C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1077–1081

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie algébrique

Le lemme fondamental métaplectique de Jacquet et Mao en caractéristique positive

The metaplectic fundamental lemma of Jacquet and Mao in positive characteristic

Viet Cuong Do

Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré-Nancy 1, B.P. 70239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 13 juillet 2011
Accepté le 31 août 2011
Disponible sur Internet le 21 septembre 2011

Présenté par Gérard Laumon

RÉSUMÉ

On démontre dans le cas de caractéristique positive un lemme fondamental conjecturé par Jacquet et Mao pour le groupe métaplectique. On utilise les arguments de B.C. Ngo pour le lemme fondamental de Jacquet–Ye (B.C. Ngo, 1999) [6] et une étude géométrique de l'extension métaplectique.

ABSTRACT

We prove in the case of positive characteristic a fundamental lemma conjectured by Jacquet and Mao for the metaplectic group. We use the arguments of B.C. Ngo for Jacquet–Ye's fundamental lemma (B.C. Ngo, 1999) [6] and a geometric study of the metaplectic extension.

Abridged English version

Let k be a finite field of characteristic $p \neq 2$. Let $\mathcal{O}_\varpi = k[[\varpi]]$ be the ring of power series with indeterminate ϖ, and let F_ϖ be its field of fractions. Denote by $v_\varpi(x)$ the valuation of an element $x \in F_\varpi$. Let $\ell \neq p$ be a prime number. Fix a non-trivial additive character $\psi : k \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$, where $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ is an algebraic closure of $\mathbb{Q}_\ell$. Let Ψ denote the character of F_ϖ defined by $\Psi(x) = \psi(\mathrm{res}(x\,\mathrm{d}\varpi))$.

Let N_r the sub-scheme of GL_r formed by unipotent upper triangular matrices and T_r the one formed by diagonal matrices. Denote by S_r the affine space formed by $r \times r$ symmetric matrices and by $\mathbf{gl}_r$ the affine space of $r \times r$ matrices.

For each $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}) \in (k^*)^{r-1}$, we define the character θ_α of $N_r(F_\varpi)$ by $\theta_\alpha = \Psi(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i n_{i,i+1})$. This character is trivial on $N_r(\mathcal{O}_\varpi)$, and induces a function $\theta_\alpha : N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$.

For each matrix $t \in T_r(F_\varpi)$, H. Jacquet ([3], for GL_2) and Z. Mao ([5], for an arbitrary r) introduced two orbital integrals $I_\varpi(t,\alpha)$ and $J_\varpi(t,\alpha)$. They can be rewritten as sums over finite sets (cf. [6]), and we will recall their definitions in this form.

Let $X_\varpi(t)(k) = \{n \in N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi) | {}^t ntn \in S_r(\mathcal{O}_\varpi)\}$. The integral $I_\varpi(t,\alpha)$ is defined by $I_\varpi(t,\alpha) = \sum_{n \in X_\varpi(t)(k)} \theta_\alpha^2(n)$.

To define the integral $J_\varpi(t,\alpha)$, we use a splitting of the metaplectic extension (cf. [4]) $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_\varpi)$ of $\mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ above $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$. Denote by $g \mapsto (g, \kappa_\varpi(g))$ this splitting (with the notations of [4]).

Adresse e-mail : do@iecn.u-nancy.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.08.024

Let $Y_\varpi(t)(k)=\{(n,n')\in(N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi))^2|^t ntn'\in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)\}$. Let $\bar\alpha=(\alpha_{r-1},\dots,\alpha_1)$. The integral $J_\varpi(t,\alpha)$ is defined by $J_\varpi(t,\alpha)=\sum_{(n,n')\in Y_\varpi(t)(k)}\kappa_\varpi(w_0{}^t ntn')\theta_{\bar\alpha}(w_0{}^t nw_0)\theta_\alpha(n')$, where w_0 is the matrix of the permutation $(r,r-1,\dots,1)$. We recover the original integral $J_\varpi(t,\alpha)$ (cf. [5]) by replacing n with $w_0{}^t n^{-1}w_0$.

For each $t=\mathrm{diag}(t_1,t_2,\dots,t_r)$, we note $a_i=\prod_{j=1}^i t_j$. The nonemptiness of $X_\varpi(t)(k)$ and $Y_\varpi(t)(k)$ requires $a_1,\dots,a_{r-1}\in\mathcal{O}_\varpi$ and $a_r\in\mathcal{O}_\varpi^*$.

Let $\zeta:k^*\to\{\pm1\}$ the nontrivial quadratic character ($\zeta(\lambda)=\lambda^{\frac{q-1}{2}}$, $\lambda\in k^*$). Denote by $\gamma_\varpi(.,.)$ the Weil's constant.

Theorem 1. *For $t=\mathrm{diag}(a_1,a_1^{-1}a_2,\dots,a_{r-1}^{-1}a_r)$, we have $J_\varpi(t,\alpha)=\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{t}_\varpi(t,\alpha)I_\varpi(t,\alpha)\\ \mathbf{t}'_\varpi(t,\alpha)I_\varpi(t,\alpha)\end{smallmatrix}\right.$ where $\mathbf{t}_\varpi(t,\alpha)=|\prod_{i=1}^{r-1}a_i|^{-1/2}\times\zeta(-1)^{\sum_{j\not\equiv r(\mathrm{mod}\,2)}v_\varpi(a_j)}\prod_{j\not\equiv r(\mathrm{mod}\,2)}\gamma_\varpi(a_ja_{j-1}^{-1},\Psi)$, and $\mathbf{t}'_\varpi(t,\alpha)=|\prod_{i=1}^{r-1}a_i|^{-1/2}\zeta(-1)^{\sum_{j\equiv r(\mathrm{mod}\,2)}v_\varpi(a_j)}\prod_{j\equiv r(\mathrm{mod}\,2)}\gamma_\varpi(a_ja_{j-1}^{-1},\Psi)$ (with $a_0=1$). Moreover, if $\mathbf{t}(t,\alpha)\neq\mathbf{t}'(t,\alpha)$ then the orbital integrals I_ϖ and J_ϖ vanish.*

These formulas were conjectured by Mao [5] for arbitrary non-Archimedian local field and were proved for $r=2$ by Jacquet (see [3]) and for $r=3$ by Mao (see [5]) (Mao's formula [5] $\mu(a,b,c)=|a|^{-1}|b|^{-1/2}\gamma(a,\psi)\gamma(-c,\psi)$ must be corrected in $\mu(a,b,c)=|a|^{-1}|b|^{-1/2}\gamma(-a,\psi)\gamma(c,\psi)$ as we see comparing to Jacquet's formula for $r=2$ (cf. [3])).

The key point in the proof of this theorem consists in studying the metaplectic group and relating it with ACK's (Arbarello, De Concini and Kac) extension, and in constructing a deformation of some "global" sums, which are a global product of the "local" sums introduced above. This theorem then appears as a "limit" of known identities for simple sums. The étale cohomology interpretation of exponential sums and the theory of perverse sheaves is used for passing to the limit.

1. Énoncé

Soit $k:=\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique $p\neq2$. On note $\mathcal{O}_\varpi:=k[[\varpi]]$ l'anneau des séries formelles en une indéterminée ϖ et à coefficient dans k, et F_ϖ son corps des fractions. On note $v_\varpi(x)$ la valuation de l'élément $x\in F_\varpi$. Soit ℓ un nombre premier différent de p. On fixe un caractère additif non trivial $\psi:k\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$, où $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. On notera Ψ le caractère de F_ϖ défini par $\Psi(x)=\psi(\mathrm{res}(x\,\mathrm{d}\varpi))$.

On note N_r le sous-schéma en groupe de GL_r formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes et T_r celui formé des matrices diagonales. On note S_r l'espace affine des matrices symétriques de taille r et $\mathbf{gl}_r$ l'espace affine des matrices de taille r.

Pour tout $\alpha=(\alpha_1,\dots\alpha_{r-1})\in(k^*)^{r-1}$, on définit le caractère θ_α de $N_r(F_\varpi)$ par $\theta_\alpha(n)=\Psi(\frac12\sum_{i=1}^{r-1}\alpha_in_{i,i+1})$. La restriction de ce caractère à $N_r(\mathcal{O}_\varpi)$ est triviale et induit donc une fonction θ_α sur $N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$.

Pour toute matrice diagonale $t\in T_r(F_\varpi)$, H. Jacquet ([3] pour GL_2) et Z. Mao ([5] pour r abitraire) introduisent deux intégrales orbitales $I_\varpi(t,\alpha)$ et $J_\varpi(t,\alpha)$. Celles-ci se reécrivent comme des sommes portant sur des ensembles finis (cf. [6]) et c'est sous cette forme qu'on va rappeler leur définition.

Soit $X_\varpi(t)(k)=\{n\in N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi)|^t ntn\in S_r(\mathcal{O}_\varpi)\}$. L'intégrale $I_\varpi(t,\alpha)$ est définie par $I_\varpi(t,\alpha)=\sum_{n\in X_\varpi(t)(k)}\theta_\alpha^2(n)$.

Pour définir l'intégrale $J_\varpi(t,\alpha)$ on utilise un scindage de l'extension métaplectique (cf. [4]) $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_\varpi)$ de $\mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$. On écrit $g\mapsto(g,\kappa_\varpi(g))$ ce scindage (avec les notations de [4]).

Soit $Y_\varpi(t)(k)=\{(n,n')\in(N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi))^2|^t ntn'\in\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)\}$. Soit $\bar\alpha=(\alpha_{r-1},\dots,\alpha_1)$. L'intégrale $J_\varpi(t,\alpha)$ est définie par $J_\varpi(t,\alpha)=\sum_{(n,n')\in Y_\varpi(t)(k)}\kappa_\varpi(w_0{}^t ntn')\theta'_\alpha(w_0{}^t nw_0)\theta''_\alpha(n')$, où w_0 est une matrice de la permutation $(r,r-1,\dots,1)$. En faisant le changement de variables consistant à remplacer n par $w_0{}^t n^{-1}w_0$, on retrouve l'intégrale $J_\varpi(t,\alpha)$ originale de Mao (cf. [5]).

Pour tout $t=\mathrm{diag}(t_1,t_2,\dots,t_r)$, on note $a_i=\prod_{j=1}^i t_j$. Donc pour que $X_\varpi(t)(k)$ et $Y_\varpi(t)(k)$ soient non vides, il faut que $a_1,\dots,a_{r-1}$ appartiennent à $\mathcal{O}_\varpi$ et a_r à $\mathcal{O}_\varpi^*$.

Soit $\zeta:k^*\to\{\pm1\}$ le caractère quadratique non trivial ($\zeta(\lambda)=\lambda^{\frac{q-1}{2}}$, $\lambda\in k^*$). On note $\gamma_\varpi(.,.)$ la constante de Weil.

Théorème 1. *Pour tout $t=\mathrm{diag}(a_1,a_1^{-1}a_2,\dots,a_{r-1}^{-1}a_r)$, on a $J_\varpi(t,\alpha)=\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{t}_\varpi(t,\alpha)I_\varpi(t,\alpha)\\ \mathbf{t}'_\varpi(t,\alpha)I_\varpi(t,\alpha)\end{smallmatrix}\right.$ où $\mathbf{t}_\varpi(t,\alpha)=|\prod_{i=1}^{r-1}a_i|^{-1/2}\times\zeta(-1)^{\sum_{j\not\equiv r(\mathrm{mod}\,2)}v_\varpi(a_j)}\prod_{j\not\equiv r(\mathrm{mod}\,2)}\gamma_\varpi(a_ja_{j-1}^{-1},\Psi)$, et où $\mathbf{t}'_\varpi(t,\alpha)=|\prod_{i=1}^{r-1}a_i|^{-1/2}\zeta(-1)^{\sum_{j\equiv r(\mathrm{mod}\,2)}v_\varpi(a_j)}\prod_{j\equiv r(\mathrm{mod}\,2)}\gamma_\varpi(a_ja_{j-1}^{-1},\Psi)$ (en convenant que $a_0=1$). De plus si $\mathbf{t}_\varpi(t,\alpha)\neq\mathbf{t}'_\varpi(t,\alpha)$, les deux intégrales I_ϖ et J_ϖ sont nulles.*

Mao a conjecturé ces formules pour tous les corps locaux non-archimédiens et elles ont été démontrées pour $r=2$ par Jacquet (voir [3]) et pour $r=3$ par Mao (voir [5]) (la formule de [5] $\mu(a,b,c)=|a|^{-1}|b|^{-1/2}\gamma(a,\psi)\gamma(-c,\psi)$ doit en fait être corrigée en $\mu(a,b,c)=|a|^{-1}|b|^{-1/2}\gamma(-a,\psi)\gamma(c,\psi)$, comme on le voit en la comparant avec la formule de Jacquet [3] pour GL_2).

2. Interprétation cohomologique

Les ensembles $X_\varpi(t)(k)$ et $Y_\varpi(t)(k)$ sont de manière naturelle des ensembles de points à valeurs dans k de variétés algébriques $X_\varpi(t)$ et $Y_\varpi(t)$ de type fini sur k. Ces variétés sont munies d'un morphisme $h_{\varpi,X}:X_\varpi(t)\to\mathbb{G}_a$ défini par

$h_{\varpi,X}(n) = \mathrm{res}(\sum_{i=1}^{r-1}\alpha_i n_{i,i+1}\,\mathrm{d}\varpi)$ et d'un morphisme $h_{\varpi,Y} : Y_\varpi(t) \to \mathbb{G}_a$ défini par $h_{\varpi,Y}(n,n') = \mathrm{res}(\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{2}\alpha_i(n_{i,i+1} + n'_{i,i+1})\,\mathrm{d}\varpi)$.

Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. On note $\overline{X}_\varpi(t) = X_\varpi(t) \otimes_k \bar{k}$ et $\mathcal{L}_\psi$ le faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{G}_a$ associé au caractère ψ. D'après la formule des traces de Grothendieck–Lefschetz, on a $I_\varpi(t) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma_c(\overline{X}_\varpi(t), h^*_{\varpi,X}\mathcal{L}_\psi))$.

Pour interpréter cohomologiquement l'intégrale J_ϖ, la construction de Kazhdan–Patterson (voir [4]) n'est pas commode. On a donc adopté un point de vue plus géométrique.

Arbarello, De Concini et Kac associent à chaque $g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ une droite (cf. [1])

$$D_g = \left(\bigwedge g\mathcal{O}^r_\varpi / g\mathcal{O}^r_\varpi \cap \mathcal{O}^r_\varpi\right) \otimes \left(\bigwedge \mathcal{O}^r_\varpi / g\mathcal{O}^r_\varpi \cap \mathcal{O}^r_\varpi\right)^{\otimes(-1)}$$

où $\bigwedge V$ désigne la puissance extérieure maximale $\bigwedge^{\dim V} V$ d'un k-espace vectoriel V. Cette construction fournit une extension centrale $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,ACK}(F_\varpi)$ de $\mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ par k^*. On utilisera plutôt la droite $\Delta_g = D_{\det(g)} \otimes D_g^{\otimes -1}$, ce qui revient à considérer l'extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi) = \det^*(\widetilde{\mathrm{GL}}_{1,ACK}(F_\varpi)) - \widetilde{\mathrm{GL}}_{r,ACK}(F_\varpi)$ (la somme des extensions étant ici notée additivement). On construit, à l'aide de la décomposition de Bruhat, une base $\delta(g)$ de $\Delta(g)$, ce qui fournit une section δ de $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi)$.

Proposition 1. *On a $\sigma(g_1,g_2) = \zeta(\frac{\delta(g_1)\delta(g_2)}{\delta(g_1g_2)})$, où σ est le 2-cocycle de Kazhdan–Patterson [4]. En particulier, l'extension de Kazhdan–Patterson s'obtient à partir de notre extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi)$ en la poussant par $\zeta : k^* \to \{\pm 1\}$.*

La fonction κ_ϖ est le quotient triv/δ de la section obtenue trivialement pour $g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$ par la section δ. On obtient de cette manière un morphisme $\kappa_\varpi : Y_\varpi(t) \to \mathbb{G}_m$.

On note $\overline{Y}_\varpi(t) = Y_\varpi(t) \otimes_k \bar{k}$. Soit $\mathcal{L}_\zeta$ le faisceau de Kummer sur $\mathbb{G}_m$ associé au revêtement $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $x \mapsto x^2$ et au caractère non trivial de $\{\pm 1\}$. Il résulte de la formule des traces de Grothendieck–Lefschetz que $J_\varpi(t) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma_c(\overline{Y}_\varpi(t), h^*_{\varpi,Y}\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa^*_\varpi\mathcal{L}_\zeta))$. Le Théorème 1 est alors une conséquence de l'énoncé géométrique suivant où on note $\mathcal{I}_\varpi(t) = \Gamma_c(\overline{X}_\varpi(t), h^*_{\varpi,X}\mathcal{L}_\psi)$ et $\mathcal{J}_\varpi(t) = \mathrm{R}\Gamma_c(\overline{Y}_\varpi(t), h^*_{\varpi,Y}\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa^*_\varpi\mathcal{L}_\zeta)$.

Théorème 2. *$\mathcal{J}_\varpi(t) \simeq \mathcal{T}_\varpi(t) \otimes \mathcal{I}_\varpi(t) \simeq \mathcal{T}'_\varpi(t) \otimes \mathcal{I}_\varpi(t)$, où $\mathcal{T}_\varpi(t)$ et $\mathcal{T}'_\varpi(t)$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de rang 1 placés en degré $v_\varpi(\prod_{i=1}^{r-1} a_i)$ tels que $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathcal{T}_\varpi(t)) = \mathbf{t}_\varpi(t,\alpha)$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathcal{T}'_\varpi(t)) = \mathbf{t}'_\varpi(t,\alpha)$.*

Pour démontrer le Théorème 2, on commence par prouver directement le cas particulier où $r = 2$ et $t = \mathrm{diag}(t_1,t_2)$ avec $v_\varpi(t_1) = 1$, $v_\varpi(t_2) = -1$. Plus précisément on a :

Proposition 2. *Le Théorème 2 est vrai dans le cas particulier ci-dessus ; de plus $\mathcal{I}_\varpi(t)$ et $\mathcal{J}_\varpi(t)$ sont alors des $\overline{\mathbb{Q}}^*_\ell$-espaces vectoriels de rang 2 placés respectivement en degré 0 et 1.*

La démonstration de cette proposition est en fait une géométrisation de l'argument de Jacquet [2, p. 145].

Dans le cas général, on ne connaît pas explicitement $\mathrm{R}\Gamma_c(\overline{X}_\varpi(t), h^*_{\varpi,X}\mathcal{L}_\psi)$ (resp. $\mathrm{R}\Gamma_c(\overline{Y}_\varpi(t), h^*_{\varpi,Y}\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa^*_\varpi\mathcal{L}_\zeta)$) car la variété $\overline{X}_\varpi(t)$ (resp. $\overline{Y}_\varpi(t)$) est trop compliquée.

3. Sommes globales

Suivant l'idée de B.C. Ngo [6], on va utiliser une méthode de déformation en considérant plutôt des sommes sur un corps global de caractéristique positive. Soient $\mathcal{O} = k[\varpi]$ l'anneau des polynômes en une variable ϖ à coefficients dans k, et F son corps des fractions. Soient $a_1,\dots,a_r \in F$ tels que $\mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^{r-1} a_i, a_r) = 1$ et $\alpha \in (k^*)^{r-1}$.

Pour toute place $v \nmid a_r$, on note $\mathcal{O}_v$ le complété de $\mathcal{O}$ en v, F_v son corps des fractions, et k_v son corps résiduel. Pour $t = \mathrm{diag}(a_1, a_2/a_1, \dots, a_r/a_{r-1}) \in T_r(\mathcal{O}_v)$, on peut définir un couple $(X_v(t), h_{v,X})$ (resp. un triple $(Y_v(t), h_{v,Y}, \kappa_v)$) comme on l'a fait ci-dessus, simplement en remplaçant F_ϖ par F_v, $\mathcal{O}_\varpi$ par $\mathcal{O}_v$ et le résidu en ϖ par le résidu en v (on prend comme forme différentielle la forme méromorphe $\mathrm{d}\varpi$ sur $\mathbb{P}^1 \supset \mathrm{Spec}(k[\varpi]) = \mathbb{A}^1$). On introduit deux variétés de type fini sur k : $X(t) = \prod_{v\nmid a_r, v\neq\infty} \mathrm{Res}_{k_v/k} X_v(t)$ et $Y(t) = \prod_{v\nmid a_r, v\neq\infty} \mathrm{Res}_{k_v/k} Y_v(t)$, où Res est la restriction de Weil. Les variétés $X(t)$ et $Y(t)$ sont munies de morphismes

$$h_X(t,\alpha) : X(t) \to \mathbb{G}_a, \qquad h_X(t,\alpha)(n) = \sum_{v\nmid a_r, v\neq\infty} \sum_{i=1}^{r-1} tr_{k_v/k} h_{\alpha,v,X}(n),$$

$$h_Y(t,\alpha) : Y(t) \to \mathbb{G}_a, \qquad h_Y(n,n') = \sum_{v\nmid a_r, v\neq\infty} \sum_{i=1}^{r-1} tr_{k_v/k} h_{\alpha,v,Y}(n,n'),$$

$$\kappa(t) : Y(t) \to \mathbb{G}_m, \qquad \kappa(g) = \prod_{v\nmid a_r, v\neq\infty} N_{k_v/k}\kappa_v(g).$$

En notant $\bar{\bullet} = \bullet \otimes \bar{k}$, on a la formule de multiplicativité cohomologique :

Proposition 3.

$$\mathrm{R}\Gamma_c\big(\overline{X}(t), h_X^*\mathcal{L}_\psi\big) = \bigotimes_{\lambda \in supp(t)} \mathrm{R}\Gamma_c\big(\overline{X}_{\varpi-\lambda}(t), h_{\varpi-\lambda,X}^*\mathcal{L}_\psi\big),$$

$$\mathrm{R}\Gamma_c\big(\overline{Y}(t), h_Y^*\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa^*\mathcal{L}_\zeta\big) = \bigotimes_{\lambda \in supp(t)} \mathrm{R}\Gamma_c\big(\overline{Y}_{\varpi-\lambda}(t), h_{\varpi-\lambda,Y}^*\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa_{\varpi-\lambda}^*\mathcal{L}_\zeta\big),$$

où $supp(t)$ est l'ensemble des racines de $\prod_{i=1}^{r-1} a_i$ dans $\bar{k}$.

Soient Q_{d_i} la variété affine sur k des polynômes unitaires de degré d_i et $V_{\underline{d}} = \{(a_1,\dots,a_r) \in \prod_{i=1}^r Q_{d_i} \mid \mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^{r-1} a_i, a_r) = 1\}$ avec $\underline{d} = (d_1,\dots,d_r)$. Soit $t = \mathrm{diag}(a_1, a_2/a_1, \dots, a_r/a_{r-1})$ tel que $(a_1,\dots,a_r) \in V_{\underline{d}}$. Le couple $(X(t), h_X)$ et le triple $(Y(t), h_Y, \kappa)$ se mettent en famille de sorte qu'on obtient des variétés $X_{\underline{d}}$ et $Y_{\underline{d}}$ de type fini sur k munies de morphismes $f_{\underline{d}}^X : X_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to V_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$, $f_{\underline{d}}^Y : Y_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to V_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$, $h_{X,\underline{d}} : X_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$, $h_{Y,\underline{d}} : Y_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$ et $\kappa_{\underline{d}} : Y_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_m$ tels que $X(t)$ et $\mathrm{R}\Gamma_c(X(t), h_X^*\mathcal{L}_\psi)$ (resp. $Y(t)$ et $\mathrm{R}\Gamma_c(Y(t), h_Y^*\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa^*\mathcal{L}_\zeta)$) sont respectivement les fibres en (t,α) de $f_{\underline{d}}^X$ et de $\mathrm{R}f_{\underline{d},!}^X h_{X,\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi$ (resp. de $f_{\underline{d}}^Y$ et de $\mathrm{R}f_{\underline{d},!}^Y(h_{X,\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa_{\underline{d}}^*\mathcal{L}_\zeta)$).

4. Le cas $\underline{d} = (1, 2, \dots, r)$

On pose $\underline{d} = (1, 2, \dots, r)$. Soit $U_{\underline{d}}$ l'ouvert de $\prod_{i=1}^r Q_i \times (\mathbb{G}_m)^{r-1}$ formé des couples (t,α) tels que le polynôme $\prod_{i=1}^r a_i$ n'ait pas de racines multiples. On note $\mathrm{result}(P, Q)$ le résultant de deux polynômes P et Q.

Proposition 4. *La restriction à $U_{\underline{d}}$ du complexe $\mathcal{I} = \mathrm{R}f_{\underline{d},!}^X h_{X,\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi$ (resp. $\mathcal{J} = \mathrm{R}f_{\underline{d},!}^Y(h_{Y,\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa_{\underline{d}}^*\mathcal{L}_\zeta)$) est un système local de rang $2^{\frac{r(r-1)}{2}}$ placé en degré 0 (resp. placé en degré $\frac{r(r-1)}{2}$). De plus $\mathcal{J}_{|U_{\underline{d}}} = \mathcal{T} \otimes \mathcal{I}_{|U_{\underline{d}}}$, où $\mathcal{T}$ est un système local de rang 1 placé en degré $\frac{r(r-1)}{2}$ au-dessus de $U_{\underline{d}}$, géométriquement constant et provenant d'un caractère τ de $\mathrm{Gal}_{\bar{k}/k}$ tel que $\tau(\mathrm{Fr}_q) = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \zeta(-1)^{[\frac{r^2}{4}]} q^{\frac{r(r-1)}{4}} \Delta^{-[\frac{r}{2}]}$, où $\Delta = \gamma_\infty(\varpi, \Psi_\infty)$.*

Ce proposition résulte directement de la propriété muliplicative des sommes globales et de la Proposition 2. La formule de trace pour le facteur de transfert vient du fait que le produit des constantes de Weil en toutes les places du corps global $k[\varpi]$ est trivial (cf. [7]) ce qui (par le théorème de Chebotarev) implique qu'il est géométriquement constant. On prolonge alors de manière évidente $\mathcal{T}$ à $V_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$.

Théorème 3. $\mathrm{R}f_{\underline{d},!}^Y(h_{Y,\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa_{\underline{d}}^*\mathcal{L}_\zeta) = \mathcal{T} \otimes \mathrm{R}f_{\underline{d},!}^X h_{X,\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi$. *Les deux membres de cette égalité sont, à décalage près, des faisceaux pervers isomorphes au prolongement intermédiaire de leur restriction à $U_{\underline{d}}$.*

Ceci résulte de la Proposition 4 et du théorème suivant :

Théorème 4.

1. *Le complexe de faisceaux $\mathrm{R}f_{\underline{d},!}^X h_{X,\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi[\frac{r(r+1)}{2} + r - 1]$ est un faisceau pervers, prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $U_{\underline{d}}$.*
2. *Le complexe de faisceaux $\mathrm{R}f_{\underline{d},!}^Y(h_{Y,\underline{d}}^*\mathcal{L}_\psi \otimes \kappa_{\underline{d}}^*\mathcal{L}_\zeta)[r^2 + r - 1]$ est un faisceau pervers, prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $U_{\underline{d}}$.*

Pour démontrer le Théorème 4, on va utiliser l'argument de B.C. Ngo ([6], « le pas de récurence », pg. 515). La difficulté ici est le manque d'équivariance de la fonction κ. Pour résoudre cette difficulté, le point crucial est le théorème suivant :

Théorème 5. *$\kappa(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r))$ est en fait un polynôme en les coefficients de la matrice $y \in \mathbf{gl}_r$. De plus on a : $\kappa(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r))\kappa(w_0{}^t(y + \varpi \mathrm{Id}_r)) = \mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y))$, où $a_i(y) = \det(s_i(y) + \varpi \mathrm{Id}_i)$, $s_i(y)$ étant la sous-matrice faite des i permières lignes et des i permières colonnes de y.*

La démonstration de ce théorème repose sur la vision géométrique de l'extension de Kazhdan–Patterson évoquée dans le paragraphe 2. Ce théorème implique que $\kappa(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r)$ est alors un produit de facteurs irréductibles de $\mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y))$. En faisant agit $g \in \mathrm{GL}_{r-1}$ par $y \mapsto \mathrm{diag}(g,1)^{-1} y \mathrm{diag}(g,1)$, g transforme alors κ en la multipliant par une puissance de $\det(g)$; l'extension G_{r-1} de GL_{r-1} obtenue en extrayant une racine carrée de $\det(g)$ laisse alors invariant le faisceau $\kappa^*\mathcal{L}_\zeta$ et l'argument de loc. cit. s'adapte alors en remplaçant GL_i par l'extension G_i (le plongement $G_i \hookrightarrow G_{i+1}$ est fournit aussi par $g \mapsto \mathrm{diag}(g,1)$ puisque les deux ont même déterminant).

Le point (1) du Théorème 4 s'obtient assez facilement par l'argument de [6] en remplaçant cette fois GL_i par le groupe orthogonal associé à la forme quadratique $q(x_1,\dots,x_i) = \sum_{j=1}^i x_j^2$.

5. L'énoncé local résulte de l'énoncé global

Proposition 5. *Le Théorème* 3 *entraîne le Théorème* 2.

Soient $v \in \mathbb{A}^1(k)$, $t' = \mathrm{diag}(t_1,\dots,t_s) \in T_s(F_v)$. D'après ([6], Prop. 3.5.1, p. 505), pour r assez grand, il existe $t^\circ = \mathrm{diag}(a_1^\circ, a_2^\circ/a_1^\circ, \dots, a_r^\circ/a_{r-1}^\circ)$, avec $(a_1^\circ,\dots,a_r^\circ) \in V_{(1,2,\dots,r)}(k)$ tel que $\mathcal{I}_v(t^\circ) \simeq \mathcal{I}_v(t')$ et $\mathcal{J}_v(t^\circ) \simeq \mathcal{J}_v(t')$. On a $a_i^\circ = a'^\circ_i a''^\circ_i$, où a'°_i est à racines simples premières à v et où a''°_i a toutes ses racines en v. Soient alors $\underline{d}' = (\deg(a'^\circ_i))_i$ et $\underline{d}'' = (\deg(a''^\circ_i))_i$. On fait varié $(a'_i)_i$ et $(a''_i)_i$ en introduisant l'ouvert $(V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}$ de $V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''}$ au-dessus duquel $\mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^r a'_i, \prod_{i=1}^r a''_i) = 1$ et les a'_i sont à racines simples. On a alors un morphisme étale $\mu : (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}} \to V_{\underline{d}}$.

On généralise les sommes globales du paragraphe 3 en introduisant

$$X'(t) = \prod_{w \mid a'_1 \dots a'_{r-1}} \mathrm{Res}_{k_w/k} X_w(t) \quad \text{et} \quad X''(t) = \prod_{w \mid a''_1 \dots a''_{r-1}} \mathrm{Res}_{k_w/k} X_w(t)$$

($Y'(t)$ et $Y''(t)$ sont définies par des formules analogues). Comme dans le paragraphe 3, celles-ci se mettent en familles. On définit de cette manière des complexes $\mathcal{I}', \mathcal{I}'', \mathcal{J}'$ et $\mathcal{J}''$ vérifiant $\mu^*\mathcal{I} = \mathcal{I}' \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{I}''$ et $\mu^*\mathcal{J} = \mathcal{J}' \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{J}''$. En fait $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{J}'$ sont des systèmes locaux. En utilisant le fait que la perversité et le prolongement intermédiaire sont stables par changement de base étale et que le produit tensoriel d'un complexe avec un système local est pervers et prolongement intermédiaire de sa restriction à un ouvert si et seulement si ce complexe l'est déjà, on obtient que $\mathcal{I}''$ et $\mathcal{J}''$ sont pervers et prolongement intermédiaire de leur restriction à l'ouvert $\mu^* U_{\underline{d}}$.

Le système local $\mathcal{T}$ s'écrit lui aussi comme un produit $\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}''$ ($\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ ne sont plus géométriquement constants, la définition de $\mathcal{T}'$ ne pose pas de problème, on définit en fait $\mathcal{T}'' = \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'^{\otimes -1}$ et la formule du produit pour les constantes de Weil permet de calculer $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_t, \mathrm{T}''))$. En spécialisant en $t = t^\circ$ on obtient alors le Théorème 2.

Références

[1] E. Arbarello, C. De Concini, V.G. Kac, The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves, in: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 49, 1989, pp. 171–190.
[2] H. Jacquet, On the non vanishing of some L-functions, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 97 (1987) 117–155.
[3] H. Jacquet, Représentations distinguées pour le groupe orthogonal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 312 (1991) 957–961.
[4] D. Kazhdan, S. Patterson, Metaplectic form, Publ. Math. IHES 59 (1982) 35–142.
[5] Z. Mao, A fundamental lemma for metaplectic correspondence, J. Reine Angew. Math. 496 (1998) 107–129.
[6] B.C. Ngo, Le lemme fondamental de Jacquet et Ye en caractéristique positive, Duke Math. J. 96 (3) (1999) 473–520.
[7] A. Weil, Sur certain groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. 111 (1964) 143–211.