C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 943–946

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Hypertranscendance de fonctions de Mahler du premier ordre

Hypertranscendency of first order Mahler functions

Pierre Nguyen

Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75252 Paris, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 24 juillet 2011
Accepté après révision le 30 août 2011
Disponible sur Internet le 15 septembre 2011

Présenté par Jean-Pierre Serre

RÉSUMÉ

Soit K un corps équipé d'un endomorphisme σ. Dans cette Note, nous utilisons la théorie de Galois aux différences pour donner un critère d'indépendance algébrique pour les solutions de σ-équations du premier ordre. Ce résultat nous permet de caractériser les solutions hyperalgébriques de ces σ-équations lorsque K est muni d'une dérivation Δ telle que $\Delta \circ \sigma = p\sigma \circ \Delta$, où p est une (σ, Δ)-constante qui n'est pas une racine de l'unité. Nous en déduisons, dans le cas de l'opérateur de Mahler, une preuve galoisienne d'un théorème d'hypertranscendance de Ke. Nishioka.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

Let K be a field equipped with an endomorphism σ. In this Note, we use difference Galois theory to give an algebraic independence criterion for solutions of first order σ-equations. This result allows us to characterize the hyperalgebraic solutions of such σ-equations when K is endowed with a derivation Δ such that $\Delta \circ \sigma = p\sigma \circ \Delta$, where p is a (σ, Δ)-constant which is not a root of unity. We deduce from this theorem, in the setting of the Mahler operator, a galoisian proof of a hypertranscendency theorem of Ke. Nishioka.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Énoncé des résultats

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et K une extension de k, équipée d'un endomorphisme σ et d'une dérivation Δ. On suppose que les corps des σ-constantes et des Δ-constantes de K coïncident avec k et que $\Delta \circ \sigma = p\sigma \circ \Delta$, où p est un élément d'ordre infini de $k^\times$. Le résultat principal de cette note est le théorème suivant, qui précise dans ce cadre la Proposition 3.8 de [4] (voir aussi [5, Theorem 1.2], [4, Proposition 3.10]).

Théorème 1.1. *Soient $a, b \in K$, $a \neq 0$. Soit R un σ-anneau contenant K, équipé d'une dérivation Δ étendant celle de K telle qu'on ait toujours $\Delta \circ \sigma = p\sigma \circ \Delta$, et soit y un élément de R tel que $\sigma y = ay + b$. On suppose que b n'est pas de la forme $\sigma u - au$, $u \in K$ et que y est hyperalgébrique sur K.*

(i) *S'il existe $c \in k^\times$ et $u \in K^\times$ tels que $a = c\sigma u/u$, alors il existe un élément v de K et un entier $i \geqslant 1$ tels que $\Delta^i(b/\sigma u) = p^i \sigma v - cv$.*
(ii) *Dans le cas contraire, il existe un entier $i \geqslant 0$ et un élément w de K tels que $\Delta^i(\Delta a/a) = p^{i+1}\sigma w - w$.*

Adresse e-mail : pierre@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2011.08.021

Notre démonstration, qui s'inspire des méthodes de [3], consiste à étudier le radical unipotent du groupe de Galois du système aux σ-différences que vérifient les dérivées successives de y relativement à Δ. Nous n'utilisons donc pas les groupes algébro-différentiels de [4]. Par rapport à [4], la précision obtenue sur l'opérateur différentiel de la conclusion (un monôme) provient de la semi-commutativité de σ et Δ. La preuve du théorème 1.1, qui fait l'objet du §3, repose sur un critère d'indépendance algébrique, établi au §2, qui généralise un théorème de Kubota [6, Theorem 2].

Dans le §4, nous étudions le cas de l'opérateur de Mahler : soit p un entier >1 ; on appelle opérateur de Mahler l'endomorphisme $[p]$ du corps $K = k(x)$ défini par la relation $[p]f(x) = f(x^p)$ pour tout f dans K. La dérivation $\Delta = x\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ de K vérifie $\Delta \circ [p] = p[p] \circ \Delta$. Le théorème 1.1 fournit alors une preuve galoisienne du théorème suivant, établi par Ke. Nishioka dans [7, Theorem 3] par des méthodes d'algèbre commutative. Elle généralise la preuve proposée par M. Singer dans une correspondance avec C. Hardouin pour l'équation $[p]y = y - x$.

Théorème 1.2. *Soient $a, b \in k(x) = K$, $a \neq 0$. Soit R un $[p]$-anneau contenant K, équipé d'une dérivation Δ étendant celle de K telle qu'on ait toujours $\Delta \circ [p] = p[p] \circ \Delta$, et soit y un élément de R tel que $[p]y = ay + b$. Si y est hyperalgébrique sur K alors l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) *a n'est pas de la forme $[p]u/u$ avec $u \in K^\times$, et il existe $v \in K$ tel que $b = [p]v - av$;*
(2) *a est de la forme $[p]u/u$ avec $u \in K^\times$, et il existe $v \in K$, $\gamma \in k$, tels que $b = [p]v - av + \gamma[p]u$.*

Réciproquement, si $R^{[p]} = k$, chacune de ces conditions entraîne l'hyperalgébricité de y sur K.

2. Modules aux σ-différences et σ-extensions

Soit F un corps équipé d'un endomorphisme σ. On note $k = F^\sigma = \{x \in F, \sigma(x) = x\}$ le corps des σ-constantes de F, qu'on suppose algébriquement clos et de caractéristique nulle. Un σ-module de rang r sur F est un F-espace vectoriel M de dimension r muni d'un homomorphisme de groupes injectif $\phi : M \to M$ tel que $\phi(f.m) = \sigma(f)\phi(m)$ pour tout $f \in F$ et tout $m \in M$. On désigne par $\mathcal{P}_F$ le groupe des classes d'isomorphisme de σ-modules de rang 1 sur F et, pour a dans $F^\times$, par L_a l'élément de $\mathcal{P}_F$ correspondant à l'équation $\sigma y = ay$.

Soit $\widehat{F}$ la clôture inversive de F (voir [2, Chapter 4]). Par définition, le prolongement canonique de σ à $\widehat{F}$ est un automorphisme et $F^\sigma = \widehat{F}^\sigma$. Le passage de F à $\widehat{F}$ permet donc d'utiliser la théorie de Picard–Vessiot usuelle comme dans [9, Theorem 1.29] (voir aussi [10, Theorem 3.10.7]) et de parler des groupes de Galois des σ-modules étudiés, c'est-à-dire du groupe de Galois aux différences du système associé sur $\widehat{F}$.

Soit $a \in F^\times$. Une extension M de L_1 par L_a (sur F) est une suite exacte $0 \to L_a \to M \to L_1 \to 0$ dans la catégorie des σ-modules sur F. L'ensemble $\mathrm{Ext}_F(L_1, L_a)$ des classes d'isomorphisme d'extensions de L_1 par L_a est naturellement muni d'une structure de k-module. Si $\omega : L_{a_1} \to L_{a_2}$ est un morphisme de σ-modules sur F, ω induit une application k-linéaire ω_* de $\mathrm{Ext}_F(L_1, L_{a_1})$ vers $\mathrm{Ext}_F(L_1, L_{a_2})$. On montre que les applications naturelles $\mathcal{P}_F \to \mathcal{P}_{\widehat{F}}$ et $\mathrm{Ext}_F(L_1, L_a) \to \mathrm{Ext}_{\widehat{F}}(L_1, L_a)$ sont injectives, et on a :

Théorème 2.1. *Soient $n \geqslant 1$, $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $F^\times$, et (pour $i = 1, \ldots, n$) E_i un élément de $\mathrm{Ext}_F(L_1, L_{a_i})$. On suppose que le radical unipotent du groupe de Galois du σ-module $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ est de dimension $< n$. Alors il existe un élément a de $F^\times$, une partie non vide I de $[\![1, n]\!]$ et, pour tout $i \in I$, un isomorphisme $\omega_i : L_{a_i} \to L_a$ tels que les extensions $(\omega_i)_*(E_i)$ soient k-linéairement dépendantes dans $\mathrm{Ext}_F(L_1, L_a)$.*

Preuve. Il existe des éléments b_i de F tels que le groupe de Galois aux différences G de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ coïncide avec celui du système aux σ-différences, de rang $n+1$, de matrice

$$\begin{pmatrix} a_n & \ldots & 0 & b_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & a_1 & b_1 \\ 0 & & \ldots & 1 \end{pmatrix} =: \mathfrak{A}(a_n, \ldots, a_1; b_n, \ldots, b_1).$$

Notons $\widehat{F}_a[y]$ l'anneau de Picard–Vessiot de ce système, où $\widehat{F}_a$ désigne l'anneau de Picard–Vessiot du système semi-simple de rang n associé, dont on note V l'espace des solutions, de sorte que $G \simeq \mathrm{Aut}_\sigma(\widehat{F}_a[y]/\widehat{F})$. Soient H le fixateur de $\widehat{F}_a$ dans G (qui en est le radical unipotent) et $J = \mathrm{Aut}_\sigma(\widehat{F}_a/\widehat{F}) \simeq G/H$. Le groupe G admet une représentation matricielle de la forme $g \mapsto \mathfrak{A}(\chi_{a_n}(g), \ldots, \chi_{a_1}(g); \beta_n(g), \ldots, \beta_1(g))$, avec $\chi_{a_i}(g) = g(\alpha_i)/\alpha_i$, où α_i est une solution fondamentale dans $\widehat{F}_a$ de l'équation $\sigma y = a_i y$, et $\beta_i(g) = (g(y_i) - y_i)/\alpha_i$, où y_i est une solution dans $\widehat{F}_a[y]$ de l'équation $\sigma y - a_i y = b_i$. Soit $\beta : H \to \mathbb{G}_a^n(k) \simeq V$ la restriction à H de l'application $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$; elle identifie H avec un sous-groupe algébrique de V. La relation $\beta_i(gg'g^{-1}) = \chi_{a_i}(g)\beta_i(g')$, valable pour tout $g' \in H$, $g \in G$, montre que J agit sur H au travers des caractères χ_{a_i}. L'ensemble $\beta(H)$ est donc un k-sous-espace vectoriel de V qui est J-invariant. Par hypothèse, $\beta(H)$ n'est pas $V \simeq \mathbb{G}_a^n(k)$ tout entier, il provient donc d'un sous-σ-module strict M de $L_{a_1} \oplus \cdots \oplus L_{a_n}$. Comme les caractères χ_{a_1} et χ_{a_2} sont égaux si et seulement si les classes L_{a_1} et L_{a_2} sont égales, la théorie des représentations des tores montre alors que M se projette sur un sous-σ-module strict M' d'une somme directe $\oplus_{i\in I} L_{a_i}$ dont toutes les composantes sont isomorphes à un même élément L_a de $\mathcal{P}_F$. On est ainsi ramené au cas d'un sous-σ-module strict de $L_a \oplus \cdots \oplus L_a$, dont une équation non triviale donne la relation de dépendance linéaire à coefficients dans $k = \mathrm{End}_\sigma(L_a)$ recherchée. $\square$

3. Preuve du théorème 1.1

Dans le premier cas, $\sigma(y/u) = c(y/u) + b/\sigma u$, d'où $\sigma(\Delta^i(y/u)) - (c/p^i)\Delta^i(y/u) = \Delta^i(b/\sigma u)/p^i$ pour tout entier $i \geqslant 0$, puisque $\Delta \circ \sigma = p\sigma \circ \Delta$. Ainsi, les dérivées $\Delta^i(y/u)$ donnent lieu à des extensions de L_1 par L_{c/p^i}, paramétrées par les éléments $b_i = \Delta^i(b/\sigma u)/p^i$ de K. Comme p est par hypothèse d'ordre infini dans $k^\times$, les classes $L_{c/p^i}, i \geqslant 0$ sont deux à deux non isomorphes. Le théorème 2.1 entraîne donc, sous l'hypothèse que y soit hyperalgébrique sur K, que l'une de ces extensions est triviale, ce qui donne le conclusion souhaitée.

Traitons maintenant le second cas. Soit n un entier $\geqslant 1$ tel que les éléments $y, \Delta y, \ldots, \Delta^n y$ soient algébriquement dépendants sur K. Considérons tout d'abord le système de rang $n+1$ suivant :

$$\sigma\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/p^n & C_n^1 \Delta a/p^n & \ldots & & C_n^n \Delta^n a/p^n \\ 0 & a/p^{n-1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & a/p & \Delta a/p \\ 0 & \ldots & & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}. \qquad (\Sigma')$$

Soit $\widehat{K}(l)$ l'extension de Picard–Vessiot du σ-module L_p (qui est un corps car L_p est d'ordre infini dans $\mathcal{P}_K$) et soit α une solution fondamentale de l'équation $\sigma y = ay$ dans son anneau de Picard–Vessiot $\widehat{K}(l)_a = \widehat{K}(l)[\alpha, 1/\alpha]$. On note symboliquement $\widehat{K}_{\Sigma'} = \widehat{K}(l)_a[\Delta\alpha, \ldots, \Delta^n\alpha]$ l'anneau de Picard–Vessiot du système (Σ'). L'espace V des solutions de (Σ') est muni d'une filtration naturelle $V^{(-1)} = \{0\} \subseteq V^{(0)} \subseteq V^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq V^{(n-1)} \subseteq V^{(n)} = V \simeq k^{n+1}$, où les quotients $V^{(j)}/V^{(j-2)}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ correspondent (après tensorisation par $L_{p^{j-1}/a}$) à des extensions E_{n-j+1} de L_1 par $L_{1/p}$. On a de plus $E_j = jE_1$ dans $\mathrm{Ext}_K(L_1, L_{1/p})$.

La relation $\sigma y = ay + b$ entraîne que $p^j\sigma(\Delta^j y) = \sum_{k=0}^{j} C_j^k \Delta^k a \Delta^{j-k} y + \Delta^j b$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$. Par conséquent, le vecteur $(\Delta^n y, \ldots, \Delta y, y, 1)^t$ et ses translatés par $(v, 0)^t$, $v \in V$, sont solutions d'un système (Σ) de rang $n+2$ dont le groupe de Galois G admet une représentation de la forme

$$G \ni g \mapsto \begin{pmatrix} \chi_{a/p^n}(g) & \kappa_1^{(n)}(g) & \ldots & \kappa_n(g) & \beta_n(g) \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \chi_{a/p}(g) & \kappa_1(g) & \beta_1(g) \\ & & & \chi_a(g) & \beta_0(g) \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

pour une application $\beta := (\beta_n, \ldots, \beta_0)^t : G \to V \simeq k^{n+1}$ et des caractères χ définis comme au §2 (voir [3], [8]). Soient H le groupe des σ-automorphismes de $\widehat{K}_\Sigma$ fixant $\widehat{K}(l)_a$ et N le sous-groupe de G fixant $\widehat{K}_{\Sigma'}$, de sorte que puisque $y, \Delta y, \ldots, \Delta^n y$ sont supposés algébriquement dépendants sur K, la dimension de N est $< n+1$. Avec ces notations, $U := H/N$ est le groupe de Galois de (Σ') sur l'anneau total des fractions de $\widehat{K}(l)_a$. Supposons maintenant que pour tout $i \geqslant 0$, l'équation $\Delta^i(\Delta a/a) = p^{i+1}\sigma w - w$ n'a pas de solution w dans K. Nous allons montrer que la restriction à N de l'application β est alors surjective, ce qui contredira la majoration de $\dim(N)$ obtenue ci-dessus, et fournira la conclusion recherchée. Pour tout entier $i = 0, \ldots, n-1$, on note symboliquement $\Delta^i(\Delta\alpha/\alpha)$ une solution de l'équation $p^{i+1}\sigma y_i - y_i = \Delta^i(\Delta a/a)$ et on pose $a_{i+1} := p^{-(i+1)}\Delta^i(\Delta a/a)$. On vérifie alors que la somme directe de L_a et du σ-module associé au système (S') de matrice $\mathfrak{A}(1/p^n, \ldots, 1/p; a_n, \ldots, a_1)$ admet l'anneau $\widehat{K}_{\Sigma'}$ pour anneau de Picard–Vessiot sur $\widehat{K}(l)$. Ainsi, si on note $g \mapsto \mathfrak{A}(1, \ldots, 1; \kappa_n'(g), \ldots, \kappa_1'(g))$ la représentation de U attachée au système (S'), relevée en une représentation de H, on peut voir N comme l'intersection des noyaux des homomorphismes $\kappa_i' : H \to k$. Puisque L_a et L_p sont par hypothèse multiplicativement indépendants dans $\mathcal{P}_K$, les hypothèses faites sur b et sur les a_i entraînent, d'après le théorème 2.1 appliqué au système de rang $n+2$ de matrice $\mathfrak{A}(1/p^n, \ldots, 1/p, a; a_n, \ldots, a_1, b)$, que l'image de l'homomorphisme de groupes $H \ni g \mapsto (\kappa_n'(g), \ldots, \kappa_1'(g), \beta_0(g))^t$ est k^{n+1} tout entier. Par conséquent, $\beta_0 : \bigcap_{i=1}^n \ker(\kappa_i') = N \to k$ est surjectif. De plus, $\kappa_1(g) = \kappa_1'(g)$ pour tout $g \in H$. Nous sommes alors dans le cadre d'application du lemme élémentaire suivant comme dans [1, Remark 2.3].

Lemme 3.1. *Soient k un corps de caractéristique 0, n un entier $\geqslant 0$ et U un sous-groupe de $GL_{n+1}(k)$ contenant une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & n\kappa & \ldots & * \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \kappa \\ 0 & \ldots & & 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa \in k,\ \kappa \neq 0.$$

Soit $N \subseteq k^{n+1}$ un sous-k-espace vectoriel de k^{n+1} stable sous U tel que la restriction à N de la projection $\pi : (z_n, \dots, z_0)^t \mapsto z_0$ soit surjective. Alors $N = k^{n+1}$.

Le lemme 3.1 s'applique bien à notre situation : $U = H/N$, vu comme sous-groupe de $GL_{n+1}(k)$ au travers de son action sur V, contient une matrice de la forme requise d'après les relations $E_j = jE_1$ qui entraînent que $\kappa_1^{(j)}(g) = j\kappa_1(g)$ pour tout $g \in H$, l'homomorphisme $\beta|_N : N \to V$ est U-équivariant, et N se projette surjectivement sur k via β_0, donc $\beta(N) \simeq k^{n+1}$ d'après le lemme 3.1. Ceci donne la contradiction voulue et achève la preuve du second cas, et du théorème 1.1.

4. Preuve du théorème 1.2

La preuve du théorème 1.2 repose sur le lemme d'intégration suivant :

Lemme 4.1. *Soit p un entier $\geqslant 2$ et $b \in K = k(x)$. On suppose qu'il existe un entier $i \geqslant 1$ tel que $\Delta^i b = p^i[p]v - cv$ avec $v \in K$ et $c \in k^\times$. Alors :*

(a) *si $c \neq 1$, il existe un élément $w \in K$ tel que $b = [p]w - cw$;*
(b) *si $c = 1$, il existe des éléments $w \in K$ et $\gamma \in k$ tels que $b = [p]w - cw + \gamma$.*

Pour établir le lemme 4.1, on note que v est Δ-intégrable si et seulement le résidu de la fraction rationnelle v/x en tout point α de k est nul, ce qui résulte de l'hypothèse, jointe, pour $\alpha \neq 0$, à la formule $\mathrm{Res}_\alpha(v/x) = \mathrm{Res}_\beta(p[p]v/x)$, où β désigne une racine p-ième quelconque de α. En intégrant chacune des conclusions du théorème 1.1 grâce au lemme 4.1, on obtient le théorème 1.2. La preuve des réciproques est banale, et fournit des relations d'hyperalgébricité pour y d'ordre au plus 2.

Références

[1] D. Bertrand, Unipotent radicals of differential Galois group and integrals of solutions of inhomogeneous equations, Math. Ann. 321 (2001) 645–666.
[2] R.M. Cohn, Difference Algebra, Interscience, New York, 1965.
[3] C. Hardouin, Hypertranscendance et groupes de Galois aux différences, arXiv:math/0609646, 2006.
[4] C. Hardouin, M. Singer, Differential Galois theory of linear differential equations, Math. Ann. 342 (2) (2003) 257–276.
[5] K. Ishizaki, Hypertranscendency of meromorphic solutions of a linear functional equation, Aeq. Math. 56 (3) (1998) 271–283.
[6] K.K. Kubota, On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain function equations and their values, Math. Ann. 227 (1977) 9–50.
[7] Ke. Nishioka, A note on differentially algebraic solutions of first order linear difference equations, Aeq. Math. 27 (1984) 32–48.
[8] A. Ovchinnikov, Tannakian approach to linear differential algebraic groups, Transformation Groups 13 (2) (2008) 413–446.
[9] M. Van der Put, M. Singer, Galois Theory of Difference Equations, Lecture Notes in Math., vol. 1666, Springer, 1997.
[10] M. Wibmer, Geometric difference Galois theory, thèse de l'université de Heidelberg, 2010.