C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 717–719

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des groupes/Géométrie algébrique

Extension des scalaires par le morphisme de Frobenius, pour les groupes réductifs

Frobenius base change for reductive groups

Pierre Deligne

Institute for Advanced Study, School of Mathematics, 1 Einstein Drive, Princeton, NJ 08540, United States

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 10 mai 2018
Accepté le 16 mai 2018
Disponible sur Internet le 24 mai 2018

Présenté par Pierre Deligne

RÉSUMÉ

Soit G un groupe réductif sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Pour n un entier $\geqslant 0$ et $q := p^n$, notons $G^{\{n\}}$ le groupe réductif sur k déduit de G par l'extension des scalaires $x \longmapsto x^q : k \longrightarrow k$. Si k est parfait, cette définition garde un sens pour tout entier n. Nous montrons que, si k est parfait, il existe $m > 0$ tel que les groupes algébriques G et $G^{\{m\}}$ soient isomorphes. La classe d'isomorphie de $G^{\{n\}}$, comme groupe réductif sur k, ne dépend alors que de n modulo m. Dans le cas général, nous montrons qu'une telle périodicité reste vraie pour n assez grand.

ABSTRACT

Let G be a reductive group over a field k of characteristic $p > 0$. For $n \geqslant 0$ and $q := p^n$, let $G^{\{n\}}$ be deduced from G by the extension of scalars $x \longmapsto x^q : k \longrightarrow k$. If k is perfect, this keeps making sense for $n \in \mathbb{Z}$. We show that, if k is perfect, there exists $m > 0$ such that the algebraic groups G and $G^{\{m\}}$ over k are isomorphic. The isomorphism class of $G^{\{n\}}$, as a reductive group over k, then depends only on n modulo m. For k not necessarily perfect, we show that such a periodicity remains true for n large enough.

1. Introduction

Soient D une algèbre centrale simple sur un corps k de caractéristique $p > 0$, et d sa classe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$. Pour n un entier $\geqslant 0$ et $q := p^n$, notons $D^{\{n\}}$ l'algèbre centrale simple sur k déduite de D par l'extension des scalaires $x \longmapsto x^q : k \longrightarrow k$. La classe de $D^{\{n\}}$ dans $\mathrm{Br}(k)$ est $p^n \cdot d$. Si k est parfait, $\mathrm{Br}(k)$ est un groupe de torsion dont les éléments sont d'ordre premier à p. Il existe donc $m > 0$ tel que $d = p^m d$. Pour un tel m, les k-algèbres D et $D^{\{m\}}$ et donc aussi les k-groupes algébriques D^* et $(D^{\{m\}})^* = (D^*)^{\{m\}}$ sont isomorphes. L'isomorphie de $D^{*\{n\}}$ et $D^{*\{n+m\}}$ s'en déduit par le changement de base $x \longmapsto x^{p^n} : k \longrightarrow k$.

Adresse e-mail : deligne@math.ias.edu.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.05.005
1631-073X/

Après nous avoir donné cet argument, ainsi que des arguments analogues pour d'autres groupes classiques, S. Srinivasan nous a demandé si une telle périodicité était vraie pour un groupe réductif quelconque. Nous montrons que oui. Le résultat est utilisé dans [1].

2. Notations

Soit p un nombre premier. Si S est un schéma de caractéristique p, i.e. si $p = 0$ sur S, nous noterons F_S l'endomorphisme de Frobenius de S. Rappelons qu'il est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à S et que, pour f une section locale du faisceau structural $\mathcal{O}_S$, on a $\mathrm{F}_S^*(f) = f^p$.

Si X est un schéma sur S, on note $X^{(p)}$ le schéma sur S déduit de X par le changement de base $\mathrm{F}_S : S \longrightarrow S$. Du diagramme commutatif ci-dessous à gauche (fonctorialité de Frobenius), on déduit une factorisation de F_X par un S-morphisme $\mathrm{F}_{X/S} : X \longrightarrow X^{(p)}$, le *Frobenius relatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{F}_X"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S \arrow[r, "\mathrm{F}_S"] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{F}_{X/S}"] \arrow[dr] & X^{(p)} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & S \arrow[r] & S \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Procédant de même avec Frobenius remplacé par sa puissance n-ième, on définit $X^{(p^n)}$, que nous noterons $X^{\{n\}}$, et $\mathrm{F}^n_{X/S} : X \longrightarrow X^{\{n\}}$. On a un isomorphisme canonique $(X^{\{n\}})^{\{m\}} = X^{\{n+m\}}$ et, pour cette identification, $\mathrm{F}^{m+n}_{X/S} = \mathrm{F}^m_{X^{\{n\}}/S}\ \mathrm{F}^n_{X/S}$.

La formation de $\mathrm{F}^n_{X/S} : X \longrightarrow X^{\{n\}}$ est fonctorielle en X sur S, et compatible avec tout changement de base $S' \longrightarrow S$.

Exemples. (i) Si $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p), \mathrm{F}_S$ est l'identité, $X^{\{n\}}$ est canoniquement isomorphe à X, et $\mathrm{F}^n_{X/S} = \mathrm{F}^n_X$.

(ii) Si $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et que $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[u, u^{-1}])$ est le schéma en groupe $\mathbb{G}_m$ sur S, le morphisme $\mathrm{F}^n_{\mathbb{G}m/S} : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$ est donné par $\mathrm{F}^{n*}_{\mathbb{G}m/S}(u) = u^{p^n}$: c'est $x \longmapsto x^{p^n}$ au sens de la loi de groupe. On en déduit que, pour $X = \mathbb{G}^N_m$, i.e. pour X un tore déployé sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p), \mathrm{F}^n_{X/S} : X \longrightarrow X$ est encore $x \longmapsto x^{p^n}$.

(iii) Si X/S est lisse, $\mathrm{F}^n_{X/S}$ est fini et fidèlement plat, ainsi qu'on le vérifie par réduction au cas des espaces affines $\mathbb{A}^N_S$. Si X est un schéma en groupe lisse, le morphisme de schémas en groupe $\mathrm{F}^n_{X/S}$ fait donc de $X^{\{n\}}$ le quotient de X par le noyau de $\mathrm{F}^n_{X/S}$.

3. Construction *pour T/S, un tore, d'un isomorphisme*

$$can_n : T \longrightarrow T^{\{n\}}. \tag{3.1}$$

Soit $q = p^n$. Montrons que si T/S est un tore, l'endomorphisme $x \longmapsto x^q$ (au sens de la loi de groupe) est fini et fidèlement plat, de noyau celui de $\mathrm{F}^n_{T/S}$. Il suffit de le vérifier localement pour la topologie étale sur S. On peut donc supposer le tore T déployé, isomorphe à $\mathbb{G}^N_m$ pour N convenable. La formation de $\mathrm{F}^n_{T/S} : T \longrightarrow T^{\{n\}}$ étant compatible aux changements de base, on se ramène au cas où $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et on applique les exemples (i) et (ii) ci-dessus.

On définit l'isomorphisme can_n comme l'unique isomorphisme de T avec T^n tel que $can_n^{-1} \circ \mathrm{F}^n_{T/S}$ soit $x \longmapsto x^q$, au sens de la loi de groupe :

$$T \xrightarrow{\mathrm{F}^n_{X/S}} T^{\{n\}} \xrightarrow{can_n^{-1}} T \text{ est } x \longmapsto x^q.$$

Nous n'utiliserons pas le fait que la dualité de Cartier, qui est compatible avec les changements de base et donc avec $X \longmapsto X^{\{n\}}$, fournit une autre construction de (3.1) : T est dual de X étale sur S, et pour X étale sur $S, \mathrm{F}_{X/S} : X \longmapsto X^{\{n\}}$ est un isomorphisme, dont can_n^{-1} est le transposé.

4. Torseurs

Supposons S connexe et soit G un schéma en groupe réductif sur S. Il existe un groupe réductif déployé G_0 sur $\mathbb{F}_p$ tel que, localement, pour la topologie étale de S, G soit isomorphe à l'image inverse de G_0. Un *tore maximal* de G est un sous-schéma en groupe fermé de G qui est un tore sur S et qui, en chaque point géométrique de S, est un tore maximal. Supposons que G admette un tore maximal T (c'est toujours le cas si S est le spectre d'un corps) et soit T_0 un tore maximal déployé de G_0. Localement, pour la topologie étale de S, (G, T) est isomorphe à l'image inverse de (G_0, T_0).

Soit T^{ad} le tore maximal du groupe adjoint G^{ad} image de T. L'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs se factorise par une action de G^{ad}. L'action de T^{ad} sur G fixe T, et on sait que le lemme ci-après est vérifié.

Lemme 4.1. *Cette action de T^{ad} sur G identifie T^{ad} au schéma en groupe des automorphismes de G induisant l'identité sur T.*

Lemme 4.2. *Localement, pour la topologie étale de S, il existe des isomorphismes de (G, T) avec $(G^{\{n\}}, T^{\{n\}})$ induisant l'isomorphisme* (3.1) *de T avec $T^{\{n\}}$.*

Preuve. Puisque (G, T) est localement sur S isomorphe à l'image inverse de (G_0, T_0) sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. L'isomorphisme de l'exemple (i) fait l'affaire. En effet, d'après l'exemple (ii), pour le tore déployé T_0, cet isomorphisme identique coïncide avec (3.1).

Ces lemmes impliquent que le schéma des isomorphismes de (G, T) avec $(G^{\{n\}}, T^{\{n\}})$ induisant (3.1) sur T est un T^{ad}-torseur sur S. Nous le noterons $P_n(G, T)$. Pour tout schéma S'/S, $P_n(\mathrm{G}, \mathrm{T})(S')$ s'identifie avec l'ensemble des isomorphismes de $(\mathrm{G}, \mathrm{T})_{S'}$ avec $(G^{\{n\}}, T^{\{n\}})_{S'}$ induisant (3.1) sur $T_{S'}$.

Nous noterons additivement l'addition des T^{ad}-torseurs. Par passage aux classes d'isomorphie, cette addition donne la loi de groupe de $\mathrm{H}^1(S_{\mathrm{et}}, T^{\mathrm{ad}})$.

Construction 4.3. *Un isomorphisme de $P_n(G, T)$ avec le multiple N-ième de $P_1(G, T)$, pour $N = 1 + p + \cdots + p^{n-1} = (p^n - 1)/(p - 1)$.*

L'isomorphisme $can_n : T \longrightarrow T^{\{n\}}$ est le composé des isomorphismes $can_1 : T^{\{i\}} \longrightarrow T^{\{i\}\{1\}} = T^{\{i+1\}}$ pour $0 \le i < n$.

Si on utilise l'isomorphisme can_i de T^{ad} avec $T^{\mathrm{ad}\{i\}}$ pour identifier T^{ad}-torseurs et $T^{\mathrm{ad}\{i\}}$ torseurs, on en déduit que la composition des isomorphismes identifie $P_n(G, T)$ à la somme des torseurs $P_1(G^{\{i\}}, T^{\{i\}})$ pour $0 \le i < n$. Le $T^{\mathrm{ad}\{i\}}$-torseur $P_1(G^{\{i\}}, T^{\{i\}})$ est déduit par le changement de base $F_S^i : S \longrightarrow S$ du T^{ad}-torseur $P_1(G, T)$. Il reste à appliquer le lemme suivant.

Lemme 4.4. *Soient T un tore sur S et P un T-torseur. Le $T^{\{i\}}$-torseur $P^{\{i\}}$, identifié à un T-torseur par $can_i : T \xrightarrow{\sim} T^{\{i\}}$, est canoniquement isomorphe au multiple p^i-ième de P.*

Preuve. Les Frobenius relatifs sont fonctoriels. Ils donnent donc lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P \times T & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{\{i\}} \times T^{\{i\}} & \longrightarrow & P^{\{i\}}, \end{array}$$

les flèches horizontales étant les actions à droite de T sur P et de $T^{\{i\}}$ sur $P^{\{i\}}$. Le $T^{\{i\}}$-torseur $P^{\{i\}}$ est donc déduit du T-torseur P en poussant par $F^i_{T/S} : T \longrightarrow T^{\{i\}}$. Vu comme T-torseur, $P^{\{i\}}$ s'obtient en poussant ensuite par can^{-1}. Par définition, $can^{-1} \circ F_{T/S}$ est $x \longmapsto x^{p^i}$. On conclut en observant que pousser un T-torseur par $x \longmapsto x^a$ revient à en prendre la somme de a copies.

Corollaire 4.5. *Dans $H^1(S_{\mathrm{et}}, T^{\mathrm{ad}})$, on a classe de $P_n(G, T) = (p^n - 1)/(p - 1)$. classe de $P_1(G, T)$.*

5. Preuve des théorèmes annoncés dans le résumé

Soit k un corps de caractéristique p, et prenons $S = \mathrm{Spec}(k)$. Soient G un groupe réductif sur k, T un tore maximal de G et T^{ad} son image dans le groupe adjoint G^{ad}. Soit k' une extension galoisienne de k sur laquelle T^{ad} se déploie. Il résulte du théorème 90 de Hilbert que

$$H^1(S, T^{\mathrm{ad}}) = H^1(Gal(k'/k), T^{\mathrm{ad}}(k')).$$

Si le corps k est parfait, son extension galoisienne k' l'est aussi, et le groupe $T^{\mathrm{ad}}(k')$, isomorphe à $(k'^*)^N$, pour N convenable, est uniquement p-divisible. Le groupe de torsion $H^1(Gal(k'/k), T^{\mathrm{ad}}(k'))$ l'est donc aussi, et ses éléments sont d'ordre premier à p. Si la classe c de $P_1(G, T)$ est d'ordre a et si $p^b \equiv 1 \ (a)$, avec $b > 0$, on a

$$\sum_{0 \le i < ab} p^i \equiv a \sum_{0 \le i < b} p^i \equiv 0 \ (a).$$

Posons $m = ab$. D'après 4.5, il existe un isomorphisme de (G, T) avec $(G^{\{m\}}, T^{\{m\}})$ induisant (3.1) sur T. A fortiori, G est isomorphe à $G^{\{m\}}$.

Sans hypothèse sur k, il reste vrai que la classe c de $P_1(G, T)$ est de torsion. Si N est un entier tel que $p^N c$ soit d'ordre a premier à p, que $p^b \equiv 1 \ (a)$ avec $b > 0$ et que $m := ab$, un calcul similaire montre que, pour tout $n \ge N$, i, les T^{ad}-torseur $P_n(G, T)$ et $P_{m+m}(G, T)$ sont isomorphes. Le groupe T^{ad} agit sur G et, pour tout i, $G^{\{i\}}$ se déduit de G par torsion par le T^{ad}-torseur $P_i(G, T)$. Pour $n \ge N$, $G^{\{n\}}$ et $G^{\{n+m\}}$ sont donc isomorphes.

Références

[1] S. Srinivasan, Motivic decomposition of projective pseudo-homogeneous varieties, Transform. Groups 22 (4) (2017) 1125–1142.