



Topologie

Une généralisation de l'homologie de Khovanov



A generalization of Khovanov's homology

Zouhaier Aouani^{a,b}, Inès Saihi^{b,c}^a Université Paris-7, France^b Université de Tunis El Manar, Faculté des sciences de Tunis, LR11ES12, Tunisie^c Université de Tunis, École nationale supérieure d'ingénieurs de Tunis, 5, avenue Taha-Hussein, 1008, Tunisie

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 17 octobre 2014

Accepté après révision le 28 septembre 2015

Disponible sur Internet le 31 octobre 2015

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Dans ce travail, on généralise l'homologie de Khovanov à tout entrelacs non orienté et à coefficients dans l'algèbre de Frobenius universelle de rang 2, puis on construit pour chaque mouvement de Reidemeister une équivalence d'homotopie graduée, en donnant les formules explicites de ces équivalences ainsi que celles de leurs inverses homotopiques. Ensuite, on montre que le complexe de Khovanov généralisé de l'image miroir d'un diagramme d'entrelacs D est isomorphe au dual du complexe de Khovanov de D . Enfin, on généralise le théorème de Rasmussen sur l'homologie de Lee–Khovanov.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

We generalize Khovanov's homology to unoriented links and with coefficients in the 2-dimensional universal Frobenius algebra. Then, we construct, for each Reidemeister move, a graduated homotopy equivalence and give the explicit formulae of these equivalences and their homotopy inverses. Further, we prove that the generalized Khovanov complex of a link diagram D mirror image is isomorphic to the dual of the Khovanov complex of D . Finally, we generalize the Rasmussen theorem on the Lee–Khovanov homology.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

On pose $K_0 = \mathbb{Z}[a, b, p, s]$ et $R_0 = K_0[\alpha]/(\alpha^2 - s\alpha + p)$. On considère l'application $\alpha \mapsto s - \alpha = \bar{\alpha}$, qui est l'unique involution de R_0 laissant fixe K_0 . On note ω l'élément $a + b\alpha$. On pose alors :

$$K = K_0[(\omega\bar{\omega})^{-1}], \quad R = K[\alpha]/(\alpha^2 - s\alpha + p) = R_0[\omega^{-1}] \simeq R_0 \otimes_{K_0} K.$$

On définit l'application $\Delta : R \rightarrow R \otimes R$ par

$$\Delta(x) = x\omega \otimes \alpha - x\omega\bar{\alpha} \otimes 1, \text{ pour tout } x \in R.$$

Adresses e-mail : zouhaier.aouani@imj-prg.fr (Z. Aouani), ines.saihi@esstt.rnu.tn (I. Saihi).

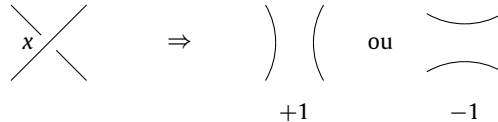
La paire (R, Δ) est une algèbre de Frobenius sur K et c'est l'algèbre de Frobenius universelle parmi celles qui sont libres sur l'anneau de base avec une base de la forme $(1, \alpha)$. De plus la co-unité ε vérifie : $\varepsilon(\omega) = 0$ et $\varepsilon(\omega\alpha) = 1$. Une autre description de cette algèbre universelle a été trouvée par Khovanov dans [2].

On munit R de l'unique graduation compatible avec l'involution et vérifiant :

$$\partial^\circ \omega = 0 \text{ et } \partial^\circ(\alpha) = -2.$$

1. Le complexe de Khovanov $CKh(D, K)$

Soient D un diagramme d'entrelacs et X l'ensemble de ses croisements. Si λ est une fonction de X dans $\{\pm 1\}$, on note D_λ la courbe obtenue en effectuant une modification positive ou négative en chaque croisement x suivant le signe de $\lambda(x)$ comme l'indique la figure suivante :



On note C_λ l'ensemble des composantes connexes de D_λ ; on notera alors $V_\lambda(D) = V(D_\lambda)$ le module $R^{\otimes C_\lambda}$ et $c_\lambda = |C_\lambda|$. Étant donné E un ensemble fini, K_E désignera la puissance extérieure maximale du module librement engendré par E ; on pose alors $W_\lambda = K_{\lambda^{-1}\{-1\}}$. Enfin, on pose $E(D) = \bigoplus_\lambda W_\lambda \otimes V_\lambda(D)$.

On va définir une différentielle sur $E(D)$.

Considérons le cas où D est un diagramme sans croisements. Considérons un chemin γ plongé dans le plan qui rencontre D en son bord. On peut modifier D par chirurgie le long de γ et obtenir un nouveau diagramme $D' = f_\gamma(D)$. Si C et C' sont les ensembles des composantes connexes de D et D' , on a une application linéaire de $R^{\otimes C}$ dans $R^{\otimes C'}$ que l'on notera aussi f_γ . Cette application est l'identité sur les composantes non modifiées par chirurgie et, suivant les cas, le produit : $R \otimes R \rightarrow R$ ou l'application $\Delta : R \rightarrow R \otimes R$ sur les composantes modifiées.

Considérons de nouveau le cas où D est un diagramme d'entrelacs. Si x est un croisement de D , on définit l'application δ_x de $E(D)$ dans lui-même de la façon suivante.

Pour toute fonction λ de X dans $\{\pm 1\}$, on pose :

- si $\lambda(x) = -1$, δ_x est nul sur $W_\lambda \otimes V_\lambda(D)$
- sinon, on peut modifier λ en x et on obtient une nouvelle fonction μ . La courbe D_μ est obtenue de D_λ par chirurgie le long d'une courbe γ située près de x . On définit alors δ_x de $W_\lambda \otimes V(D_\lambda)$ dans $W_\mu \otimes V(D_\mu)$ par :

$$\delta_x(w \otimes v) = x \wedge w \otimes f_\gamma(v).$$

On vérifie que si γ et γ' sont deux courbes planes disjointes alors f_γ et $f_{\gamma'}$ commutent, ce qui permet de déduire que l'application

$$d = \sum_{x \in X} \delta_x : E(D) \longrightarrow E(D)$$

est une différentielle.

On met sur $E(D)$ une structure de K -module différentiel bigradué en posant, pour tout $u \in R^{\otimes n}$:

$$\partial^\circ(x_1 \wedge \dots \wedge x_p \otimes u) = (-p, \partial^\circ u + n).$$

La différentielle d est alors une application de degré $(-1, -1)$; la première composante de ce bidegré est appelée le degré homologique et la seconde le q -degré. Le complexe ainsi formé est noté $CKh(D, K)$; c'est un complexe bigradué et l'homologie associée, notée $Kh(D, K)$, est appelée homologie de Khovanov de D à coefficients dans K .

Remarques.

1. Cette homologie se généralise à tout K -module M de la manière suivante :

$$CKh(D, M) = CKh(D, K) \otimes_K M \text{ et } Kh(D, M) = H(CKh(D, M)).$$

2. Si D est orienté, l'homologie de Khovanov [1] et de Lee-Khovanov [3] sont définies. On montre que l'homologie de Khovanov (resp. Lee-Khovanov) est, à une suspension près, isomorphe à $Kh(D, K/(a - 1, b, p, s))$ (resp. $Kh(D, K/(a - 1, b, p - 1, s))$). On remarque que, dans le cas de l'homologie de Lee-Khovanov, le q -degré n'est pas défini et qu'on a uniquement un module gradué.

3. Soit D un diagramme d'entrelacs et γ une courbe plongée dans le plan dont l'intersection avec D est le bord de γ . On suppose que les points de $\partial\gamma$ ne sont pas des croisements. On peut chirurgiser D le long de γ et on obtient un diagramme $D' = f_\gamma(D)$. L'application f_γ envoie chaque D_λ en D'_λ et donc chaque $V(D_\lambda)$ en $V(D'_\lambda)$. On en déduit une application toujours notée f_γ de $CKh(D)$ dans $CKh(D')$ et on vérifie que c'est un morphisme.

2. Mouvements de Reidemeister

Pour chaque mouvement de Reidemeister entre deux diagrammes d'entrelacs non orientés, on donne une équivalence d'homotopie graduée ainsi que son inverse homotopique. Dans toute la suite, pour simplifier, $CKh(D, K)$ sera noté $CKh(D)$.

2.1. Mouvement de type I

On considère un diagramme D et un point A de D qui n'est pas un croisement. On peut modifier D par un mouvement de Reidemeister de type I en rajoutant près de A un croisement x positif; on obtient ainsi un diagramme D' . Si l'on note U le module différentiel gradué $CKh(D)$, alors on a : $CKh(D') = U \otimes R \oplus x \otimes U$. On définit

$$F_+ : CKh(D) \longrightarrow CKh(D') \quad \text{et} \quad \bar{F}_+ : CKh(D') \longrightarrow CKh(D) \quad \text{par}$$

$$F_+(u) = u \otimes \alpha - \alpha_0 u \otimes 1, \quad \bar{F}_+(u \otimes a) = u \varepsilon(\omega a), \quad \bar{F}_+(x \otimes u) = 0$$

où $\alpha_0 u$ est obtenu en multipliant u par α sur la composante de D passant par x . On dira que F_+ (resp. \bar{F}_+) est associée au mouvement de Reidemeister de D vers D' (resp. de D' vers D).

Si l'on modifie D par un croisement négatif, on obtient un diagramme D' avec :

$$CKh(D') = U \oplus x \otimes U \otimes R.$$

On définit alors

$$F_- : CKh(D) \longrightarrow CKh(D') \quad \text{et} \quad \bar{F}_- : CKh(D') \longrightarrow CKh(D) \quad \text{par :}$$

$$F_-(u) = x \otimes u \otimes 1, \quad \bar{F}_-(u) = 0, \quad \bar{F}_-(x \otimes u \otimes a) = a_0 u.$$

On dira aussi que F_- (resp. \bar{F}_-) est associée au mouvement de Reidemeister de D vers D' (resp. de D' vers D).

2.2. Mouvement de type II

Étant donné un diagramme D , on peut le modifier par un mouvement de Reidemeister de type II en rajoutant deux croisements x et y ; on note D' le diagramme ainsi obtenu et U le complexe $CKh(D)$. Quitte à échanger x et y , on a un complexe V tel que :

$$CKh(D') = V \oplus x \otimes U \oplus y \otimes V \otimes R \oplus x \wedge y \otimes V.$$

Notons γ une courbe qui joint les deux branches de D , qui sont modifiées par le mouvement. On note aussi D'' le diagramme $f_\gamma(D)$. On vérifie que V est le complexe $CKh(D'')$. Comme D est obtenu de D'' par une chirurgie $f_{\gamma'}$, on a un morphisme $f = f_\gamma$ de U dans V et un morphisme $f = f_{\gamma'}$ de V dans U . Si a est un élément de R et u un élément de U , on note $a_1 u$ (resp. $a_2 u$) l'élément de U obtenu par multiplication de u par a sur la composante de D qui devient la composante dessus (resp. dessous) de D' . On pose alors :

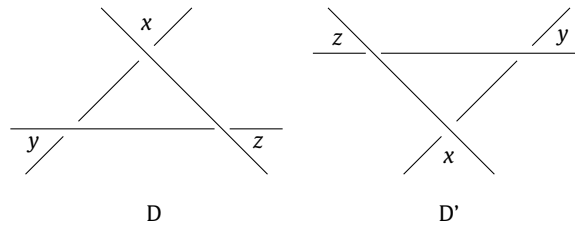
$$G(u) = x \otimes u + y \otimes f(\omega_1^{-1} u) \otimes \omega$$

$$\bar{G}(v) = 0, \quad \bar{G}(x \wedge y \otimes v) = 0, \quad \bar{G}(x \otimes u) = u, \quad \bar{G}(y \otimes v \otimes a) = -\varepsilon(a) f(v)$$

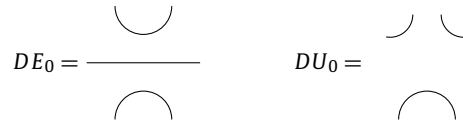
pour $u \in U$, $v \in V$, et $a \in R$. On dira que G (resp. \bar{G}) est associée au mouvement de Reidemeister de D vers D' (resp. de D' vers D).

2.3. Mouvement de type III

Soit D un diagramme d'entrelacs et soit D' le diagramme transformé par un mouvement de type III. Les trois croisements modifiés de D sont indiqués sur la figure par x , y et z .



Un tel mouvement sera dit mouvement de type III₋. Par modification de D près des croisements x, y et z , on obtient les diagrammes $DE_i, i \in \mathbb{Z}/3$ et $DU_j, j \in \mathbb{Z}/2$. Les diagrammes DE_0 et DU_0 sont donnés par :



Les autres diagrammes s'obtiennent par rotation du dessin autour de son centre et d'angle $\frac{k\pi}{3}$.

On considère les courbes $\gamma_i, i \in \mathbb{Z}/6$ situées sur un disque B centré au centre du dessin et qui contient tous les croisements; l'indice $i = 1$ correspond à une courbe située près du croisement x (en haut du dessin de gauche) et on décrit les autres en parcourant B dans le sens positif. On notera f_i l'application f_{γ_i} , pour $i \in \mathbb{Z}/6$. On pose aussi :

$$E_j = CKh(DE_j, K), \quad j \text{ mod } 3 \quad \text{et} \quad U_k = CKh(DU_k, K), \quad k \text{ mod } 2.$$

Enfin, si w est un élément de H (avec $H = E_j, j \text{ mod } 3$ ou $U_k, k \text{ mod } 2$), si a est un élément de R et i un élément de $\mathbb{Z}/6$, alors on notera $a_i w$ l'élément de H obtenu en multipliant par a la composante de w qui rencontre γ_i et γ_{i+1} . On a alors les décompositions suivantes :

$$CKh(D) = E_0 \oplus x \otimes U_0 \oplus y \otimes U_1 \oplus z \otimes U_1 \oplus y \wedge z \otimes R \otimes U_1 \oplus x \wedge z \otimes E_1 \oplus x \wedge y \otimes E_2 \oplus x \wedge y \wedge z \otimes U_1$$

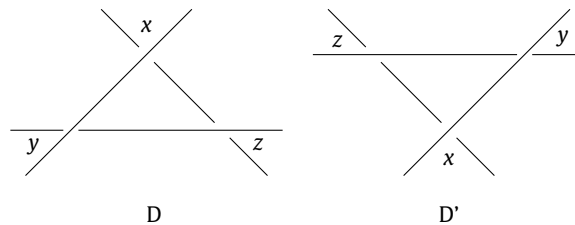
$$CKh(D') = E_0 \oplus x \otimes U_1 \oplus y \otimes U_0 \oplus z \otimes U_0 \oplus y \wedge z \otimes R \otimes U_0 \oplus x \wedge z \otimes E_1 \oplus x \wedge y \otimes E_2 \oplus x \wedge y \wedge z \otimes U_0.$$

On définit $\Phi_- : CKh(D) \rightarrow CKh(D')$ par :

$$\begin{aligned} \forall e_0 \in E_0, \quad \Phi_-(e_0) &= e_0 \\ \forall u_0 \in U_0, \quad \Phi_-(x \otimes u_0) &= (y + z) \otimes u_0 \\ \forall u_1 \in U_1, \quad \Phi_-(y \otimes u_1) &= x \otimes u_1 \\ \Phi_-(z \otimes u_1) &= 0 \\ \forall a \in R, \quad \forall u_1 \in U_1, \quad \Phi_-(y \wedge z \otimes a \otimes u_1) &= \varepsilon(a)[x \wedge z \otimes f_2(u_1) + y \wedge z \otimes \omega \otimes \omega_4^{-1} f_4 \circ f_2(u_1)] \\ \forall e_1 \in E_1, \quad \Phi_-(x \wedge z \otimes e_1) &= -x \wedge z \otimes e_1 - y \wedge z \otimes \omega \otimes \omega_4^{-1} f_4(e_1) \\ \forall e_2 \in E_2, \quad \Phi_-(x \wedge y \otimes e_2) &= -x \wedge y \otimes e_2 + y \wedge z \otimes \omega \otimes \omega_4^{-1} f_4(e_2) \\ \forall u_1 \in U_1, \quad \Phi_-(x \wedge y \wedge z \otimes u_1) &= 0. \end{aligned}$$

On dira que Φ_- est associée au mouvement de Reidemeister de D vers D' .

Considérons maintenant une modification de D par un mouvement de Reidemeister de type III de la forme suivante, qu'on appellera mouvement de type III₊ :



Le diagramme transformé sera noté D' . On notera x, y et z les trois croisements de la même façon que plus haut et on prendra les mêmes conventions pour la numérotation des courbes γ_i que précédemment. On considère aussi les modules $E_j, j \text{ mod } 3$ et $U_i, i \text{ mod } 2$. On a alors :

$$CKh(D) = U_1 \oplus x \otimes R \otimes U_1 \oplus y \otimes E_2 \oplus z \otimes E_1 \oplus y \wedge z \otimes U_0 \oplus x \wedge z \otimes U_1 \oplus x \wedge y \otimes U_1 \oplus x \wedge y \wedge z \otimes E_0$$

$$CKh(D') = U_0 \oplus x \otimes R \otimes U_0 \oplus y \otimes E_2 \oplus z \otimes E_1 \oplus y \wedge z \otimes U_1 \oplus x \wedge z \otimes U_0 \oplus x \wedge y \otimes U_0 \oplus x \wedge y \wedge z \otimes E_0.$$

On procède comme précédemment et on trouve une application Φ_+ de $CKh(D)$ dans $CKh(D')$, donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi_+(u_1) &= 0 \\ \Phi_+(x \otimes a \otimes u_1) &= \varepsilon(a\omega)(x \otimes 1 \otimes \omega_1^{-1} f_2 f_6(u_1) + y \otimes \omega_1^{-1} f_2(u_1) + z \otimes \omega_1^{-1} f_6(u_1)) \\ \Phi_+(y \otimes e_2) &= -x \otimes 1 \otimes f_4(e_2) - y \otimes e_2 \\ \Phi_+(z \otimes e_1) &= -z \otimes e_1 \\ \Phi_+(x \wedge y \otimes u_1) &= y \wedge z \otimes u_1 \\ \Phi_+(x \wedge z \otimes u_1) &= -y \wedge z \otimes u_1 \\ \Phi_+(y \wedge z \otimes u_0) &= -x \wedge z \otimes u_0 \\ \Phi_+(x \wedge y \wedge z \otimes e_0) &= x \wedge y \wedge z \otimes e_0. \end{aligned}$$

On dira que Φ_+ est associée au mouvement de Reidemeister de D vers D' .

Théorème 2.1. *Les applications associées aux mouvements de Reidemeister sont des équivalences d'homotopie et vérifient :*

$$\begin{aligned} \bar{F}_+ \circ F_+ &= \text{Id}, \quad \bar{F}_- \circ F_- = \text{Id}, \quad \bar{G} \circ G = \text{Id} \\ \Phi_- \circ \Phi_- &\text{ est homotope à Id} \\ \Phi_+ \circ \Phi_+ &\text{ est homotope à Id.} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \partial^\circ F_+ &= (0, -1), \quad \partial^\circ \bar{F}_+ = (0, 1), \quad \partial^\circ F_- = (-1, 1), \quad \partial^\circ \bar{F}_- = (1, -1) \\ \partial^\circ G &= (-1, 0), \quad \partial^\circ \bar{G} = (1, 0), \quad \partial^\circ \Phi_- = \partial^\circ \Phi_+ = (0, 0). \end{aligned}$$

Remarque. Par changement de coefficients, on obtient le même résultat pour l'homologie de Khovanov à coefficients dans n'importe quel K -module.

3. Image miroir

On note D un diagramme d'entrelacs, X l'ensemble de ses croisements et \bar{D} son image miroir. On définit un bidegré sur le K -module K_X qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_X \otimes_{\mathbb{Z}} K$ en posant

$$\partial^\circ(x_1 \wedge \dots \wedge x_n \otimes u) = (-n, \partial^\circ u).$$

Proposition 3.1. *L'application $\Psi : CKh(D) \otimes CKh(\bar{D}) \longrightarrow K_X$ définie par*

$$(w \otimes v) \otimes (w' \otimes v') \longmapsto w \wedge w' \prod_i (-\varepsilon(v_i v'_i))$$

avec $v = \otimes_i v_i \in R^{\otimes C_\lambda(D)}$, $v' = \otimes_i v'_i \in R^{\otimes C_{-\lambda}(\bar{D})}$, est une forme bilinéaire non dégénérée, de degré $(0, 0)$ et compatible avec les différentielles.

Remarque. Dans l'expression ci-dessus, il faut considérer que $w \wedge w' \prod_i (-\varepsilon(v_i v'_i))$ est nul si $w \wedge w'$ n'est pas un élément de K_X . Si $w \wedge w'$ est un élément non nul de K_X , les ensembles $C_\lambda(D)$ et $C_{-\lambda}(\bar{D})$ sont les mêmes et l'expression de Ψ a un sens.

Corollaire 3.2. *Le choix d'une numérotation de X induit un isomorphisme de $CKh(\bar{D})$ sur le dual de $CKh(D)$ de bidegré $(n, 0)$, avec $n = |X|$.*

4. Généralisation d'un théorème de Rasmussen

Proposition 4.1. Soit A une K -algèbre telle que $(\alpha - \bar{\alpha})^2 = s^2 - 4p$ soit inversible dans A , alors l'homologie de Khovanov généralisée d'un diagramme D à coefficients dans A ne dépend que du nombre de composantes de l'entrelacs donné.

Pour $\alpha^2 = 1$, on retrouve un théorème de Rasmussen [3].

On remarque que, dans le cas de l'homologie de Lee–Khovanov, l'élément $(\alpha - \bar{\alpha})^2 = s^2 - 4p = -4$ est inversible si et seulement si 2 est inversible dans A .

Remarque. La proposition précédente ne donne aucune information relative au degré. Par exemple, si D et D' sont les diagrammes de l'entrelacs de Hopf et de l'entrelacs trivial à deux composantes, il n'y a pas d'isomorphisme bigradué ou gradué entre les homologies de Khovanov généralisées de D et D' , même dans le cas où $s^2 - 4p$ est inversible.

Références

- [1] M. Khovanov, A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.* 101 (3) (2000) 359–426.
- [2] M. Khovanov, Link homology and Frobenius extensions, *Fundam. Math.* 190 (2006) 179–190.
- [3] J. Rasmussen, Khovanov homology and the slice genus, *Invent. Math.* 182 (2) (2010) 419–447.