C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 225–229

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Logique

Ensembles reconnaissables de séries formelles sur un corps fini

Recognizable sets of power series over finite fields

Luc Bélair [a], Maxime Gélinas [a], Françoise Point [b]

[a] *Département de mathématiques, Université du Québec, C.P. 8888, succ. Centre-ville, Montréal, Québec, H3C 3P8, Canada*
[b] *Département de mathématique (Le Pentagone), Université de Mons, 20, place du Parc, B-7000 Mons, Belgium*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 21 juillet 2015
Accepté après révision le 16 décembre 2015
Disponible sur Internet le 3 février 2016

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Soit l'alphabet donné par un corps fini $\mathbb{F}$, nous montrons que les langages ω-reconnaissables de mots infinis correspondent exactement aux ensembles définissables dans le groupe additif des séries formelles sur $\mathbb{F}$ muni de prédicats naturels. En particulier, on obtient la décidabilité par automate.

ABSTRACT

Given the alphabet yielded by a finite field $\mathbb{F}$, we show that infinite words languages that are ω-recognizable correspond exactly to sets definable in the additive group of power series over $\mathbb{F}$ together with some natural predicates. In particular, we obtain decidability by automata.

1. Introduction

Depuis les travaux de Richard Büchi dans les années soixante, la théorie des automates finis a joué un grand rôle dans l'étude des expansions de l'arithmétique de Presburger. Elle permet notamment d'obtenir des expansions décidables où les ensembles définissables sont (a priori) d'une complexité $\exists\forall\exists$.

Dans cette Note, nous considérons des expansions du groupe additif de l'anneau $\mathbb{F}_p[[X]]$ des séries formelles sur $\mathbb{F}_p$ (ou un corps fini), en utilisant la théorie des automates finis sur des mots infinis (voir [8]). Une motivation de ce travail est l'article [9] sur les polynômes. Notre résultat principal (théorème 3.1), dont on trouve tous les détails dans [5], établit l'équivalence entre les langages ω-reconnaissables sur l'alphabet fourni par $\mathbb{F}_p$ et les ensembles définissables dans une expansion naturelle du groupe additif $(\mathbb{F}_p[[X]], +)$. On obtient la décidabilité de cette expansion et de variantes. Rappelons que, contrairement à l'anneau des polynômes sur $\mathbb{F}_p$, qui est indécidable, le problème de la décidabilité est toujours ouvert pour les séries formelles $\mathbb{F}_p[[X]]$, ou pour les séries de Laurent $\mathbb{F}_p((X))$ (voir [3]). Malheureusement, l'endomorphisme de

Adresses e-mail : belair.luc@uqam.ca (L. Bélair), gelinas.maxime.2@gmail.com (M. Gélinas), point@math.univ-paris-diderot.fr (F. Point).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.12.015
1631-073X/

Frobenius $y \mapsto y^p$ échappe à ces méthodes, le graphe de celui-ci n'étant pas reconnaissable par automate fini (voir §.4). Finalement, en appliquant des résultats de [2], nous pouvons établir certaines frontières entre décidabilité et indécidabilité lorsqu'on ajoute l'action multiplicative des puissances de X.

Soit A un alphabet fini, on note A^ω l'ensemble des mots infinis sur A et A^* l'ensemble des mots finis sur A. Un sous-ensemble D de A^ω est dit reconnaissable s'il existe un automate fini $\mathcal{A}$ de Büchi tel que cet ensemble soit l'ensemble des mots acceptés par cet automate, ce que l'on notera par $D = L(\mathcal{A})$. L'ensemble de tous les ensembles reconnaissables est noté $Rec(A^\omega)$. La notion « être reconnaissable » coïncide avec la notion « être ω-rationnel » [8, théorème 5.4]. On note $Rat(A^\omega)$ l'ensemble des ensembles ω-rationnels. On a que $Rat(A^\omega)$ est clos par complément. Une preuve de ce résultat consiste à introduire d'autres types d'automates finis qui reconnaissent les mêmes langages, comme ceux de Rabin ou ceux de Muller (avec une autre notion d'acceptation [8, théorème 9.1]). Dans la suite, nous utiliserons les automates de Muller. On pose $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; on utilise le caractère gras $\mathbf{x}$ pour désigner un uplet.

2. Séries formelles et ω-automates

Soit p un nombre premier, $A_1 = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ et pour tout entier $n \geq 2$, soit le produit cartésien $A_n := A_1^n$. Nous allons identifier les séries formelles sur $\mathbb{F}_p$ avec les éléments de A_1^ω, et les polynômes avec les éléments de A_1^ω ayant une queue de 0, en identifiant 0 avec la suite infinie de 0.

On considère la structure du premier ordre

$$\mathcal{F} := (\mathbb{F}_p[[X]], +, 0, V_X, \preceq, \{\cdot u;\ u \in \mathbb{F}_p[X] - \{0\}\})$$

et $\mathcal{L}$ le langage du premier ordre associé, où $V_X(u)$ est la plus petite puissance de X qui apparaît non trivialement dans u, si $u \neq 0$, ce qui coïncide ici avec la plus grande puissance de X divisant u et $V_X(0) = 0$, $\cdot u$ est la multiplication scalaire par u, et $\preceq$ est la relation de préordre partiel définie par $u_1 \preceq u_2$ si et seulement si $u_1,\ u_2 \in \mathbb{F}_p[X]$ et le degré de u_1 est plus petit ou égal à celui de u_2 (avec la convention que le degré de 0 est $-\infty$). On définit $u_1 \prec u_2$ par $u_1 \preceq u_2 \wedge \neg(u_2 \preceq u_1)$. On notera l'ensemble des sous-ensembles définissables de $\mathcal{F}$ par $Def(\mathcal{F})$ (ce sont des sous-ensembles des produits cartésiens de $\mathbb{F}_p[[X]]$). L'ensemble P_X des puissances de X est définissable par la formule $u \in P_X \leftrightarrow u \neq 0 \wedge V_X(u) = u$. On notera $\lambda_X(u)$ la fonction donnant la plus grande puissance de X apparaissant non trivialement dans u si un tel élément existe, et 0 sinon. Cette fonction est définissable par la formule :

$$\lambda_X(u) = y \leftrightarrow [\exists z\,(z \in P_X \ \wedge\ z \preceq u \prec z.X \ \wedge\ z = y) \vee \forall z\,(z \in P_X \to (\neg(u \preceq z) \ \wedge\ y = 0))].$$

On utilisera aussi les prédicats $\epsilon_{X,a}(u_1, u_2)$, $a \in A_1 \setminus \{0\}$, qui expriment que u_1 est une puissance de X qui apparaît dans u_2 avec le coefficient a. Avec la convention $u_1 \cdot a = u_1 + \cdots + u_1$, a fois, on a :

$$\epsilon_{X,a}(u_1, u_2) \leftrightarrow [P_X(u_1) \ \wedge\ \exists v_1 \exists v\,(u_2 = v_1 + u_1 \cdot a + v \ \wedge\ \lambda_X(v_1) \prec u_1 \ \wedge\ u_1 \prec V_X(v))].$$

Notons que $\mathbb{F}_p[X]$ est un sous-ensemble définissable de $\mathbb{F}_p[[X]]$, par la formule $\lambda_X(u) \neq 0 \vee u = 0$.

En identifiant $\mathbb{F}_p[X]$ avec une partie de A_1^*, Rigo et Waxweiler [9] ont montré que les ensembles définissables dans la structure $(\mathbb{F}_p[X], +, 0, V_X, \prec, \cdot u;\ u \in \mathbb{F}_p[X])$ coïncident avec les ensembles reconnaissables sur un des alphabet A_n, $n \in \mathbb{N}^*$, où les fonctions et prédicats restreints à $\mathbb{F}_p[X]$ ont la même signification que ci-dessus. La preuve de ce résultat suit celle de Villemaire sur la structure $(\mathbb{N}, +, 0, V_2)$, où $V_2(n)$ est la plus grande puissance de 2 qui divise n [10, théorème 2.2]. De façon similaire [9, théorème 14], ils montrent que l'on peut décrire dans cette structure le comportement d'un automate de Büchi déterministe $\mathcal{A}$. Soit q un état de cet automate, on notera $\mathcal{A}_q$ l'automate qui a les mêmes états, les mêmes transitions et le même état initial que $\mathcal{A}$, mais dont l'état final est q. On notera $\phi_{\mathcal{A}_q}$ la formule de [9] correspondant à l'automate $\mathcal{A}_q$. Dans [9] on a du même coup que $(\mathbb{F}_p[X], +, 0, V_X, \prec, \cdot u;\ u \in \mathbb{F}_p[X])$ est décidable par automate. On procède de même pour $\mathcal{F}$, à l'aide du travail de Hodgson [6] sur la décidabilité par automate.

Proposition 2.1. *Dans $\mathcal{F}$, le graphe de l'addition, le graphe de V_X et le graphe de la multiplication par un polynôme appartenant à $\mathbb{F}_p[X]$ sont reconnaissables, et la relation binaire $\preceq$ est aussi reconnaissable. Il s'ensuit que la structure $\mathcal{F}$ est ω-automatique, et donc décidable par automate.*

On peut remarquer que la structure $(\mathbb{F}_p((X)), +, 0, V_X, \cdot X, \preceq)$ est interprétable dans $\mathcal{F}$, et donc aussi décidable par automate. En effet, on interprète les séries de Laurent par les couples de $X.\mathbb{F}_p[X] \times \mathbb{F}_p[[X]]$ en séparant une série de Laurent en la somme de sa partie à exposants négatifs, qui est un polynôme en X^{-1} de terme constant nul, et de sa partie à exposants positifs ou nul, qui est un élément de $\mathbb{F}_p[[X]]$. Notons aussi que $\mathbb{F}_p[[X]]$ est définissable dans $\mathbb{F}_p((X))$ par la formule $u = 0\ \vee 1 \preceq V_X(u)$.

3. Équivalence entre ω-reconnaissables et définissables

Par [6], il découle de la proposition 2.1 que tout ensemble définissable dans la structure $\mathcal{F}$ est reconnaissable sur un des alphabets A_n. Nous allons montrer la réciproque, et ainsi, l'équivalence entre la ω-reconnaissabilité sur un des alphabets A_n et la définissabilité dans notre structure $\mathcal{F}$. Nous donnons deux preuves de ce résultat. La première est analogue à [7], et utilise les formules de [9] et la description des ensembles ω-rationnels et le fait qu'ils coïncident avec les langages reconnaissables. La deuxième est l'analogue dans notre contexte de l'argument de Villemaire rappelé ci-dessus, et nous utiliserons la formule $\phi_{\mathcal{A}_q}$.

Théorème 3.1. *Les sous-ensembles définissables de $\mathcal{F}$ coïncident avec les sous-ensembles reconnaissables sur un des alphabets A_n, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve : il reste à prouver l'inclusion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Rec(A_n^\omega) \subseteq Def(\mathcal{F})$.
Première approche : par la description des langages ω-rationnels.

Nous allons plutôt montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Rat(A_n^\omega) \subseteq Def(\mathcal{F})$. Nous allons donner une idée de la preuve pour le cas $n = 1$, ce qui correspond aux sous-ensembles définissables de $\mathbb{F}_p[\![X]\!]$. La preuve est similaire pour les alphabets A_n et les sous-ensembles des produits cartésiens $\mathbb{F}_p[\![X]\!]^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On a qu'un langage est ω-rationnel si et seulement si c'est une union finie de langages de la forme $X_i^\frown Y_i^\omega$, où X_i, Y_i sont des langages rationnels et $^\frown$ désigne la concaténation [8, chapitre 1, théorème 3.2]. Par [9, théorème 14], en tenant compte de notre représentation des polynômes, il existe des formules ϕ_i, ψ_i telles que $u \in X_i$ si et seulement si $\phi_i(u)$ est satisfaite, et $u \in 0^{*\frown} Y_i$ si et seulement si $\psi_i(u)$ est satisfaite.

Nous allons d'abord construire une formule $\psi(u,r)$ telle que $u \in 0^{*\frown} Y_i^\omega$ si et seulement si $\exists r\, \psi(u,r)$.

L' élément r est une suite infinie de 0 et de 1 avec un nombre infini de 1 ; on utilise deux 1 consécutifs comme marqueurs et, entre deux marqueurs, on exprime qu'on a un élément qui appartient à Y_i.

On exprime tout d'abord que r est une telle suite par la formule suivante $\chi(r)$:

$$r \neq 0 \;\wedge\; \forall u_0 \bigwedge_{k\neq 1} \neg\epsilon_{X,k}(u_0,r) \;\wedge\; \forall u_0\, (\epsilon_{X,1}(u_0,r) \to \exists u_1\, (u_0 \prec u_1 \;\wedge\; \epsilon_{X,1}(u_1,r))).$$

Ensuite, nous introduisons deux formules auxiliaires. La première formule $\xi_{sb}(u_0,u)$ exprime que u_0 apparaît comme sous-mot fini dans la représentation de u, ce qui signifie qu'il existe un mot fini u_1 et un autre mot (éventuellement) infini u_2 tel que u est représenté par la concaténation $u_1^\frown u_0^\frown u_2$. Posons $\xi_{sb}(u_0,u)$:

$$\exists u_1 \exists u_2\, (u = u_1 + u_0 + u_2 \;\wedge\; \lambda_X(u_1) \prec V_X(u_0) \;\wedge\; \lambda_X(u_0) \prec V_X(u_2)).$$

La seconde formule $S(u_1,u_2,r)$ exprime que u_1 est une puissance de X qui apparaît dans r et que u_2 est la puissance suivante de X qui apparaît dans r. Posons $S(u_1,u_2,r)$:

$$\epsilon_{X,1}(u_1,r) \;\wedge\; \epsilon_{X,1}(u_2,r) \;\wedge\; (\forall u_3 \in P_X\, (u_1 \prec u_3 \prec u_2 \to \neg\xi_{sb}(u_3,r))).$$

On obtient alors la formule voulue $\psi(u,r)$:

$$\begin{aligned}\chi(r) \;\wedge\; \forall u_0\, ((\xi_{sb}(u_0,u) \;\wedge\; \exists u_1 \in P_X\, \exists u_2 \in P_X\, \xi_{sb}(u_1,r) \;\wedge\; \xi_{sb}(u_2,r) \;\wedge\; S(u_1,u_2,r) \;\wedge\; \lambda_X(u_0) = u_2 \\ \wedge\, \forall v \in P_X\, \xi_{sb}(v,u_0) \to u_1 \prec v) \to \psi_i(u_0)) \\ \wedge\; \forall u_4 \in P_X \forall u_5 \in P_X\, (S(u_4,u_5,r) \to \exists u_0\, (\xi_{sb}(u_0,u) \;\wedge\; \psi_i(u_0) \wedge \lambda_X(u_0) = u_5 \\ \wedge\; \forall v \in P_X\, (\xi_{sb}(v,u_0) \to u_4 \prec v)))\end{aligned}$$

Finalement on obtient $u \in X_i^\frown Y_i^\omega$ si et seulement si la formule suivante est satisfaite

$$\exists u_0\, \exists r\, (\lambda_X(u_0) \prec V_X(r) \;\wedge\; \phi_i(u_0) \;\wedge\; \exists u'\, V_X(r) \preceq V_X(u') \;\wedge\; u = u_0 + u' \;\wedge\; \psi(u',r)).$$

Deuxième approche : par une formule décrivant le comportement d'un automate.

On montre que l'on peut coder dans $\mathcal{F}$ le comportement d'un automate fini de Muller. De façon plus précise, on montre que pour tout ensemble $D \in Rec(A_n^\omega)$, $n \in \mathbb{N}^*$, disons reconnnu par un automate de Muller $\mathcal{A}$, on peut écrire une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})$ telle que $\mathbf{u} \in D$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{u})$. Soit l'automate de Muller $\mathcal{A} = (Q, A_n, E, q_\delta, \mathcal{T})$, où (Q, A_n, E) est un automate fini déterministe, Q est l'ensemble des états, A_n l'alphabet, $E \subset Q \times A_n \times Q$ l'ensemble des transitions, q_δ l'état initial, et $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(Q)$ est l'ensemble des sous-ensembles acceptants. Rappelons qu'un mot infini sera accepté par $\mathcal{A}$ si et seulement si l'ensemble des états visités une infinité de fois appartient à $\mathcal{T}$.

Définissons d'abord un prédicat binaire $Pre(u,v)$ qui dit que « u est un polynôme de degré d, et les $d+1$ premiers coefficients de v sont exactement ceux de u. », ou en d'autres mots, $Pre(u,v)$ signifie que u est un préfixe de v. On a $Pre(u,v) \longleftrightarrow \exists w\, (v = u + w \;\&\; \lambda_X(u) \prec V_X(w))$. On cherche ensuite à définir l'ensemble $L(\mathcal{A}) \subseteq (\mathbb{F}_p[\![X]\!])^n$, le langage accepté par l'automate de Muller $\mathcal{A}$. Pour cela, nous allons utiliser, dans ce contexte, la formule $\phi_{\mathcal{A}_q}$ définie précédemment (dans $\mathbb{F}_p[X]$), où q est un des états de l'automate déterministe (Q, A_n, E, q_δ), que nous noterons également $\mathcal{A}$. Désignons par $\varphi_{\mathcal{A}_q}(u,v)$ la formule $\phi_{\mathcal{A}_q}(u) \wedge Pre(u,v)$, de sorte que $\varphi_{\mathcal{A}_q}(u,v)$ est vérifiée si et seulement si « u est un préfixe de v, et le chemin étiqueté par u dans l'automate $\mathcal{A}$ termine à l'état q ».

Pour w une série formelle, nous définissons « w est reconnu par $\mathcal{A}$ » par

$$\bigvee_{S\in\mathcal{T}}\bigwedge_{q\in Q,q\in S}\bigwedge_{q'\in Q,q'\notin S}[\forall y(P_X(y)\to(\exists u(\lambda_X(u)\neq 0\wedge u\succeq y\wedge\varphi_{\mathcal{A}_q}(u,w))))\wedge$$
$$\exists y'\forall v(\neg(P_X(y')\wedge(\lambda_X(v)\neq 0)\wedge(v\succeq y')\wedge\varphi_{\mathcal{A}_{q'}}(v,w)))].$$

La formule dit que, pour un $S\in\mathcal{T}$, et pour tout $(q,q')\in Q\times Q$ tel que $q\in S$ et $q'\notin S$, on a :

(1) pour toute puissance de X, il existe un préfixe de w de degré plus grand qui finit son chemin à l'état q,
(2) il existe une puissance de X telle qu'aucun préfixe de w de degré plus grand ne finit son chemin à l'état q'.

La condition (1) assure que w visite l'état q une infinité de fois, puisque nous pouvons trouver des préfixes de w arbitrairement grands qui finissent leur chemin dans l'automate $\mathcal{A}$ à l'état q. La condition (2) assure que w visite l'état q' seulement un nombre fini de fois, puisqu'il existe une puissance de X telle que tout préfixe de w de degré plus grand ne finira pas à l'état q'. Plus simplement, cela signifie que w cessera de visiter l'état q' après cette puissance de X. Comme nous vérifions la condition (1) pour tout état se trouvant dans S, et la condition (2) pour tous les autres états, et ce pour un $S\in\mathcal{T}$, nous définissons exactement l'acceptation d'un automate de Muller. □

Si on inclut les prédicats $\epsilon_{X,a}$, $a\in A_1$, dans le langage $\mathcal{L}$, on remarque que nous avons décrit le comportement d'un automate de Muller par une formule de complexité $\exists\forall\exists\forall$. Cela donne une borne sur la complexité des ensembles définissables de $\mathcal{F}$.

4. Limitations

Notons $Frob_p : x\to x^p$ l'endomorphisme de Frobenius.

Proposition 4.1.

(1) *Le graphe dans $\mathcal{F}$ de $Frob_p$ n'est pas reconnaissable.*
(2) *Le graphe de la multiplication partielle $f:\mathbb{F}_p[\![X]\!]\times P_X\to\mathbb{F}_p[\![X]\!]$ définie par $f(u,X^n)=u\cdot X^n$, n'est pas reconnaissable.*

Dans l'anneau des polynômes, la non-reconnaissabilité du graphe du Frobenius avait déjà été observée (voir [9]). Pour cette proposition, on utilise un lemme d'itération pour les langages de mots infinis donné dans [1], dont une preuve détaillée se trouve dans [5].

Lemme 4.2 *(Lemme d'itération). (Voir [1].) Soit A un alphabet fini et $L\in Rec(A^\omega)$. Alors il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $w\in L$, $w=u_1w_1u_2w_2\dots u_iw_i\dots$, avec $|w_i|\geq N$ pour tout $i\geq 1$, on peut écrire $w_i=x_iy_iz_i$ tel que : $|y_i|\geq 1$, $|x_iy_i|\leq N$ et pour tout $(j_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $u_1x_1y_1^{j_1}z_1\dots u_ix_iy_i^{j_i}z_i\dots\in L$.*

Comme l'a remarqué le rapporteur, la proposition 4.1 est également une conséquence du fait que l'expansion $(\mathcal{F},Frob_p)$ est indécidable. En effet on peut interpréter l'arithmétique dans la théorie monadique du second ordre de $(P_X,\preceq,Frob_p)$ [4, théorème 2], laquelle est interprétable dans $(\mathcal{F},Frob_p)$.

Dans l'esprit de [10], soit dans $\mathcal{F}$ la fonction V_{X+1} définie par $V_{X+1}(u)=$ la plus grande puissance de $X+1$ qui divise u dans $F_p[X]$ si $u\in\mathbb{F}_p[X]$ et $u\neq 0$, et $V_{X+1}(u)=0$, sinon. Puisque $\mathbb{F}_p[X]$ est définissable dans $\mathcal{F}$, on obtient que la structure $(\mathbb{F}_p[\![X]\!],+,0,V_X,V_{X+1},\preceq,\cdot u;\ u\in\mathbb{F}_p[X])$ est indécidable, par le résultat semblable de [9] sur les polynômes. On peut alors se poser la question s'il y a des expansions de $(\mathbb{F}_p[\![X]\!],+,0,X,V_X)$ décidables, dont la restriction à $\mathbb{F}_p[X]$ est indécidable. Par ailleurs, notons que la théorie de la structure $\mathcal{F}_0=(\mathbb{F}_p[\![X]\!],+,0,X,V_X,P_X,\preceq\restriction_{P_X},f)$ est décidable, par [2, théorème 4.3.2] appliqué à la structure $((\mathbb{F}_p((X)),+,0),V_X,(P_X,1,X,\cdot,\preceq),f)$, car $\mathbb{F}_p[\![X]\!]$ est définissable dans $\mathbb{F}_p((X))$ (ci-dessus §.2). On peut aussi montrer à l'aide de [2] que $\mathcal{F}_0$ est modèle-complète. En revanche, la structure $(\mathbb{F}_p[\![X]\!],+,0,X,\preceq,V_X,P_X,f)$ est indécidable. En effet, on peut interpréter la théorie de $(\mathbb{N},+,|)$ sur P_X, en utilisant la propriété que $X^n-1|X^m-1$ si et seulement si $n|m$. Ou encore, l'anneau des polynômes $\mathbb{F}_p[X]$ est définissable et on peut définir le graphe de la multiplication dans les polynômes comme dans [10, lemme 3.3].

Références

[1] R. Alur, A. Degorre, O. Maler, G. Weiss, On omega-languages defined by mean-payoff conditions, in: Foundations of Software Science and Computational Structures, in: Lecture Notes in Computer Science, vol. 5504, Springer, Berlin, 2009, pp. 333–347.
[2] F. Delon, P. Simonetta, Un principe d'Ax–Kochen–Ershov pour des structures intermédiaires entre groupes et corps valués, J. Symb. Log. 64 (1999) 991–1027.
[3] J. Denef, H. Schoutens, On the decidability of the existential theory of $\mathbb{F}_p[\![t]\!]$, in: Valuation Theory and Its Applications, vol. II, Saskatoon, SK, 1999, in: Fields Inst. Commun., vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, USA, 2003, pp. 43–60.
[4] C.C. Elgot, M.O. Rabin, Decidability and undecidability of extensions of second (first) order theory of (generalized) successor, J. Symb. Log. 31 (2) (1966) 169–181.

[5] M. Gélinas, Séries formelles à coefficients dans un corps fini et automates, mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, 2015.
[6] B.R. Hodgson, Décidabilité par automate fini, Ann. Sci. Math. Qué. 7 (1983) 39–57.
[7] C. Michaux, F. Point, Les ensembles k-reconnaissables sont définissables dans $\langle \mathbb{N}, +, V_k \rangle$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 303 (19) (1986) 939–942.
[8] D. Perrin, J.-E. Pin, Infinite Words, Automata, Semigroups, Logic and Games, Elsevier, Amsterdam, 2004.
[9] M. Rigo, L. Waxweiler, Logical characterization of recognizable sets of polynomials over a finite field, Int. J. Found. Comput. Sci. 22 (2011) 1549–1563.
[10] R. Villemaire, The theory of $\langle \mathbb{N}, +, V_k, V_\ell \rangle$ is undecidable, Theor. Comput. Sci. 106 (2) (1992) 337–349.