C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 339–342

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Suites récurrentes linéaires : terme général et idempotents

Linear recurrence sequences: General term and idempotents

Ahmed Ait Mokhtar [1]

Département de mathématiques, École normale supérieure, Kouba, BP 92, Alger, Algérie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 26 janvier 2012
Accepté après révision le 6 mars 2012
Disponible sur Internet le 30 mars 2012

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous montrons essentiellement deux résultats. Le premier consiste à montrer que l'algèbre de Hadamard des suites récurrentes linéaires est somme directe de deux ensembles que nous définissons. Le deuxième résultat donne une caractérisation des idempotents de cette algèbre.

ABSTRACT

In this Note, we show essentially two results. The first one consists in showing that the algebra of linear recurrence sequences is the direct sum of two sets. The second result consists in giving a characterisation of the idempotents of this algebra.

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. L'algèbre de Hadamard des suites récurrentes linéaires à coefficients dans K est notée $r(K)$. Soit n_0 un entier naturel non nul et α un élément de K^*. On note $r_\alpha(K)$ l'ensemble des suites de $r(K)$ dont le terme général s'écrit $u(n) = p(n)\alpha^n$, pout tout entier naturel n avec $p \in K[x]$ et $Z(K)$ l'ensemble des suites de $r(K)$ qui s'annulent pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$. Dans la première section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les suites récurrentes linéaires à coefficients dans K. Dans la deuxième section, nous montrons d'abord deux lemmes puis nous montrons que l'algèbre $r(K)$ est somme directe des deux ensembles $\bigoplus r_\alpha(K)$ et $Z(K)$. Enfin dans la troisième section, nous caractérisons l'ensemble des idempotents de l'algèbre de Hadamard $r(K)$.

1. Rappels sur les suites récurrentes linéaires

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps commutatif de caractéristique nulle. Soit $S(K) = K^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans K.

Définition 1.1. Soit u et v deux suites de $S(K)$. Le produit de Hadamard des suites u et v est la suite $w = u \odot v$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w(n) = u(n)v(n)$.

Rappelons que, muni de l'addition terme à terme et du produit de Hadamard, l'ensemble $S(K)$ est une K-algèbre unitaire appelée l'algèbre de Hadamard des suites [1].

Adresse e-mail : ahmed.aitmokhtar@yahoo.fr.

[1] Adresse actuelle : Department of Mathematics, Taibah University, Saudi Arabia.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2012.03.004

Définition 1.2. L'application T de $S(K)$ dans $S(K)$ qui, à toute suite u, associe la suite Tu définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Tu)(n) = u(n+1)$ est appelée application décalage (ou shift).

Remarques 1.3.

1. Il est facile de voir que l'on a : $\forall u \in S(K),\ v \in S(K),\ T(u \odot v) = (Tu) \odot (Tv)$.
2. Si on désigne, pour tout $i \in \mathbb{N}$, par T^i le ième itéré de T, alors : $\forall u \in S(K), \forall n \in \mathbb{N},\ (T^i u)(n) = u(n+i)$.

Définition 1.4. Soit u une suite dans $S(K)$. On dit que u est une suite récurrente linéaire à coefficients constants, dans K, s'il existe un entier naturel non nul h, des éléments $p_0, \ldots, p_h$ dans K, p_h non nul, vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_h u(n+h) + p_{h-1} u(n+h-1) + \cdots + p_0 u(n) = 0.$$

Si h est minimal alors il est appelé longueur de la suite u.

Le polynôme $p_h x^h + p_{h-1} x^{h-1} + \cdots + p_1 x + p_0$ est appelé un polynôme caractéristique de la suite u.

On trouvera une définition équivalente d'une suite récurrente linéaire dans [4] dans le cas où $K = A$ est un anneau commutatif unitaire à savoir : si $B = A[x]$, $p(x) = \sum_{i=0}^{d} p_i x^i \in B$, $u \in S(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $(p(x)u)_n = \sum_{i=0}^{d} p_i u(n+i)$ et $I_u = \{p \in B;\ pu = 0\}$ l'idéal annulateur de u, on a alors la définition suivante.

Définition 1.5. (Voir [4].) On dit qu'une suite $u \in S(A)$ est une suite récurrente linéaire si I_u contient un polynôme unitaire. Les polynômes unitaires de la suite u sont les polynômes caractéristiques de u.

Rappelons la propriété de clôture suivante :

Proposition 1.6. *(Voir [4].) L'ensemble $r(K)$ des suites récurrentes linéaires à coefficients dans K est une sous-K-algèbre de l'algèbre de Hadamard $S(K)$.*

Le théorème suivant caractérise les suites de l'algèbre $r(K)$. Pour la démonstration, on peut consulter [2] ou [5].

Théorème 1.7. *Soit K^{alg} une clôture algébrique de K et $u \in S(K)$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *la suite u appartient à $r(K)$,*
2. *la série génératrice $f_u(x) = \sum_{n \geqslant 0} u(n) x^n$ de la suite u est rationnelle,*
3. *il existe un entier naturel h non nul, des polynômes p_i dans $K^{alg}[x]$, des éléments α_i dans K^{alg} $(1 \leqslant i \leqslant h)$ et un entier naturel n_0 tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $u(n) = \sum_{i=1}^{h} p_i(n) \alpha_i^n$.*

2. Terme général d'une suite récurrente linéaire

Supposons que K est algébriquement clos et soit $\alpha \in K^*$. On pose :

$$r_\alpha(K) = \bigl\{u \in r(K),\ \exists p \in K[x],\ \forall n \geqslant 0,\ u(n) = p(n)\alpha^n\bigr\},$$
$$Z(K) = \bigl\{u \in r(K),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u(n) = 0\bigr\}.$$

Si, pour tout entier naturel n, on pose : $(u_{p,\alpha})(n) = p(n)\alpha^n$, avec $p \in K[x]$, on a alors :

$$u_{p,\alpha} + u_{q,\alpha} = u_{p+q,\alpha}, \quad \text{et} \quad u_{p,\alpha} \odot u_{q,\beta} = u_{pq,\alpha\beta}.$$

Lemme 2.1. *Soit $\alpha \in K^*$, $n_0 \in \mathbb{N}$, T l'application décalage et u une suite de $r(K)$ définie par :*

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u(n) = p(n)\beta^n, \quad \beta \in K^*,\ p \in K[x].$$

Alors il existe un polynôme ϱ à coefficients dans K avec $d^\circ \varrho = d^\circ p$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \bigl((T - \alpha I)u\bigr)(n) = \begin{cases} \alpha(p(n+1) - p(n))\alpha^n & \text{si } \alpha = \beta, \\ \varrho(n)\beta^n & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, il est facile de voir que :

Pour $\alpha = \beta$, on a : $((T - \alpha I)u)(n) = u(n+1) - \alpha u(n) = \alpha(p(n+1) - p(n))\alpha^n$.

Pour $\alpha \neq \beta$, on a : $((T - \alpha I)u)(n) = p(n+1)\beta^{n+1} - \alpha p(n)\beta^n = (p(n+1)\beta - \alpha p(n))\beta^n$. Il suffit donc de prendre :

$$\varrho(n) = p(n+1)\beta - \alpha p(n) \quad \text{avec } d^\circ \varrho = d^\circ p. \qquad \square$$

Lemme 2.2. *Soit $\alpha \in K^*$. On a :* $r_\alpha(K) = \bigcup_{m\geqslant 1} \operatorname{Ker}(T-\alpha I)^m$.

Démonstration. Soit une suite u dans $r_\alpha(K)$. Il existe alors un polynôme p à coefficients dans K tel que, pour tout entier naturel n, on a $u(n) = p(n)\alpha^n$. On a, par définition de l'application T :

$$\big((T-\alpha I)u\big)(n) = \alpha\big(p(n+1)-p(n)\big)\alpha^n = \alpha(\Delta p)(n)\alpha^n, \quad \text{où } (\Delta p)(n) = p(n+1)-p(n).$$

Par suite, on a : $((T-\alpha I)^2 u)(n) = (T-\alpha I)(\alpha v)(n)$, où $v(n) = (\Delta p)(n)\alpha^n$. D'où :

$$\big((T-\alpha I)^2 u\big)(n) = \alpha\alpha\big(\Delta(\Delta p)\big)(n)\alpha^n = \alpha^2\big(\Delta^2 p\big)(n)\alpha^n.$$

Si $k > d^\circ p$, on obtient alors : $(T-\alpha I)^k u = 0$, c'est-à-dire $u \in \bigcup_{m\geqslant 1}\operatorname{Ker}(T-\alpha I)^m$, d'où la première inclusion. Montrons maintenant la deuxième inclusion. Soit $u \in \bigcup_{m\geqslant 1}\operatorname{Ker}(T-\alpha I)^m$. Il existe alors un entier naturel non nul m_0 tel que $u \in \operatorname{Ker}(T-\alpha I)^{m_0}$, d'où, pour tout entier naturel n, on a :

$$\big((T-\alpha I)^{m_0} u\big)(n) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (x-\alpha)^{m_0} u = 0$$

de sorte que $(x-\alpha)^{m_0}$ est un polynôme caractéristique de la suite u. Mieux, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u(n) = p(n)\alpha^n$, où $p \in K[x]$, et $d^\circ p = m_0 - 1$. Donc la suite u est dans $r_\alpha(K)$. □

Proposition 2.3. *Avec les notations introduites ci-dessus, on a :* $r(K) = \bigoplus_{\alpha\in K^*} r_\alpha(K) \oplus Z(K)$.

Démonstration. D'après le lemme 2.2, un élément u de l'ensemble $\bigoplus_{\alpha\in K^*} r_\alpha(K)$ s'écrit $u(n) = \sum_{i=1}^{s} p_i(n)\alpha_i^n$, où $s \in \mathbb{N}^*$, $p_i \in K[x]$ et $\alpha_i \in K^*$, pour tout $i \in \{1,\dots,s\}$. Il suffit de montrer l'implication suivante :

$$\left(\forall n \geqslant n_0,\ \sum_{i=1}^{s} p_i(n)\alpha_i^n = 0\right) \quad\Rightarrow\quad \big(\forall i \in \{1,\dots,s\},\ p_i = 0\big).$$

Soit donc $\sum_{i=1}^{s} p_i(n)\alpha_i^n = 0$, pour $n \geqslant n_0$ et posons : $m_i = d^\circ p_i + 1$, $1 \leqslant i \leqslant s$, et $q(x) = \prod_{i=2}^{s}(x-\alpha_i)^{m_i}$.

On a alors : $q(T) = \prod_{i=2}^{s}(T-\alpha_i I)^{m_i}$, d'où :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \big(q(T)u\big)(n) = \sum_{i=2}^{s} q(T)\big(p_i(n)\alpha_i^n\big) = 0. \tag{1}$$

D'après le lemme 2.1, il existe $\varrho \in K[x]$ tel que : $((T-\alpha_s I)v)(n) = \varrho(n)\alpha_1^n$, $d^\circ\varrho = d^\circ p$, $\alpha_1 \neq \alpha_s$, où $v(n) = p_1(n)\alpha_1^n$. Plus généralement, on a :

$$\big((T-\alpha_s I)^{m_s} v\big)(n) = \varrho_s(n)\alpha_1^n, \qquad d^\circ\varrho_s = d^\circ p_1$$

et

$$\big((T-\alpha_{s-1} I)^{m_{s-1}}(T-\alpha_s I)^{m_s} v\big)(n) = \varrho_{s-1}(n)\alpha_1^n, \qquad d^\circ\varrho_{s-1} = d^\circ p_1.$$

Ainsi, on arrive à :

$$(T-\alpha_2 I)^{m_2}(T-\alpha_3 I)^{m_3}\dots(T-\alpha_s I)^{m_s} v)(n) = \varrho_2(n)\alpha_1^n, \qquad d^\circ\varrho_2 = d^\circ p_1. \tag{2}$$

Des relations (1) et (2), on déduit que : $\forall n \geqslant n_0, q(T)(p_1(n)\alpha_1^n) = \varrho_2(n)\alpha_1^n = 0$, d'où : $d^\circ\varrho_2 = -\infty = d^\circ p_1$, par suite, on a $p_1 = 0$; le même raisonnement donne que tous les autres p_i sont nuls. On en déduit, d'abord que pour $n_0 = 0$, les $r_\alpha(K)$ sont en somme directe et qu'ensuite : $\bigoplus_{\alpha\in K^*} r_\alpha(K) \cap Z(K) = \{0\}$.

En outre, par le théorème 1.7, on déduit que $\bigoplus_{\alpha\in K^*} r_\alpha(K)$ et $\bigoplus Z(K)$ sont en somme directe. □

Remarque 2.4. Soit la suite $(\delta_i)_{i\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si u est un élément de $r(K)$ alors il existe $s \in \mathbb{N}^*$, une partie finie F de $\mathbb{N}$, $a_i \in K$, $(i \in F)$ et $\alpha_i \in K^*$, $p_i \in K[x]$, $i \in \{1,\dots,s\}$, tels que :

$$u(n) = \sum_{i\in F} a_i\delta_i + \sum_{i=1}^{s} p_i(n)\alpha_i^n.$$

3. Idempotents de l'algèbre des suites récurrentes linéaires

On sait, d'après [1], que les idempotents de l'algèbre $S(K)$ sont donnés par la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit A un anneau unitaire intègre. Une suite u de l'algèbre de Hadamard $S(A)$ est un idempotent si et seulement s'il existe une partie N de $\mathbb{N}$ telle que $u = \chi_N$, où χ_N est la fonction indicatrice de N.*

Comme $r(K)$ est une partie de $S(K)$ alors les idempotents de $r(K)$ sont aussi de la même forme avec N une partie de $\mathbb{N}$ à déterminer. Rappelons le résultat suivant dû à Lech–Skolem–Mahler :

Théorème 3.2. *(Voir [3].) Soit $u \in r(K)$. Posons $Z = \{n \in \mathbb{N}\colon\ u(n) = 0\}$. Si l'ensemble Z est infini alors il existe un entier naturel m non nul, des entiers distincts $\mu_1, \ldots, \mu_s$ dans $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ tels que Z est la réunion d'une partie finie I_0 de $\mathbb{N}$ et d'un nombre fini $I_{m,\mu_i} = \{n \in \mathbb{N}\colon\ n \equiv \mu_i \pmod m\}$ de progressions arithmétiques.*

La proposition suivante donne une caractérisation des idempotents de l'algèbre $r(K)$.

Proposition 3.3. *Soit N une partie de $\mathbb{N}$. Pour que χ_N appartienne à l'algèbre de Hadamard $r(K)$ il faut et il suffit qu'il existe un entier naturel m non nul, des entiers $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_s \in \{0, \ldots, m-1\}$ tels que N est la réunion d'une partie finie I_0 de $\mathbb{N}$ et des ensembles $I_{m,\mu_i} = \{n \in \mathbb{N}\colon\ n \equiv \mu_i \pmod m\}$.*

Démonstration. Si N est finie alors χ_N est nulle à partir d'un certain rang et donc appartient à $r(K)$.

Supposons que N est infinie. Si $\chi_N \in r(K)$ alors : $1 - \chi_N \in r(K)$. D'après le théorème 3.2, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\colon\ (1-\chi_N)(n) = 0\}$ est réunion d'une partie finie I_0 de $\mathbb{N}$ et des ensembles $I_{m,\mu_i} = \{n \in \mathbb{N}\colon\ n \equiv \mu_i \pmod m\}$. Donc $\{n \in \mathbb{N}\colon\ (\chi_N)(n) = 1\} = I_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{s} I_{m,\mu_i})$. On prend alors $N = I_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{s} I_{m,\mu_i})$.

Réciproquement, on montre que $\chi_N \in r(K)$ avec $N = I_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{s} I_{m,\mu_i})$. On a alors :

$$\sum_{n\geqslant 0} \chi_N(n)x^n = \sum_{n\in I_0} x^n + \sum_{i=1}^{s} \sum_{n\in I_{m,\mu_i}} x^n = \sum_{n\in I_0} x^n + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k\geqslant 0} x^{\mu_i+km} = \sum_{n\in I_0} x^n + \sum_{i=1}^{s} \frac{x^{\mu_i}}{1-x^m}.$$

La série génératrice $\sum_{n\geqslant 0} \chi_N(n)x^n$ est donc rationnelle ; on déduit, par le théorème 1.7, que $\chi_N \in r(K)$. $\square$

Remerciements

L'auteur remercie chaleureusement A. Salinier de l'université de Limoges DMI-Xlim pour ses conseils et son aide.

Références

[1] A. Ait Mokhtar, A. Necer, A. Salinier, Endomorphismes d'algèbres de suites, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 20 (2008) 1–21.
[2] J. Berstel, C. Reutenauer, Les séries rationnelles et leurs langages, Études et recherches en informatique, Masson, Paris, 1984.
[3] S.L. Mahler, On the coefficients of rational functions, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 52 (1956) 39–48.
[4] A. Necer, Systèmes récursifs et algèbre de Hadamard de suites récurrentes linéaires sur des anneaux commutatifs, Communications in Algebra 27 (12) (1999) 6175–6189.
[5] C. Pisot, Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques, in : Séminaire de Mathématiques Supérieures, Eté 1963, Presses de l'université de Montréal, Montréal, 1966, p. 5.