N+1}$ de la forme différentielle $T([x])$ pour $x \in V \setminus \{0\}$. Pour $(z^1, \ldots, z^{N-p}) \in V^{N-p}$, la transformée de Radon de T_{IJ} évaluée en $(z^1, \ldots, z^{N-p})$ est, par définition,

$$\tilde{T}_{IJ}(z^1, \ldots, z^{N-p}) = \int_{||t||=1} T_{IJ}(t_1 z^1 + \ldots + t_{N-p} z^{N-p}) \Phi(t)$$

avec $t = (t_1, \ldots, t_{N-p}) \in \mathbb{C}^{N-p}$ et $\Phi(t)$ la forme volume standard sur la sphère unité $\mathbb{S}^{2(N-p)-1}$ de $\mathbb{C}^{N-p}$. Pour α et β des multi-indices, on note $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_0 + \ldots + \alpha_N}}{\partial x_0^{\alpha_0} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$ et $x^\beta = x_0^{\beta_0} \ldots x_N^{\beta_N}$. L'existence de $\mathcal{P}_j$ est démontrée dans [9] et résulte du fait que

$$\{\partial^\alpha (x^\beta T_{IJ})\}^{\tilde{}}$$

est un opérateur différentiel explicite en $\tilde{T}_{IJ}$. Mais $\tilde{T}_{IJ} \in \operatorname{Im} \partial_I \overline{\partial}_J$ avec l'opérateur différentiel $\partial_I = \det(\frac{\partial}{\partial z_{i_\alpha}^k})_{1 \leq k, \alpha \leq q}$ où les $(z_i^k)_{0 \leq i \leq N}$ sont les coordonnées de $z^k \in V$. Comme l'opérateur différentiel $\partial_I \overline{\partial}_J$ n'a pas de terme constant, $\mathcal{P}_j$ n'a pas de terme d'ordre 0. □

Enfin, signalons aussi que l'écriture précédente,

$$\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s) = \int_0^1 \frac{\alpha(t,s)}{t^{2d_j}} \mathrm{d}t$$

avec $\alpha(t,s)\mathrm{d}t$ qui est une image directe par $\rho_{s|X}^{\frac{1}{2}}$, permet de calculer $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ à l'aide d'un développement asymptotique lorsque $t \to 0^+$. En effet, pour $(t,s) \in]0, \frac{1}{2}] \times G(q, V)$, d'après [1] on peut écrire

$$\alpha(t,s) = \sum_{r,r'} \mathcal{L}_{r,r'}(s) t^r |\log t|^{r'} + \delta(t,s) t^{2d_j}$$

où δ est bornée et où $(r, r') \in \mathbb{Q}^2$. À cause de la convergence de l'intégrale, $\mathcal{L}_{r,r'}(s) \neq 0$ pour un s, implique $r > 2d_j - 1$ ou $r = 2d_j - 1$ avec $r' < -1$. Dans le développement asymptotique, (r, r') parcourt un ensemble fini indépendant de s.

Un calcul explicite des coefficients $\mathcal{L}_{r,r'}(s)$ permettrait d'étudier la continuité globale par rapport à s de $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s)$.

1.3. Régularisation U_m obtenue à partir de la formule de Poincaré–Lelong dans $\mathbb{G}_{N-p-1,N}$

Proposition 9. *On peut écrire le* $(1,1)$*-courant* $C'(T)$ *qui est d'ordre* 0 *sous la forme*

$$C'(T) = \int_{H \in \mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})} \lambda(H)[H]$$

où $\mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})$ *est l'espace des diviseurs de* $\mathbb{G}_{N-p-1,N}$ *et* λ *est une mesure sur* $\mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})$, *qui n'est pas uniquement déterminée.*

Démonstration. D'après [2,4], tout $(1,1)$-courant fermé sur $\mathbb{G}_{N-p-1,N}$ est limite faible de diviseurs à coefficients complexes. □

On en déduit une autre régularisation utilisée dans [11] pour étudier la continuité globale en s de $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s)$.
En effet, à une constante près, d'après la formule de Poincaré–Lelong, on a

$$U(s) = \int_{[f]\in \mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})} \lambda([f]) \log(\frac{\|f(s)\|}{\|f\|_0})$$

où $\|f\|_0$ est la norme de la forme f. On prend alors

$$U_m(s) = \frac{1}{2} \int_{[f]\in \mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})} \lambda([f]) \log(\frac{\|f(s)\|^2}{\|f\|_0^2} + \frac{1}{m})$$

qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{G}_{N-p-1,N}$ et converge faiblement vers $U(s)$ à une constante près.

Proposition 10. *La limite*

$$\lim_m \int_{[f]\in \mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})} \frac{\lambda([f])}{2} \mathcal{P}_j\big(\log(\frac{\|f(s)\|^2}{\|f\|_0^2} + \frac{1}{m})\big) = \lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s)$$

existe a priori pour tout $s \in \mathbb{G}_{N-p-1,N}$ tel que $X \not\subset P(s)$.

Démonstration. Cela résulte de (1.1) et de ce que la limite ne dépend pas de la régularisation de U. $\square$

Remarquons que comme $\mathcal{P}_j(1) = 0$, on a aussi l'expression

$$\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s) = \lim_m \int_{[f]\in \mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})} \frac{\lambda([f])}{2} \mathcal{P}_j\big(\log(\|f(s)\|^2 + \frac{1}{m}\|f\|_0^2)\big).$$

La proposition précédente entraîne que le produit

$$\lambda([f])\mathcal{P}_j(\log\|f(s)\| = \lim_m \frac{\lambda([f])}{2} \mathcal{P}_j\big(\log(\frac{\|f(s)\|^2}{\|f\|_0^2} + \frac{1}{m})\big)$$

de distributions est bien défini dans $\mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})$. En notant $(N-p)d(f)$ le degré du polynôme f, puisque $dd^c \log|f| = [f^{-1}(0)]$, on a

$$\mathcal{P}_j(\log\|f(s)\|) = d(f)\psi_j(s) \text{ modulo une distribution à support dans } f^{-1}(0),$$

de sorte que $\|f(s)\|^{2m_j} \mathcal{P}_j(\log\|f(s)\|)\psi_j(s)^{-1} = \upsilon_j(f,s)$ est $\mathcal{C}^\infty$, en notant m_j l'ordre de $\mathcal{P}_j$.
Ainsi,

$$\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s) = \int_{[f]\in \mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N})} \lambda([f])\mathcal{P}_j(\log\|f(s)\|)$$

avec $\lambda([f])\mathcal{P}_j(\log\|f(s)\|)$ qui est, comme dans [11], une division de $\lambda([f])\upsilon_j(f,s)\psi_j(s)$ par $\|f(s)\|^{2m_j}$. Signalons que, lorsqu'on effectue la division, il apparaît bien une distribution à support contenu dans $f^{-1}(0)$.

2. Caractérisation des formes de Chow de cycles algébriques de *X*

Soit $C_p(X)$ l'espace des cycles algébriques de X de dimension p et $\mathcal{M}_j$ l'opérateur différentiel linéaire défini par $\mathcal{M}_j = \psi_j(s)^{-1}\mathcal{P}_j$. On rappelle que, d'après [10], on a $A_1 = \{s \in \mathbb{G}_{N-p-1,N}, \dim\,(X \cap P(s)) \geq d_X - p\}$, c'est-à-dire que $s \in A_1$ lorsque l'intersection $X \cap P(s)$ n'est pas propre.
L'objectif de cette partie est de redémontrer le résultat suivant.

Théorème A. *Soit $f \in V^{d,q}$ une fonction polynomiale telle que $A_1 \not\subset f^{-1}(0)$. Alors $[f]$ appartient à $C_p(X)$ lorsque*

$$\mathcal{M}_j(\log\|f\|)_{|A_1} = d(f)$$

pour tout j, en notant $(N-p)d(f)$ le degré de f.

Ce théorème est démontré dans [11] en invoquant un argument de transversalité et permet déjà d'obtenir la continuité globale en s de $\lim_m \mathcal{P}_j(U_m)(s)$ lorsque $\{T\}$ est rationnelle. On procèdera ici de façon simplifiée, en explicitant des équations algébriques caractérisant $C_p(X)$.

Supposant f irréductible et utilisant des coordonnées homogènes sur la grassmannienne, on a

$$\mathcal{M}_j(\log\|f\|)_{|A_1} = d(f) \Leftrightarrow \mathcal{R}_j(\log|f|)_{|\tau^{-1}A_1} = 0$$

avec $\tau : (\mathbb{C}^{N+1})^{N-p} \to \mathbb{G}_{N-p-1,N}$ défini par $\tau(z^1,\dots,z^{N-p}) = \mathrm{Vect}\,(z^1,\dots,z^{N-p})$ et avec $\mathcal{R}_j$ un opérateur différentiel linéaire tel que

$$\mathcal{R}_j(\log|f|) = \sum_{l,m} B_{j,l,m}(f)\frac{\partial^{l+m}\delta}{\partial t^l \partial \bar{t}^m}\circ f$$

où $\delta(t)$ est la masse de Dirac en 0 dans $\mathbb{C}$ (cf. [11]). Alors les fonctions $B_{j,l,m}(f)$ et leurs dérivées partielles vérifient des relations dans $f^{-1}(0)\cap A_1$.

Lemme 1. *On a $[f]\in C_p(X)$ lorsque $[f]\in C_p(\mathbb{P}_N)$ et le cycle algébrique de $\mathbb{P}_N$ dont f est la forme de Chow a son support*

$$\{[x]\in\mathbb{P}_N, s\ni x \Rightarrow s\in f^{-1}(0)\} = \{[x]\in\mathbb{P}_N, \varphi^{-1}([x])\subset f^{-1}(0)\}$$

contenu dans X.

Démonstration. Voir [8]. □

Parmi les $\mathcal{R}_j$ il y a les opérateurs différentiels linéaires caractérisant les formes de Chow de cycles algébriques de $\mathbb{P}_N$ de dimension p. En particulier on obtient les relations

$$(\partial_i^k f)(\partial_{i'}^{k'} f) - (\partial_{i'}^k f)(\partial_i^{k'} f) = 0$$

sur $f^{-1}(0)\cap A_1$, pour $1\le k,k'\le N-p$ et $0\le i,i'\le N$, avec $\partial_i^k f$ la dérivée partielle f par rapport à la coordonnée z_i^k.

Avec l'identification

$$\mathbb{G}_{N-p-1,N} = G(N-p,\mathbb{C}^{N+1}) \simeq G(p+1,(\mathbb{C}^{N+1})^*),$$

le polynôme f correspond à un polynôme g et ces relations équivalent à

$$(\partial_k^i g)(\xi)(\partial_{k'}^{i'} g)(\xi) - (\partial_k^{i'} g)(\xi)(\partial_{k'}^i g)(\xi) = 0$$

pour $1\le k,k'\le p+1$ et $0\le i,i'\le N$, si $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{p+1})\in g^{-1}(0)$ et s défini par les équations linéaires $\xi_1=0,\dots,\xi_{p+1}=0$ appartient à A_1. Ici $\partial_k^i g$ représente la dérivée partielle de g par rapport à la coordonnée ξ_k^i.

Soit maintenant $[x(\xi)]$ le point de $\mathbb{P}_N$ associé au vecteur $((\partial_k^i g)(\xi))_{0\le i\le N}$. On a la relation d'homogénéité

$$\sum_{0\le i\le N} \xi_k^i(\partial_k^i g)(\xi) = d(g)g(\xi) = 0$$

pour tout k, de sorte que $[x(\xi)]\in P(s)$.

On note $\varphi = pr_{1|\Gamma}$ et on sait que lorsque f est la forme de Chow de Z, alors $Z=\{[x]\in\mathbb{P}_N, \varphi^{-1}([x])\subset f^{-1}(0)\}$. On note donc ici

$$Z = \{[x(s)], s\in A_1\cap f^{-1}(0) \text{ vérifiant } \varphi^{-1}([x(s)])\subset f^{-1}(0)\}.$$

On a aussi, en différenciant

$$Z = \{[x(s)], s\in A_1\cap f^{-1}(0) \text{ vérifiant } T_{s'}\varphi^{-1}([x(s)])\subset \operatorname{Ker} \mathrm{d}f(s') \text{ pour tout } s'\ni x(s)\}.$$

Signalons que, si $s'=s$, l'inclusion $T_{s'}\varphi^{-1}([x(s)])\subset \operatorname{Ker}\mathrm{d}f(s')$ est toujours vérifiée, puisque l'espace vectoriel $T_s\varphi^{-1}([x(s)])$ est défini par $\sum_i(\partial_k^i g)(\xi)\mathrm{d}\xi_k^i = 0$ pour tout k.

On utilisera le résultat suivant, qui est implicite dans [11], et dont on va donner une démonstration simplifiée ici.

Lemme 2. *Si dans $A_1\cap f^{-1}(0)$, on a les relations différentielles $(\partial_i^k f)(\partial_{i'}^{k'} f) - (\partial_{i'}^k f)(\partial_i^{k'} f) = 0$ et $(\partial_i^k\partial_i^k f)(\partial_{i'}^k f)^2 + (\partial_{i'}^k\partial_{i'}^k f)(\partial_i^k f)^2 = 2(\partial_i^k\partial_{i'}^k f)(\partial_i^k f)(\partial_{i'}^k f)$ pour tous k,k',i,i', et si on a toujours $[x(s)]\in X$, alors $[f]\in C_p(X)$.*

Démonstration. Soit

$$Z_0 = \{[x(s)], s \in f^{-1}(0) \text{ vérifiant } (\partial_i^k f)(\partial_{i'}^{k'} f) - (\partial_{i'}^k f)(\partial_i^{k'} f) = 0 \text{ en } s \text{ et } \varphi^{-1}([x(s)]) \subset f^{-1}(0)\}.$$

Alors $Z \subset Z_0 \cap X$. Supposons $[f] \notin C_p(\mathbb{P}_N)$, de sorte que dim $Z_0 < p$.

Si les relations différentielles de l'énoncé sont vérifiées, on verra que $\varphi^{-1}([x(s)]) \subset f^{-1}(0)$, et donc on a alors $[x(s)] \in Z \cap P(s)$ pour $s \in A_1 \cap f^{-1}(0)$ quelconque.

Alors, dans X, on a $\emptyset \neq Z \cap P(s) = Z \cap (X \cap P(s))$, tandis que dim $Z \leq p-1$ et dim $(X \cap P(s)) = d_X - p$ si $s \in A_1 \setminus A_2$ avec

$$A_2 = \{s \in \mathbb{G}_{N-p-1,N}, \dim (X \cap P(s)) \geq d_X - p + 1\}.$$

Il suffit donc de choisir $s \in (A_1 \setminus A_2) \cap f^{-1}(0)$ tel que de plus $Z \cap (X \cap P(s)) = \emptyset$ pour avoir une contradiction.

Le fait que ces relations différentielles équivalent à l'inclusion $\varphi^{-1}([x(s)]) \subset f^{-1}(0)$ peut s'obtenir comme conséquence du lemme de Chow–Van der Waerden énoncé dans [6]. On obtient ici cette équivalence directement de la façon suivante.

L'implication $s' \ni x \Rightarrow f(s') = 0$ s'écrit $f(z^1, \ldots, z^{q-1}, x) = 0$ pour tous $z^1, \ldots, z^{q-1}$. Comme $f(z^1, \ldots, z^{q-1}, x) = 0$ est un polynôme en $z^1, \ldots, z^{q-1}$ dont les coefficients dépendent de x et de f, cela équivaut à un nombre fini d'équations

$$E_f(x) = 0 \Leftrightarrow D_f(s) = 0$$

si x proportionnel à

$$x(s) = \sum_{1 \leq k \leq q} z^k (\partial_i^k f)(z)$$

avec $s = \mathrm{Vect}(z^1, \ldots, z^q) \in f^{-1}(0)$.

Précisément, $\varphi^{-1}([x]) \subset f^{-1}(0)$ revient à pouvoir écrire

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) = \sum_{1 \leq k \leq p+1} u_k < \xi_k, x >$$

pour certaines fonctions $u_k = u_k(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1})$ de $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1})$. Donc, si $s \in \varphi^{-1}([x])$, alors $< \xi_k, x >= 0$ et on a $(\partial_k^i g)(\xi) = x_i u_k$ puis $(\partial_k^i \partial_k^i g)(\xi) = 2 x_i \partial_k^i u_k$ et $(\partial_k^i \partial_k^{i'} g)(\xi) = x_{i'} \partial_k^i u_k + x_i \partial_k^{i'} u_k$. On doit donc avoir

$$(\partial_k^i \partial_k^i g)(\xi)(\partial_k^{i'} g)(\xi)^2 + (\partial_k^{i'} \partial_k^{i'} g)(\xi)(\partial_k^i g)(\xi)^2 = 2 x_i x_{i'}^2 u_k^2 \partial_k^i u_k + 2 x_{i'} x_i^2 u_k^2 \partial_k^{i'} u_k = 2(\partial_k^i \partial_k^{i'} g)(\xi)(\partial_k^i g)(\xi)(\partial_k^{i'} g)(\xi)$$

qui sont les relations différentielles d'ordre 2 de l'énoncé. □

Pour conclure que $[f] \in C_p(X)$ si $\mathcal{M}_j(\log \|f\|)_{|A_1} = d(f)$ pour tout j, on utilise que

$$\mathcal{R}_j(\log |f|)_{|\tau^{-1}A_1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{l,m} B_{j,l,m}(f)_{|\tau^{-1}A_1} \frac{\partial^{l+m}\delta}{\partial t^l \partial \overline{t}^m} \circ (f_{|\tau^{-1}A_1}) = 0$$

implique une décomposition

$$\sum_{l+m<M_j} C_{j,l,m}(f) f^l \overline{f}^m = \sum_{l+m=M_j} f^l \overline{f}^m Q_{j,l,m}$$

dans $\tau^{-1}A_1$ avec les $C_{j,l,m}(f)$ dépendant des $B_{j,l,m}(f)$. Avec maintenant

$$G = \sum_{l+m<M_j} C_{j,l,m}(f) f^l \overline{f}^m$$

et en prenant $f(z)$ comme coordonnée, on a donc déjà les relations

$$0 = G = \ldots = \frac{\partial^{l+m} G}{\partial f^l \partial \overline{f}^m} = \ldots$$

où $l + m < M_j$, dans $\tau^{-1}A_1 \cap f^{-1}(0)$. Les $Q_{j,l,m}$ s'obtiennent en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à G. Mais l'ensemble de toutes les relations qu'on peut obtenir en un point $s \in f^{-1}(0)$ donne l'implication $s' \ni x(s) \Rightarrow f(s') = 0$, ce qui permet de conclure que $[f] \in C_p(X)$.

3. Continuité globale de la période pour une classe de cohomologie de Hodge

Puisque les coefficients de l'opérateur différentiel $\mathcal{P}_j$ sont divisibles par ψ_j, on peut écrire

$$\mathcal{P}_j = \psi_j \mathcal{M}_j$$

avec $\mathcal{M}_j$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, et on pose

$$h_j(s) = \lim_m \big(\psi_j(s)^{-1}\mathcal{P}_j(U_m)(s) - \deg T\big) = \int_{X\setminus(X\cap P(s))} T \wedge \big(\mathcal{M}_j(\gamma_{s|X}) - \omega^p_{|X}\big).$$

Alors $\{T\}$ est algébrique si et seulement si $h_j(s) = 0$ pour tout s et tout j. Comme $h_j(s) = 0$ pour s générique, cela revient par densité à h_j continue. L'objectif de cette partie est de redémontrer de façon directe que si $\{T\}$ est de Hodge, alors h_j est continue, sans utiliser la caractérisation de $C_p(X)$ de la partie 2.

On montre dans [10] que

$$h_j(s) = \int_X T \wedge \Delta_{j,s}$$

avec $\Delta_{j,s}$ un (p, p)-courant dd^c-fermé dans X à support dans $X \cap P(s)$. On définit les sous-ensembles algébriques

$$A_l = \{s \in \mathbb{G}_{N-p-1,N}, \dim\,(X \cap P(s)) \geq d_X - p - 1 + l\},$$

en particulier $A_0 = \mathbb{G}_{N-p-1,N}$. Les A_l forment une stratification de $\mathbb{G}_{N-p-1,N}$ et h_j est continue sur $A_0 \smallsetminus A_1, A_1 \smallsetminus A_2, \ldots$. Pour $s \in A_0 \smallsetminus A_1$ donc pour s générique, $h_j(s) = 0$.

On écrit

$$\Delta_{j,s} = \Phi_{j,s} + \partial u_{j,s} + \overline{\partial} v_{j,s}$$

avec $\Phi_{j,s}$ une (p, p)-forme harmonique dans X et

$$h_j(s) = \int_X T \wedge \Phi_{j,s}$$

apparaît comme une période de T.

On note $q_0 = d_X - p$ et on suppose d'abord que

$$\{T\} = ch_{q_0}(E)$$

avec E un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de X et avec ch le caractère de Chern, dont la composante de bidegré (q_0, q_0) est notée ch_{q_0}.

On munit E d'une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$, dont on note

$$\Theta_E \in \mathcal{C}^\infty_{1,1}(X, End\ E)$$

la $(1, 1)$-forme de courbure. Alors $ch_{q_0}(\Theta_E)$ est de bidegré (q_0, q_0) et donc $T - ch_{q_0}(\Theta_E)$, qui est d-exact, est dd^c-exact dans X. Comme $\Delta_{j,s}$ est dd^c-fermé dans X, on a

$$\int_X T \wedge \Delta_{j,s} = \int_X ch_{q_0}(\Theta_E) \wedge \Delta_{j,s}.$$

Soit Y une variété projective complexe lisse de même dimension que X et $\pi : X \to Y$ une application méromorphe vérifiant : il existe $A \subset X$ un sous-ensemble analytique propre et $B \subset Y$ un sous-ensemble analytique propre, tels que $\pi : X \setminus A \to Y \setminus B$ est un biholomorphisme. Alors

$$h_j(s) = \int_Y \pi_* ch_{q_0}(\Theta_E) \wedge \pi_*\Delta_{j,s} = \int_Y ch_{q_0}(\Theta_{\mathcal{F}}) \wedge \pi_*\Delta_{j,s}$$

avec $\mathcal{F} = \pi_* E$. En éliminant les singularités de π, on voit que $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Y. On a

$$\mathcal{F}_{|Y\setminus B} = (\pi_{|X\setminus A})_*(E_{|X\setminus A})$$

qui est un fibré vectoriel holomorphe, défini seulement au-dessus de $Y \setminus B$. Ici, le produit de courants $ch_{q_0}(\Theta_{\mathcal{F}}) \wedge \pi_*\Delta_{j,s}$ se définit dans Y, en appliquant le théorème de division d'une distribution par une fonction analytique réelle.

Pour s fixé vérifiant $X \not\subset P(s)$, on peut choisir π telle que

$$\pi_* \Delta_{j,s} = \lim_{s' \to s} \pi_* \Delta_{j,s'}$$

en se restreignant à $s' \notin A_1$ dans cette limite. Conclusion : pour E holomorphe, on sait a priori que $h_j(s)$ est continue par rapport à s vérifiant $X \not\subset P(s)$. De la même façon, on a le résultat suivant.

Théorème B. *Si $\{T\} = ch_{q_0}(E)$ avec E un fibré $\mathbb{C}$-vectoriel analytique réel au-dessus de X, alors la période $h_j(s)$ est continue dans $\{s \in G(q, V), X \not\subset P(s)\}$.*

Démonstration. E possède une connexion D avec $ch_{q_0}(\Theta_{E,D})$ de bidegré (q_0, q_0). Le raisonnement précédent fait pour E holomorphe s'applique encore et donne que $h_j(s)$ est encore continue dans $\{s \in G(q, V), X \not\subset P(s)\}$. □

D'après [5] et [7], l'hypothèse du Théorème précédent n'est pas restrictive. On redémontre ainsi de façon géométrique la conjecture faite dans [10], sans utiliser la régularisation U_m de (1.3) qui est construite à partir d'un noyau-distribution sur $\mathrm{Div}(\mathbb{G}_{N-p-1,N}) \times \mathbb{G}_{N-p-1,N}$.

Corollaire. *Si $\{T\}$ est rationnelle, alors la période $h_j(s)$ est continue dans $\{s \in G(q, V), X \not\subset P(s)\}$ et donc $\{T\}$ contient un cycle algébrique de X.*

Références

[1] D. Barlet, H.-M. Maire, Développements asymptotiques, transformation de Mellin complexe et intégration sur les fibres, in : P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Eds.), Séminaire d'analyse, années 1985–1986, in : Lect. Notes in Mathematics, vol. 1295, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987, pp. 11–23.
[2] J.-P. Demailly, Regularization of closed positive currents and intersection theory, J. Algebraic Geom. 1 (1992) 361–409.
[3] J.-P. Demailly, Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, in : V. Ancona, A. Silva (Eds.), Complex Analysis and Geometry, in : The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York, 1993, pp. 115–193.
[4] J.-P. Demailly, Analytic Methods in Algebraic Geometry, Surv. Mod. Math. Ser., vol. 1, International Press, 2011.
[5] A. Douady, Cycles analytiques d'après M.F. Atiyah et F. Hirzebruch, Séminaire Bourbaki, Exp. 223, vol. 7, 1961–1962, pp. 5–26.
[6] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants, Mathematics : Theory and Applications, Birkhäuser, 1994.
[7] S. Lojasiewicz, Triangulation of semi-analytic sets, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (3) 18 (1964) 449–474.
[8] M. Méo, Transformations intégrales pour les courants positifs fermés et théorie de l'intersection, thèse, université Grenoble-1, Institut Fourier, 17 janvier 1996, 58 p.
[9] M. Méo, Caractérisation fonctionnelle de la cohomologie algébrique d'une variété projective, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1159–1162.
[10] M. Méo, Réduction de la conjecture de Hodge à une continuité, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 625–628.
[11] M. Méo, Chow forms and Hodge cohomology classes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 339–343.