C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 337–340

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

# Sur le feuilletage de Lehmann

## *On the Lehmann foliation*

Hamidou Dathe

*Département de mathématiques et informatique, faculté des sciences et techniques, université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal*

INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*
Reçu le 4 août 2010
Accepté après révision le 4 février 2011
Disponible sur Internet le 24 février 2011

Présenté par Étienne Ghys

RÉSUMÉ

On montre que le feuilletage de Lehmann n'admet pas de déformation non nilpotente.



ABSTRACT

We prove that Lehmann's foliation cannot be deformed into a non-nilpotent one.



### Abridged English version

Let $\mathcal{F}$ be a G-Lie foliation of codimension $q$ on a compact manifold $V$. Denote $\omega = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^q)$ the vector valued 1-form in the Lie algebra $\mathcal{G}$ of G which defines $\mathcal{F}$. One has the following equation:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$

where $C^i_{jk}$ are structure constants of $\mathcal{G}$. We can deform $\mathcal{F}$ in two ways: The first is a deformation with fixed transverse group G, such deformations have been studied by Tischler (see [8]) who proved that if $G = \mathbb{R}^q$ the foliation $\mathcal{F}$ can be deformed into a fibration over $\mathbb{T}^q$. In [5], D. Lehmann gives an example of a Lie foliation whose transverse group is the three dimensional Heisenberg group N which cannot be deformed into a fibration. With J.F. Quint we generalize in [2] the Lehmann construction for all nilpotent and nonabelian Lie groups and we construct a versal family of deformations for such foliations.

The second kind of deformation of $\mathcal{F}$ is one for which both the foliation and the model Lie group G are allowed to change. These deformations were introduced by E. Ghys in [3] and studied more extensively in [4]. More precisely a deformation of $\mathcal{F}$ is given by a collection of 1-forms $(\omega^1_t, \dots, \omega^q_t)$ linearly independent and varying smoothly with $t \in \mathbb{R}$ and a set of smooth functions $C^k_{ij}(t)$ such that:

$$d\omega^i_t = -\frac{1}{2} C^i_{jk}(t) \omega^j_t \wedge \omega^k_t.$$

The functions $C^k_{ij}(t)$ define a family of Lie algebras $\mathcal{G}_t$ of same dimension and $\omega_0 = \omega$, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$.

Recall that Lehmann foliation is obtained as follows (see [2] for details): Let **G** be the $\mathbb{Q}$ algebraic unipotent group whose real extension is the three dimensional Heisenberg group N. Take $\lambda > 0$ an integer without square factor and $\sigma$ the unique nontrivial inner automorphism of $\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]$. Denote by $\Delta$ the set of $(g, \sigma(g))$ contained in $\mathbf{G}(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]) \times \mathbf{G}(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}])$. Let $\rho$ be

*Adresse e-mail :* hdathe@ucad.sn.

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2011.02.006

a $\mathbb{Q}$-faithful representation of **G** in a $\mathbb{Q}$-vector space $E$. Choose a base $b$ of $E$ and let $\Gamma$ be the set of $(g,\sigma(g))$ contained in $\Delta$ such that the coefficients of $\sigma(g)$ in $b$ are in $\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$. By a theorem of Borel–Harish-Chandra (see [1]), $\Gamma$ is a co-compact lattice of $\mathrm{H}=\mathrm{N}\times\mathrm{N}$. If **H** is the $\mathbb{Q}$-unipotent group whose real extension associated to $\Gamma$ is H, we have $\mathbf{H}(\mathbb{Q})=\Delta$. Then no nontrivial subgroup of $\mathrm{N}_1=\mathrm{N}\times\{e\}$ and $\mathrm{N}_2=\{e\}\times\mathrm{N}$ is defined over $\mathbb{Q}$ for the $\mathbb{Q}$-structure **H**. The foliation $\mathcal{L}$ by $\mathrm{N}_2$-orbits of $\mathrm{H}/\Gamma$ is a N-Lie foliation whose holonomy group is the natural injection of $\Gamma$ into N. In [2] we prove that $\mathcal{L}$ can be obtained as a deformation of an $\mathbb{R}^3$-Lie foliation. But in this note we prove the following rigidity property:

**Theorem 2.2.** *The foliation $\mathcal{L}$ cannot be deformed into a non-nilpotent one.*

I thank E. Ghys, J.F. Quint and the anonymous referee for their helpful comments.

## 1. Introduction

Soit $V$ une variété compacte connexe et G un groupe de Lie (simplement connexe). Un G-feuilletage de Lie de $V$ est la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}$ de couples $(U,f)$, où $U$ est un ouvert de $V$ et $f:U\to\mathrm{G}$ une submersion, ayant les propriétés suivantes : (i) les ouverts $U$ recouvrent $V$ ; (ii) pour tous $(U,f)$ et $(W,h)$ dans $\mathcal{F}$, il existe $g$ dans G tel que, pour tout $x\in U\cap W$, on ait $f(x)=h(x)g$. En particulier les surfaces de niveaux des submersions $f$, pour $(U,f)$ dans $\mathcal{F}$, se recollent pour former un feuilletage de $V$. Pour éviter les ambiguités, on supposera en outre que $\mathcal{F}$ est maximal au sens suivant : si $U$ est un ouvert de $V$ et $f:U\to\mathrm{G}$ une submersion, si, pour tout $(W,h)$ dans $\mathcal{F}$, il existe $g$ dans G avec $f=h.g$ sur $U\cap W$, on a $(U,f)\in\mathcal{F}$.

Soit $\tilde{V}$, le revêtement universel de $V$, $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé d'un G-feuilletage $\mathcal{F}$ et $\tilde{\omega}$ la 1-forme associée. Fixons un point $x_0$ de $V$ et un relevé $\tilde{x}_0$ de $x_0$, et notons $\Gamma$ le groupe fondamental de $V$ en $x_0$, qui agit naturellement sur $\tilde{V}$. Il existe alors une submersion $D:\tilde{V}\to\mathrm{G}$ avec $D(x_0)=e$ et un morphisme $h:\Gamma\to\mathrm{G}$ tels que $\tilde{\omega}=\mathrm{d}D$ et que, pour tout $x$ dans $\tilde{V}$ et pour tout $\gamma$ dans $\Gamma$, on ait $D(\gamma x)=D(x)h(\gamma)^{-1}$. Les autres couples $(D',h')$ associés aux autres choix de points bases sont de la forme $x\to(D(x)g,g^{-1}h(x)g)$ où $g$ est un élément de G ; on dit que $D$ est la développante de $\mathcal{F}$ et $h$ son morphisme d'holonomie. Réciproquement, la donnée d'un couple $(D,h)$ où $D$ est une submersion de $\tilde{V}$ dans G et $h$ un morphisme de $\Gamma$ dans G ayant les propriétés ci-dessus définit bien un G-feuilletage de Lie de $V$.

Ces notions et ces résultats sont dus principalement à E. Fedida. Le lecteur en trouvera un exposé détaillé dans le livre de P. Molino, [7, 4.2].

Dans [5], D. Lehmann a construit un exemple de feuilletage de Lie sur une variété compacte $V$ dont le groupe transverse est le groupe de Heisenberg N de dimension 3 et qui n'est approchable par aucun N-feuilletage de Lie sur $V$ à holonomie discrète. Ici nous examinons des déformations de ce feuilletage dans lesquelles le groupe transverse varie. Ces types de déformations sont considérées par E. Ghys dans [3] et étudiées plus en détails dans [4].

Je remercie E. Ghys, J.F. Quint et le referee anonyme pour leurs remarques et suggestions.

## 2. Deformations

**Définition 2.1.** Soit $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie de codimension $q$ sur une variété compacte $V$ de dimension $n$. On note $\omega=(\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^q)$ la 1-forme vectorielle à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe de Lie G qui définit $\mathcal{F}$. On a :

$$\mathrm{d}\omega^i=\frac{-1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$$

où $C^i_{jk}$ sont les constantes de structures de $\mathcal{G}$. Soit pour $t\geqslant 0$, $\omega_t=(\omega^1_t,\omega^2_t,\dots,\omega^q_t)$ une collection de 1-formes réelles linéairement indépendantes vérifiant :

$$\mathrm{d}\omega^i_t=\frac{-1}{2}C^i_{jk}(t)\omega^j_t\wedge\omega^k_t$$

où les $C^i_{jk}(t)$ sont des fonctions de classe $C^\infty$ de $t$ qui représentent les constantes de structure d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ telle que $\omega_0=\omega$, $\mathcal{G}_0=\mathcal{G}$ et pour tout $t>0$, $\dim\mathcal{G}_t=\dim\mathcal{G}$. La 1-forme vectorielle $\omega_t$ définit alors une famille $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{G}_t$-feuilletages de Lie telle que $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$ qu'on appelle une déformation de $\mathcal{F}$.

Dans toute la suite N désigne le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire le groupe des matrices carrées unipotentes triangulaires supérieures. Dans [4], A.E. Kacimi, O. Guasp et M. Nicolau ont donné un exemple de flot abélien qui se déforme en un N-flot. Dans [2] nous avons construit un exemple de feuilletage de Lie abélien de dimension 3 qui se déforme en un N-feuilletage de Lie et la déformation obtenue est précisément le feuilletage de D. Lehmann construit dans [5].

Rappelons la construction algébrique du feuilletage de Lehmann (voir [2]).

Soit **G** le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique unipotent dont l'extension réelle est N. Fixons un entier $\lambda>0$ sans facteur carré, et soit $\sigma$ l'unique automorphisme non trivial de $\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]$ défini par : $\sigma(a+b\sqrt{\lambda})=(a-b\sqrt{\lambda})$ et $\Delta$ l'ensemble des couples $(g,\sigma(g))$ dans $G(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}])\times G)\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}])$. Soit enfin $\rho$ une $\mathbb{Q}$-représentation fidèle de **G** dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V$, fixons une base $b$ de $V$ et notons $\Gamma$ l'ensemble des couples $(g,\sigma(g))$ dans $\Delta$ où les coefficients de $\rho(g)$ dans la base $b$ sont dans

$\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$. D'après un théorème de Borel–Harish-Chandra (voir [1]), $\Gamma$ est un réseau co-compact de $\mathrm{H} = \mathrm{N} \times \mathrm{N}$. Notons **Z** le $\mathbb{Q}$-groupe unipotent dont l'extension réelle associée à $\Gamma$ est H. On a $\mathbf{H}(\mathbb{Q}) = \mathbf{\Delta}$. En particulier, aucun sous-espace non trivial de $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N} \times \{e\}$ et de $\mathrm{N}_2 = \{e\} \times \mathrm{N}$ n'est défini sur $\mathbb{Q}$ pour la $\mathbb{Q}$-structure **H**. Le feuilletage $\mathcal{L}$ en $\mathrm{N}_2$-orbites de $\mathrm{H}/\Gamma$ possède une structure naturelle de N-feuilletage de Lie dont le groupe d'holonomie est l'injection de $\Gamma$ dans N, qui est d'image dense. On appellera $\mathcal{L}$ le *feuilletage de Lehmann*.

Remarquons que l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ du groupe de Lie N admet des déformations non nilpotentes. Par exemple, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base naturelle $(e_1, e_2, e_3)$ et de la famille $\mathcal{G}_s$ à un paramètre réel $s$ d'algèbres de Lie définie par les crochets : $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = 0$, $[X_1, X_3] = -sX_2$. Si $s = 0$, $\mathcal{G}_0$ est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3 et pour tout $s > 0$, $\mathcal{G}_s$ est isomorphe à une algèbre de Lie résoluble non nilpotente. Cependant on montre le

**Théorème 2.2.** *Le feuilletage de Lehmann $\mathcal{L}$ ne peut être déformé en un feuilletage de Lie non nilpotent.*

Pour la démonstration nous aurons besoin de la définition et des lemmes suivants :

**Définition 2.3.** Un groupe de Lie résoluble G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dit complètement résoluble si tous les opérateurs linéaires adjoints $\mathrm{ad}_X$ $(X \in \mathcal{G})$ ne possèdent que des valeurs propres réelles.

Par exemple tout groupe de Lie nilpotent est complètement résoluble (voir [9]).

**Lemme 2.4.** *(Voir Théorème de Saito [9].) Soit* G *et* G′ *deux groupes de Lie résolubles, simplement connexes et complètement résolubles tel que* G *contient un réseau $\Gamma$. Tout homomorphisme $\alpha : \Gamma \to \mathrm{G}'$ s'étend de manière unique en un homomorphisme $\tilde{\alpha} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$.*

**Lemme 2.5.** *Soit* G *un groupe de Lie connexe et simplement connexe de dimension* 3 *non résoluble, alors* G *est isomorphe à* SU(2) *ou au revêtement universel* $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}$ *de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

**Démonstration.** On raisonne sur les algèbres de Lie. Soit $\mathcal{R}$ le radical résoluble de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Alors si $\mathcal{R}$ est différent de 0, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}/\mathcal{R}$ est de dimension inférieure ou égale à 2 et est donc résoluble. Par conséquent, $\mathcal{G}$ est résoluble et $\mathcal{G} = \mathcal{R}$. On en déduit donc que si $\mathcal{G}$ n'est pas résoluble, $\mathcal{R} = 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{G}$ est semi-simple. En particulier, la forme de Killing B de $\mathcal{G}$ est non-dégénérée. La représentation adjointe de $\mathcal{G}$ est injective (puisque le centre de $\mathcal{G}$, qui est un idéal résoluble est trivial) et elle envoie $\mathcal{G}$ dans l'algèbre orthogonale $so(\mathrm{B})$. Comme $\mathcal{G}$ est de dimension 3, $so(\mathrm{B})$ est de dimension 3 et, donc, la représentation adjointe induit un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $so(\mathrm{B})$. On a donc $\mathcal{G} = so(2, 1)$ ou $\mathcal{G} = so(3)$ suivant la signature de B. □

**Démonstration du Théorème 2.2.** Soit $\mathcal{F}_t$ une $\mathcal{G}_t$-déformation de $\mathcal{L}$. Supposons que les algèbres de Lie $\mathcal{G}_t$ soient résolubles non nilpotentes. Pour tout $t$ le groupe de Lie simplement connexe $\mathrm{G}_t$ d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ est le groupe transverse du feuilletage de Lie $\mathcal{F}_t$. On note respectivement par $\rho$ et $\rho_t$ les morphismes d'holonomie de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}_t$. On a $\rho_0 = \rho : \Gamma \to \mathrm{N}$ et pour tout $t > 0$ et suffisamment petit $\rho_t : \Gamma \to \mathrm{G}_t$. Nous allons lister toutes les algèbres de Lie résolubles de dimension $\leqslant 3$ (voir [6]) :

(1) $\mathcal{G}_1 = \mathbb{R}$.
(2) $\mathcal{G}_2 = \mathbb{R}^2$.
(3) $\mathcal{G}_3 = \mathrm{aff}(\mathbb{R})$, l'algèbre de Lie du groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$.
(4) $\mathcal{G}_4 = \mathbb{R}^3$.
(5) $\mathcal{G}_5 = (\mathbb{R}^3, e_1, e_2, e_3)$ : $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = 0$, $[e_2, e_3] = 0$, c'est l'algèbre de Heisenberg.
(6) $\mathcal{G}_6 = (\mathbb{R}^3, e_1, e_2, e_3)$ : $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_2 + e_3$, $[e_2, e_3] = 0$.
(7) $\mathcal{G}_{7,\lambda} = (\mathbb{R}^3, e_1, e_2, e_3)$ : $[e_1, e_2] = e_2$,$[e_1, e_3] = \lambda e_3$, $[e_2, e_3] = 0$, $|\lambda| \leqslant 1$.
(8) $\mathcal{G}_{8,\lambda} = (\mathbb{R}^2, e_1, e_2, e_3)$ : $[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3$, $[e_2, e_3] = 0$, $[e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3$, $\lambda \geqslant 0$.

On Désigne par $\mathrm{G}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ les groupes de lie simplement connexes associés.

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}_t$ de $\mathrm{G}_t$ est donc isomorphe à $\mathcal{G}_6$, $\mathcal{G}_{7,\lambda}$ ou $\mathcal{G}_{8,\lambda}$ puisque $\mathcal{G}_4$ et $\mathcal{G}_5$ sont nilpotentes.

*1er cas* : $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_6$. Comme 1 est la seule valeur propre non nulle de $\mathrm{ad}(e_i)$, $\mathrm{G}_6$ est complètement résoluble. D'après le Lemme 2.4 $\rho_t$ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{\rho}_t : \mathrm{H} \to \mathrm{G}_6$ qui sera surjectif puisque $\Gamma$ est uniforme dans H. Donc $\mathrm{G}_6$ est nilpotente, ce qui est absurde.

*2eme cas* : $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{7,\lambda}$. Les valeurs propres non nulles de $\mathrm{ad}(e_i)$ sont 1 et $\lambda$. Le groupe de Lie $\mathrm{G}_{7,\lambda}$ est complètement résoluble et on conclut comme dans le premier cas.

*3eme cas* : $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{8,\lambda}$. Montrons que nécessairement $\lambda = 0$. Supposons $\lambda$ non nul, le groupe de Lie $\mathrm{G}_{8,\lambda}$ est le produit semi-direct d'un groupe A, isomorphe à $\mathbb{R}$ et d'un groupe V isomorphe à $\mathbb{R}^2$, le groupe A agissant sur V par similitudes avec une dilatation non nulle. Dans ce cas le centralisateur d'un élément non trivial est soit V, soit conjugué à A et est donc non uniforme. Il existe un élément du centre $Z$ de $\Gamma$ dont l'image par $\rho_t$ est non trivial. En effet, sinon, $Z$ a une image nulle par $\rho_t$, et comme $Z$ est d'indice fini dans son groupe dérivé, le groupe dérivé de $\rho_t(\Gamma)$ est fini. Comme le groupe dérivé de

$G_t$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, ce groupe fini est trivial et l'image de $\Gamma$ par $\rho_t$ est abelienne. Or pour $\lambda \neq 0$, $G_{8,\lambda}$ ne possède pas de sous-groupe abélien uniforme. Il vient bien $\rho_t(Z) \neq \{e\}$. Alors $\rho_t(\Gamma)$ est contenu dans le centralisateur d'un élément $\gamma$ de $Z$ d'image non triviale. Or pour $g \neq e$ dans $G_{8,\lambda}$, le centralisateur de $g$ n'est pas uniforme. Il vient donc bien $\lambda = 0$.

Ainsi les morphismes $\rho_t$ pour $t > 0$ sont à valeurs dans $G_{8,0}$. Nous allons montrer qu'un morphisme $\mu : \Gamma \to G_{8,0}$, est trivial sur le centre $Z$ de $\Gamma$. En effet écrivons $G_{8,0}$ comme un produit semi-direct AV où A est isomorphe à $\mathbb{R}$, V à $\mathbb{R}^2$ et A agit sur V par rotations. Soit B le sous-groupe (discret) de A constitué des éléments qui agissent trivialement sur V. Comme $Z = [\Gamma, \Gamma]$, on a $\mu(Z) \subset [G_{8,0}, G_{8,0}] = V$. Si $\mu(Z)$ contient un élément non trivial de V, comme le centralisateur de cet élément dans $G_{8,0}$ est BV, on a $\mu(\Gamma) \subset BV$, donc $\mu(\Gamma)$ est abélien et $\mu(Z) = \mu([\Gamma, \Gamma])$ est trivial, ce qui est contradictoire. Donc $\mu(Z)$ est trivial. En particulier $\mu(\Gamma)$ est abélien et contenu dans BV s'il est uniforme. Ce qui signifie que le feuilletage $\mathcal{L}$ n'admet pas de déformations résolubles non nilpotentes.

Supposons que $G_t$ ne soit pas résoluble, d'après le Lemme 2.5, $G_t$ est isomorphe à SU(2) ou au revêtement universel $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ de $SL(2, \mathbb{R})$. Montrons à présent que les sous-groupes nilpotents de ces groupes sont tous abéliens. En effet, il suffit de montrer que tout sous-groupe nilpotent H de $SL(2, \mathbb{C})$ est abélien. Soit $g$ un élément central de H. Si $g$ n'est pas scalaire, il possède un espace propre qui est une droite dans $\mathbb{C}^2$. Alors H stabilise cette droite, et donc H est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures dans $SL(2, \mathbb{C})$, groupe dont les sous-groupes nilpotents sont abéliens. Sinon, le centre de H est constitué de matrices scalaires. Comme il est contenu dans $SL(2, \mathbb{C})$, ce centre est constitué de la matrice unité I et de la matrice $-I$. Considérons l'avant dernier terme non-trivial $H'$ de la serie centrale de H. Par définition le commutateur de H et de $H'$ est contenu dans le centre de H et, donc, dans $\{I, -I\}$. En d'autres termes pour $h \in H'$ et $g \in H$, on a $ghg^{-1} = h$ ou $ghg^{-1} = -h$ si bien que $gh^2g^{-1} = h^2$, c'est-à-dire que $h^2$ est central et, donc $h^2 = I$ ou $h^2 = -I$. Si $h^2 = I$, alors $h = I$ ou $h = -I$. Par conséquent si $h$ est un élément non central de $H'$, on a $h^2 = -I$ et donc $h$ est diagonalisable de valeurs propres $i$ et $-i$. Pour tout $g \in H$, comme $ghg^{-1}$ est égal à $h$ ou $-h$, $g$ stabilise ou échange les deux droites propres de $h$. Or l'ensemble des éléments de $SL(2, \mathbb{C})$ qui stabilisent ou échangent deux droites distinctes constitue un groupe isomorphe au produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\mathbb{C}^*$ où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{C}^*$ par l'application $x \to \frac{1}{x}$. On vérifie facilement que les sous-groupes nilpotents de ce groupe sont abéliens. Ce qui termine la preuve du Théorème 2.2. $\square$

## Références

[1] A. Borel, Harish-Chandra arithmetic subgroups of algebraic groups, Annals of Mathematics 75 (1962).
[2] H. Dathe, J.F. Quint, Exemples de feuilletages de Lie, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Ser. 6 15 (2) (2006) 203–215.
[3] E. Ghys, Riemannian foliations: examples and problems, Appendice E de Riemannian foliations, par P. Molino, Progress in Mathematics, vol. 73, Birkhäuser, Boston, 1988.
[4] A.E. Kacimi, G. Guasp, M. Nicolau, On deformations of transversely homogenous foliations, Topology 40 (2001) 1363–1393.
[5] D. Lehmann, Sur l'approximation de certains feuilletages nilpotents par des fibrations, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences Serie A 286 (1978) 251–254.
[6] J. Milnor, Curvatures of left invariants metrics on Lie groups, Advances in Mathematics 21 (1976) 293–329.
[7] P. Molino, Riemannian Foliations, Progress in Mathematics, vol. 73, Birkhäuser, Boston, 1988.
[8] D. Tischler, On fibering certain manifold over the circle, Topology 9 (1970) 153–154.
[9] A. Tralle, A note on solvable Lie groups without lattices and the Felix–Thomas models of fibrations, arXiv:math.DG/0009105v1, 2000.