C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 329–332

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Physique mathématique

Le transport neutronique avec des conditions aux limites générales (II)

The neutron transport with general boundary conditions (II)

Mohamed Boulanouar

LMCM-RSA, 22, rue des canadiens, 86000 Poitiers, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 31 août 2011
Accepté après révision le 16 février 2012
Disponible sur Internet le 6 mars 2012

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Cette Note est consacrée à l'étude de l'opérateur de transport unidimensionnel, sur un domaine non borné, muni de conditions aux limites générales. Nous montrons la génération d'un semi-groupe fortement continu et nous étudions ses propriétés spectrales. En particulier, nous montrons l'existence d'une valeur propre dominante.

ABSTRACT

This Note deals with the one-dimensional transport operator, on an unbounded domain, endowed with general boundary conditions. We show the generation of a strongly continuous semigroup and we study its spectral properties. In particular, we prove the existence of a leading eigenvalue.
© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Dans cette Note, nous proposons d'étudier l'opérateur de transport

$$T\varphi(x,y) = -y\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) - \sigma(x,y)\varphi(x,y) + \int_{-b}^{b} r(x,y,y')\varphi(x,y')\,\mathrm{d}y' \tag{1}$$

où, $(x,y) \in]-a,a[\times]-b,b[$ avec $0 < a < \infty$ et $0 < b \leqslant \infty$ et, σ et r désignent respectivement, la fréquence et le noyau de collision. Nous dotons cet opérateur des conditions aux limites suivantes :

$$\gamma_i\varphi = K\gamma_o\varphi \tag{2}$$

liant le flux rentrant $\gamma_i\varphi$ et le flux sortant $\gamma_o\varphi$ des particules, par un opérateur K dit de *bords*. Ces conditions aux limites généralisent visiblement toutes les conditions aux limites connues.

L'opérateur de transport (1), muni des conditions aux limites (2), a déjà fait l'objet d'une étude complète dans [3], où l'on a montré la génération d'un C_0-semi-groupe pourvu que l'ensemble, des vitesses, soit borné (i.e., $b < \infty$). Nous avons également dégagé ses propriétés spectrales et le comportement asymptotique de son semi-groupe. Cependant, étant donné que tous les résultats de [3] dépendent explicitement de b ($b < \infty$), il est alors naturel de se poser la question suivante :

Qu'en serait-il si l'ensemble, des vitesses, est non-borné, i.e., $b = \infty$?

Adresse e-mail : boulanouar@online.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2012.02.007

Une réponse à cette question existe déjà dans les travaux pionniers [1,7,9], où l'on a montré que si $\|K\| < 1$, alors l'opérateur de transport en question engendre un C_0-semi-groupe de contractions. Cependant, ce cas (i.e., $\|K\| < 1$) peut ne pas présenter un grand intérêt physique si le nombre de particules est croissant.

Pour pouvoir répondre positivement à la question précédente dans le cas $\|K\| \geqslant 1$, des contributions ont été apportées dans [6, Th. 3.6] et [8, Th. 4.1] (voir Remarques 4.2 et 4.3). Cela montre, en particulier, la difficulté que l'étude du cas $b = \infty$ peut présenter.

Dans cette Note, nous allons nous intéresser au cas où l'ensemble, des vitesses, n'est pas borné (i.e., $b = \infty$) ce qui constitue visiblement une nouveauté. Nous optons pour le cadre naturel $L^1(\Omega)$ ($\Omega \overset{\mathrm{def}}{=}]-a, a[\times]-\infty, \infty[$) dont la norme

$$\|\varphi\|_1 = \int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} \big|\varphi(x, y)\big| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \tag{3}$$

dénote le nombre de particules initiales. Nous montrons que si l'opérateur K est compact et $\|K\| \geqslant 1$ alors, l'opérateur de transport (1), muni des conditions aux limites générales (2), engendre sur $L^1(\Omega)$ un C_0-semi-groupe que l'on note par $\mathbb{T}_K = (\mathbb{T}_K(t))_{t\geqslant 0}$. Pour approfondir cette étude, nous établissons ensuite l'importante relation $\omega_{ess}(\mathbb{T}_K) < \omega_0(\mathbb{T}_K)$, où, $\omega_0(\mathbb{T}_K)$ et $\omega_{ess}(\mathbb{T}_K)$ désignent respectivement le type et le type essentiel du C_0-semi-groupe $\mathbb{T}_K = (\mathbb{T}_K(t))_{t\geqslant 0}$.

En guise de conclusions, nous dressons en fin de cette Note une liste de remarques et commentaires. Nous déduisons, en particulier, que la borne spectrale $s(\mathbb{T}_K)$, de l'opérateur de transport en question, est isolée et algébriquement simple. Nous déduisons également le comportement asymptotique du semi-groupe $\mathbb{T}_K = (\mathbb{T}_K(t))_{t\geqslant 0}$ dans la norme de la topologie des opérateurs, donc, indépendamment de toutes les données initiales. Enfin, signalons la nouveauté de l'ensemble de ces résultats.

2. Préliminaires

Nous considérons le cadre fonctionnel $L^1(\Omega)$ muni de la norme (3) et nous introduisons notre espace de régularité

$$W_1 = \left\{\varphi \in L^1(\Omega)\colon\ y\frac{\partial\varphi}{\partial x} \in L^1(\Omega) \text{ et } y\varphi \in L^1(\Omega)\right\}$$

ainsi que les espaces de traces : du flux entrant $X_i = X_+ \times X_-$ et du flux sortant $X_o = X_- \times X_+$, où, $X_+ = L^1(]0, \infty[, y\,\mathrm{d}y)$ et $X_- = L^1(]-\infty, 0[, |y|\,\mathrm{d}y)$. Nous définissons les traces, entrantes et sortantes, d'un élément $\varphi \in W_1$ par

$$\gamma_i\varphi = \begin{bmatrix} \gamma_{-a}^{+}\varphi \\ \gamma_a^{-}\varphi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_o\varphi = \begin{bmatrix} \gamma_{-a}^{-}\varphi \\ \gamma_a^{+}\varphi \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \big(\gamma_{\pm a}^{+}\varphi\big)(y) = \xi_{]0,\infty[}(y)\varphi(\pm a, y) \\ \big(\gamma_{\pm a}^{-}\varphi\big)(y) = \xi_{]-\infty,0[}(y)\varphi(\pm a, y) \end{array}$$

où, ξ_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$. Dans ce contexte, grâce à notre récent résultat [4, Th. 2.1] nous déduisons que

Lemme 2.1. *Les applications de traces $\gamma_o : W_1 \to X_o$ et $\gamma_i : W_1 \to X_i$ sont linéaires continues et surjectives.*

Le lemme précédent nous permet de définir l'opérateur d'advection A_K par

$$\begin{cases} A_K\varphi = -y\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{sur le domaine}, \\ D(A_K) = \{\varphi \in W_1\colon\ \gamma_i\varphi = K\gamma_o\varphi\}. \end{cases} \tag{4}$$

Dans la suite, cet opérateur sera perturbé par les opérateurs linéaires suivants :

$$S\varphi(x, y) \overset{\mathrm{def}}{=} -\sigma(x, y)\varphi(x, y) \quad \text{et} \quad R\varphi(x, y) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} r\big(x, y, y'\big)\varphi\big(x, y'\big)\,\mathrm{d}y'$$

pour donner lieu aux opérateurs :

d'absorption : $L_K = A_K + S$ sur le domaine $D(L_K) = D(A_K)$ et

de transport : $T_K = A_K + S + R$ sur le domaine $D(T_K) = D(A_K)$,

sous réserve que la fréquence de collision σ et le noyau de collision r vérifient, le moment voulu, l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\sigma}$) $\sigma \in L^{\infty}(\Omega)$

($\mathbf{H}^{\mathbf{2}}_{\sigma}$) σ est positive

($\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{r}}$) $\displaystyle \sup_{(x,y')\in\Omega} \operatorname{ess} \int_{-\infty}^{\infty} \left| r\big(x, y, y'\big)\right| \mathrm{d}y < \infty$

($\mathbf{H}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{r}}$) r est positive

($\mathbf{H}^{\mathbf{3}}_{\mathbf{r}}$) $\displaystyle \sup_{(x,y,y')} \operatorname{ess} \left(\frac{r(x, y, y')}{|x|} \right) < \infty$

3. Résultats principaux

Tout d'abord, [5, Corollaires 2.1 et 2.2] permet de déduire le résultat suivant :

Lemme 3.1. *Soit K un opérateur linéaire borné de X_o dans X_i et compact si $\|K\| \geqslant 1$. Alors l'opérateur d'advection A_K engendre, sur $L^1(\Omega)$, un C_0-semi-groupe $\mathbb{A}_K = (\mathbb{A}_K(t))_{t\geqslant 0}$.*

Ensuite, en tenant compte de l'hypothèses ($\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\sigma}$) (resp. ($\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{r}}$)) l'opérateur linéaire S (resp. R) est alors borné de $L^1(\Omega)$ dans lui même. Dans ce contexte, le Lemme 3.1 et le théorème de la perturbation bornée nous confèrent notre premier nouveau résultat de cette Note comme suit

Proposition 3.2. *Soit K un opérateur linéaire borné de X_o dans X_i et compact si $\|K\| \geqslant 1$. Si l'hypothèse ($\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\sigma}$) est vérifiée, alors l'opérateur d'absorption L_K engendre, sur $L^1(\Omega)$, un C_0-semi-groupe $\mathbb{L}_K = (\mathbb{L}_K(t))_{t\geqslant 0}$. Si en plus l'hypothèse ($\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{r}}$) est vérifiée, alors l'opérateur de transport T_K engendre, sur $L^1(\Omega)$, un C_0-semi-groupe noté $\mathbb{T}_K = (\mathbb{T}_K(t))_{t\geqslant 0}$.*

Avant d'annoncer le second résultat de cette Note, définissons l'opérateur

$$K_\lambda \psi \stackrel{\text{def}}{=} K(\theta_\lambda P \psi) \quad \text{où,} \quad P \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta_\lambda(y) = e^{-\frac{2\lambda a}{|y|}} \tag{5}$$

qui jouera un rôle fondamental dans l'étude spectrale de l'opérateur de transport T_K et le comportement asymptotique de son semi-groupe $\mathbb{T}_K = (\mathbb{T}_K(t))_{t\geqslant 0}$.

Théorème 3.3. *Soit K un opérateur linéaire de X_o dans X_i positif et compact tel que KP soit un opérateur irréductible. Supposons en outre que les hypothèses ($\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\sigma}$)–($\mathbf{H}^{\mathbf{2}}_{\sigma}$) et ($\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{r}}$)–($\mathbf{H}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{r}}$)–($\mathbf{H}^{\mathbf{3}}_{\mathbf{r}}$) soient vérifiées. Si $r(K_{\overline{\sigma}-\underline{\sigma}}) > 1$, alors $\omega_{ess}(\mathbb{T}_K) < \omega_0(\mathbb{T}_K)$, où l'on a noté, $\overline{\sigma} = \sup\operatorname{ess}\sigma$ et $\underline{\sigma} = \inf\operatorname{ess}\sigma$.*

Dans le cas où la fréquence de collision σ et le noyau de collision r sont nulles ($\sigma = r = 0$) alors (5) conduit à $r(K_{\overline{\sigma}-\underline{\sigma}}) = r(K_0) = r(KP)$ et par conséquent

Corollaire 3.4. *Soit K un opérateur linéaire de X_o dans X_i positif et compact tel que KP soit irréductible. Si $r(KP) > 1$ alors $\omega_{ess}(\mathbb{A}_K) < \omega_0(\mathbb{A}_K)$.*

4. Remarques et commentaires

Remarque 4.1. La compacité, imposée à l'opérateur de bords K dans le Lemme 3.1, n'est pas fortuite. En effet, dans un cadre similaire au notre (voir [2]), où l'on a considéré un opérateur de bords multiplicatif, nous avons montré que l'opérateur d'advection A_K engendre un C_0-semi-groupe si et seulement si $\|K\| < 1$. Cela signifie que la continuité de l'opérateur de bords K ne suffit pas pour la génération d'un C_0-semi-groupe quand $\|K\| \geqslant 1$, et justifie ainsi la compacité imposée à l'opérateur K dans le Lemme 3.1.

Remarque 4.2. Le Lemme 3.1 est le premier résultat rigoureux concernant l'opérateur d'advection (4). En effet, il a été considéré dans [8] l'opérateur

$$\begin{cases} \widehat{A}_K \varphi = -y \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \eta |y| \varphi \quad \text{sur le domaine} \\ D(\widehat{A}_K) = \big\{ \varphi \in \widehat{W}^1(\Omega);\ \text{et } \gamma_- \varphi = K \gamma_+ \varphi \big\} \end{cases} \tag{6}$$

où, $\eta \geqslant 0$ est une constante donnée. Il a alors été montré, dans [8, Th. 4.1], que cet opérateur engendre, sur $L^1(\Omega)$, un C_0-semi-groupe pourvu que $\|K\| < e^{2a\eta}$.

Remarque 4.3. Pour étudier l'opérateur (6) dans le cas $\|K\| \geqslant e^{2a\eta}$, une contribution a été apportée, dans [6, Th. 3.6], sans hypothèses supplémentaires sur l'opérateur de bords K, telle que la compacité. Cependant, en raison d'une confusion dans une récurrence utilisée dans la preuve de [6, Th. 3.6], cette contribution est malheureusement incorrecte.

Remarque 4.4. Pour apporter une réponse rigoureuse à l'étude de l'opérateur (6) dans le cas $\|K\| \geqslant e^{2a\eta}$, il suffit de vérifier que l'on a

$$\widehat{T}_K = M_\eta^{-1} T_{K_\eta} M_\eta \quad \text{et} \quad M_\eta\big(D(\widehat{T}_K)\big) = D(T_{K_\eta}) \tag{7}$$

où, $K_\eta \stackrel{\text{def}}{=} e^{-2a\eta} K$ et $M_\eta \in \mathcal{L}(L^1(\Omega))$ est l'automorphisme suivant :

$$M_\eta \varphi(x,y) = e^{\eta(a+\operatorname{sgn}(y)x)} \varphi(x,y).$$

Ensuite, d'après le Lemme 3.1, il s'en suit que l'opérateur T_{K_η} engendre, sur $L^1(\Omega)$, un C_0-semi-groupe. Enfin, la relation (7) conduit directement à la génération d'un semi-groupe par l'opérateur (6).

Remarque 4.5. La relation $\omega_{ess}(\mathbb{T}_K) < \omega_0(\mathbb{T}_K)$, obtenue dans le Théorème 3.3, est très importante. En effet, il en résulte en particulier que

(i) La borne spectrale $s(T_K)$ de l'opérateur de transport T_K est une valeur propre isolée et algébriquement simple, autrement dit, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait $\{\lambda \in \sigma(T_K)\colon\ \Re(\lambda) \geqslant s(T_K) - \varepsilon\} = \{s(T_K)\}$.
(ii) La projection spectrale $\mathbb{P}$, associée à $s(T_K)$, est de rang 1.
(iii) Le comportement asymptotique du C_0-semi-groupe $\mathbb{T}_K = (\mathbb{T}_K(t))_{t\geqslant 0}$ peut être décrit indépendamment de toute les données initiales, autrement dit : pour tout $\eta \in]0, \varepsilon[$, il existe $M_\eta \geqslant 1$ telle qu'on ait

$$\big\| e^{-ts(T_K)} \mathbb{T}_K(t) - \mathbb{P} \big\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega))} \leqslant M_\eta e^{-\eta t}, \quad t \geqslant 0.$$

Remarque 4.6. Grâce la relation $\omega_{ess}(\mathbb{A}_K) < \omega_0(\mathbb{A}_K)$ obtenue dans le Corollaire 3.4, les points de la remarque précédente demeurent valables pour l'opérateur d'advection A_K et pour son semi-groupe $\mathbb{A}_K = (\mathbb{A}_K(t))_{t\geqslant 0}$.

Remarque 4.7. L'irréductibilité de l'opérateur positif $KP \in \mathcal{L}(X_o)$, imposée dans le Théorème 3.3, peut être affaiblie. En effet, en explicitant l'opérateur positif $K \in \mathcal{L}(X_o\,;X_i)$ par

$$K = \begin{bmatrix} K_{-,+} & K_{+,+} \\ K_{-,-} & K_{+,-} \end{bmatrix}$$

où, $K_{\pm,\pm} \in \mathcal{L}(X_\pm, X_\pm)$, on en déduit que l'irréductibilité de l'opérateur positif KP peut être remplacée par celle de $K_{+,+} \in (\mathcal{L}(X_+))_+$ et $K_{-,-} \in (\mathcal{L}(X_-))_+$.

Remarque 4.8. Grâce à des modifications, tous les résultats de cette Note demeurent valable dans $L^p(\Omega)$ $(p > 1)$.

Remarque 4.9. Grâce à ce nouveau travail et à [3], nous avons ainsi dégagé les principaux résultats (génération d'un C_0-semi-groupe et la simplicité algébrique de $s(T_K)$) concernant l'opérateur de transport (1) muni des conditions aux limites (2), indépendamment de l'ensemble des vitesses (borné ou non).

Remerciements

Ce projet est entièrement financé par LMCM-RSA.

Références

[1] R. Beals, V. Protopopescu, Abstract time dependent transport equations, J. Math. Anal. Appl. 121 (1987) 370–405.
[2] M. Boulanouar, A Rotenberg model with perfect memory rule, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 327 (1998) 965–968.
[3] M. Boulanouar, Le transport neutronique avec des conditions aux limites générales, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 329 (2) (1999) 121–124.
[4] M. Boulanouar, Nouveaux résultats pour les équations de la neutronique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (11–12) (2009) 623–626.
[5] M. Boulanouar, Nouveaux résultats pour les équations de la neutronique (II), C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (9–10) (2010) 549–552.
[6] S. Ghnimi, H. Megdiche, M.A. Taoudi, The well-posedness for some transport equations with unbounded velocities, Adv. Math. Sci. Appl. 18 (2008) 625–632.
[7] W. Greenberg, C.V.M. van der Mee, V. Protopopescu, Bondary Value Problem in Abstract Kinetic Theory, Birkhäuser, Basel, 1987.
[8] S. Mancini, S. Totaro, Study of a transport operator with unbounded coefficients, Adv. Math. Sci. Appl. 12 (2002) 377–391.
[9] J. Voigt, Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases, Habilitationsschrift, Universität München, 1981.