C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 385–389

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse mathématique/Analyse harmonique

Critère de régularité directionnelle

Directional regularity criteria

Hnia Ben Braiek [a,b], Mourad Ben Slimane [c]

[a] *Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, 75005 Paris, France*
[b] *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Tunis, Tunisie*
[c] *Department of Mathematics, College of Science, King Saud University, P.O. Box 2455, Riyadh 11451, Saudi Arabia*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 21 octobre 2010
Accepté après révision le 31 janvier 2011
Disponible sur Internet le 24 février 2011

Présenté par Yves Meyer

RÉSUMÉ

On obtient une caractérisation de la régularité ponctuelle directionnelle par une condition sur les modules des coefficients d'ondelettes multi-échelles et multi-orientées.

ABSTRACT

We characterize pointwise directional regularity by highly oriented multi-scaled wavelet coefficients.

Abridged English version

Many natural mathematical objects, as well as many multi-dimensional signals and images from real physical problems, need to distinguish local directional behaviors (for tracking contours in image processing for example), see [1].

In a recent paper [4], Jaffard has considered the following definitions in order to take into account pointwise directional behaviors.

Definition 1. Let $m \geqslant 2$ and $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ be a bounded function in a neighborhood of x_0. Let $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_m > 0$ and $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Let $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ be an orthonormal basis of $\mathbb{R}^m$. We denote by $(x_1, \ldots, x_m)$ the coordinates of x on the basis $\mathcal{B}$. We say that $f \in C^{\vec{\alpha}}(x_0, \mathcal{B})$ if there exist $C > 0$ and a polynomial $P(x) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_m)} a_I x^I = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_m)} a_I x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$ of degree less than $\vec{\alpha}$ in the sense that

$$\max\left\{\sum_{n=1}^{m} \frac{i_n}{\alpha_n}\colon a_I \neq 0\right\} < 1 \tag{1}$$

such that in a neighborhood of x_0 we have

$$\left|f(x) - P(x - x_0)\right| \leqslant C \sum_{n=1}^{m} \left|x_n - (x_0)_n\right|^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Adresses e-mail : benbraiek@math.jussieu.fr (H. Ben Braiek), mbenslimane@ksu.edu.sa (M. Ben Slimane).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.01.030

Definition 2. Let $e \in \mathbb{R}^m$ with $|e| = 1$. The Hölder exponent of f in the direction e at x_0 is

$$\alpha_f(x_0, e) = \sup\left\{\alpha_1\colon \exists 0 < \varepsilon \leqslant \alpha_1,\ f \in C^{\overrightarrow{(\alpha_1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)}}(x_0, \mathcal{B})\right\} \tag{3}$$

where $\mathcal{B}$ is any orthonormal basis starting with the vector e.

Jaffard has obtained an upper bound for this exponent based on the anisotropic Gabor-wavelet transform.

Our first main result gives a criteria of pointwise directional regularity by highly oriented multi-scaled wavelet coefficients.

Theorem 1. *Let $e \in \mathbb{R}^m$ with $|e| = 1$. Let E be the set of all $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ satisfying $0 < u_1 \leqslant 1$ and $u_2 = \cdots = u_m = \frac{m-u_1}{m-1}$. Let $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^m)$ for $\varepsilon > 0$. The Hölder exponent of f in the direction e at x_0 is given by*

$$\alpha_f(x_0, e) = \sup_{\mathbf{u} \in E}\left(\liminf_{j\to\infty} \inf_{k \in \mathbb{Z}^m, (G, \mathbf{l}) \in I_{j,\mathbf{u}}} \frac{\log(|c_{j,k,\mathbf{u}}^{(G,\mathbf{l})}|)}{\log(2^{-ju_1} + |(x_0)_1 - \frac{k_1}{2^{l_1}}| + \sum_{i=2}^m |(x_0)_i - \frac{k_i}{2^{l_i}}|^{\frac{(m-1)u_1}{m-u_1}})}\right), \tag{4}$$

where the coordinates are on any orthonormal basis $\mathcal{B}$ starting with the vector e, the set $I_{j,\mathbf{u}}$ is given in both (9), (10) *and* (11)*, and $c_{j,k,\mathbf{u}}^{(G,\mathbf{l})}$ are the Triebel wavelet coefficients of f defined in* (14)*.*

Our second main result gives a criteria of pointwise directional regularity by highly oriented multi-scaled wavelet leaders.

Theorem 2. *Let $e \in \mathbb{R}^m$ with $|e| = 1$. Let E be the set of all $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ satisfying $0 < u_1 \leqslant 1$ and $u_2 = \cdots = u_m = \frac{m-u_1}{m-1}$. Let $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^m)$ for $\varepsilon > 0$. The Hölder exponent of f in the direction e at x_0 is given by*

$$\alpha_f(x_0, e) = \sup_{\mathbf{u} \in E}\left(\liminf_{j\to\infty} \frac{\log(d_{j,\mathbf{u}}(x_0, \mathcal{B}))}{\log(2^{-ju_1})}\right), \tag{5}$$

where $\mathcal{B}$ is any orthonormal basis starting with the vector e, and the $d_{j,\mathbf{u}}(x_0, \mathcal{B})$ are given by (18)*.*

Acknowledgments

Mourad Ben Slimane is grateful to Stéphane Jaffard for many remarks. The authors thank the referee(s) for her/his/their comments. The authors extend their appreciation to the Deanship of Scientific Research at King Saud University for funding the work through the research group project No. RGP-VPP-024.

1. Introduction et définitions

La définition classique de la régularité ponctuelle (i.e. (2) avec $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \alpha$) est uniforme dans toutes les directions. Cependant, beaucoup d'objets mathématiques naturels, ainsi que beaucoup de signaux multi-dimensionnels et d'images issues de problèmes physiques réels, nécessitent de distinguer des comportements locaux directionnels (pour le suivi de contours en traitement d'images par exemple), voir [1].

Dans un article récent [4], Jaffard a considéré la définition suivante afin de prendre en compte les comportements directionnels ponctuels.

Définition 1. Soit $m \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction bornée dans un voisinage de x_0. Soit $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_m > 0$ et $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$. On note $(x_1, \ldots, x_m)$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. On dit que $f \in C^{\vec{\alpha}}(x_0, \mathcal{B})$ s'il existe $C > 0$ et un polynôme $P(x) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_m)} a_I x^I$ de degré inférieur à $\vec{\alpha}$ dans le sens (1) tels qu'on ait (2) dans un voisinage de x_0.

Remarque 1. Si (2) a lieu alors pour tout n entre 1 et m, la fonction $f_{e_n} : s \mapsto f(x_0 + se_n)$ d'une seule variable appartient à l'espace de Hölder usuel $C^{\alpha_n}(0)$. Donc on dit que dans chaque direction e_n, la fonction f a une régularité Hölderienne α_n en x_0.

Il est clair qu'on a un ordre partiel : si $\alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_m \leqslant \beta_m$ alors

$$f \in C^{\vec{\beta}}(x_0, \mathcal{B}) \quad \Rightarrow \quad f \in C^{\vec{\alpha}}(x_0, \mathcal{B}). \tag{6}$$

Donc dans [4] l'exposant de régularité directionnelle est défini comme suit :

Définition 2. Soit e un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$. L'exposant de Hölder $\alpha_f(x_0, e)$ de f en x_0 dans la direction e est donné dans (3).

Evidemment dans (3) la base orthonormée $\mathcal{B}$ commençant par le vecteur e est quelconque pour deux raisons : la première c'est que la composante $x_1 - (x_0)_1$ est la même et n'est autre que le produit scalaire de $x - x_0$ avec e, et la seconde raison, c'est que $|x_2 - (x_0)_2|^\varepsilon + \cdots + |x_m - (x_0)_m|^\varepsilon$ est équivalente à $|(x_2 - (x_0)_2, \ldots, x_m - (x_0)_m)|^\varepsilon$, et toutes les normes de $\mathbb{R}^{m-1}$ sont équivalentes.

Jaffard a obtenu une majoration de $\alpha_f(x_0, e)$ à l'aide de la transformée anisotrope en ondelettes de Gabor.

Définition 1 peut être vue comme une extension de la notion de régularité anisotrope qui avait été introduite dans [2]; soit $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$0 < u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_m \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i = m. \tag{7}$$

Pour $I = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m$, on note $d_{\mathbf{u}}(I) = \sum_{l=1}^{m} u_l i_l$. Si $P(x) = \sum_I a_I x^I$, $a_I \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est un polynôme, on définit son degré $\mathbf{u}$-homogène comme étant $d_{\mathbf{u}}(P) := max\{d_{\mathbf{u}}(I):\ a_I \neq 0\}$.

Définition 3. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bornée dans un voisinage de x_0. Soit $h > 0$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$. On note $(x_1, \ldots, x_m)$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. On dit que $f \in C^h_{\mathbf{u}}(x_0, \mathcal{B})$ s'il existe une constante C et un polynôme P de degré $\mathbf{u}$-homogène inférieur à h tels que l'on ait dans un voisinage de x_0

$$\bigl|f(x) - P(x - x_0)\bigr| \leqslant C \sum_{i=1}^{m} \bigl|x_i - (x_0)_i\bigr|^{h/u_i}. \tag{8}$$

L'exposant $\mathbf{u}$-Hölder de f en x_0 est

$$h_{\mathbf{u},f}(x_0, \mathcal{B}) = \sup\bigl\{h:\ f \in C^h_{\mathbf{u}}(x_0, \mathcal{B})\bigr\}.$$

On dit que $f \in C^h_{\mathbf{u}}(\mathbb{R}^m, \mathcal{B})$ si (8) a lieu pour tout x et x_0 avec une constante uniforme C.

2. Résultats principaux

Voici notre premier résultat principal :

Théorème 1. *Soit e un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$. Soit E l'ensemble des $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant $0 < u_1 \leqslant 1$ et $u_2 = \cdots = u_m = \frac{m-u_1}{m-1}$. L'exposant de Hölder de f en x_0 dans la direction e est donné par*

$$\alpha_f(x_0, e) = \sup_{\mathbf{u} \in E} \left(\frac{h_{\mathbf{u},f}(x_0, \mathcal{B})}{u_1} \right),$$

où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base orthonormée qui commence par le vecteur e.

Soit ψ_F et ψ_M les ondelettes père et mère de Lemarié et Meyer [5] (resp. Daubechies [3]) dans la classe de Schwartz (resp. arbitrairement régulières et à supports compacts) avec tous les moments nuls (resp. un certain nombre fini de moments nuls) pour ψ_M et $\int_{\mathbb{R}} \psi_F(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Alors la collection $(\psi_F(. - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(2^{j/2} \psi_M(2^j . - k))_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ comme dans (7). Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $I_{j,\mathbf{u}}$ l'ensemble des paires $(G, \mathbf{l})$ où $G = (G_1, \ldots, G_m) \in \{F, M\}^m$ a au moins une composante G_i égale à M et $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{N}^m$ où

$$l_i = [ju_i] \quad \text{si } G_i = F, \tag{9}$$

$$[ju_i] \leqslant l_i < \bigl[(j+1)u_i\bigr] \quad \text{si } G_i = M \text{ et } \bigl[(j+1)u_i\bigr] > [ju_i], \tag{10}$$

et

$$l_i = [ju_i] \quad \text{si } G_i = M \text{ et } \bigl[(j+1)u_i\bigr] = [ju_i]. \tag{11}$$

Le cardinal de $I_{j,\mathbf{u}}$ est alors majoré indépendamment de j.

Dans [7,6] Triebel donne le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit*

$$\Phi_k(x) = \prod_{i=1}^{m} \psi_F(x_i - k_i) \quad \text{et} \quad \Psi^{(G,\mathbf{l})}_{j,k,\mathbf{u}}(x) = \prod_{i=1}^{m} \psi_{G_i}\bigl(2^{l_i} x_i - k_i\bigr). \tag{12}$$

La collection des (Φ_k) *où* $k \in \mathbb{Z}^m$ *et* $(2^{|\mathbf{l}|/2}\Psi^{(G,\mathbf{l})}_{j,k,\mathbf{u}})$ *où* $j \in \mathbb{N}$, $(G,\mathbf{l}) \in I_{j,\mathbf{u}}$, $k \in \mathbb{Z}^m$ *et* $|\mathbf{l}| := \sum_{i=1}^m l_i$, *est alors une base orthonormée de* $L^2(\mathbb{R}^m)$. *Donc toute fonction* $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ *s'écrit*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} C_k\Phi_k(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\sum_{(G,\mathbf{l})\in I_{j,\mathbf{u}}} c^{(G,\mathbf{l})}_{j,k,\mathbf{u}}\Psi^{(G,\mathbf{l})}_{j,k,\mathbf{u}}(x), \tag{13}$$

avec

$$C_k = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\Phi_k(x)\,\mathrm{d}x \quad et \quad c^{(G,\mathbf{l})}_{j,k,\mathbf{u}} = 2^{|\mathbf{l}|}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\Psi^{(G,\mathbf{l})}_{j,k,\mathbf{u}}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

On montre le résultat suivant :

Théorème 2. *Si* $f \in C^\beta_{\mathbf{u}}(\mathbb{R}^m,\mathcal{B})$ *pour un* $\beta > 0$, *alors l'exposant* **u***-Hölder de* f *est donné par la formule*

$$h_{\mathbf{u},f}(x_0,\mathcal{B}) = \liminf_{j\to\infty}\ \inf_{k\in\mathbb{Z}^m,\,(G,\mathbf{l})\in I_{j,\mathbf{u}}} \frac{\log(|c^{(G,\mathbf{l})}_{j,k,\mathbf{u}}|)}{\log(2^{-j} + \sum_{i=1}^m |(x_0)_i - \frac{k_i}{2^{l_i}}|^{1/u_i})}.$$

Clairement si $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^m)$ pour $\varepsilon > 0$ alors pour tout $\mathbf{u}$ il existe $\beta > 0$ tel que $f \in C^\beta_{\mathbf{u}}(\mathbb{R}^m,\mathcal{B})$. D'où le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soit e un vecteur unitaire. Soit* $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^m)$ *pour* $\varepsilon > 0$. *Alors* $\alpha_f(x_0,e)$ *est donné par* (4) *où* $\mathcal{B}$ *est n'importe quelle base orthonormée qui commence par e.*

Un rectangle **u**-dyadique de $\mathbb{R}^m$ à l'échelle j **orienté suivant** $\mathcal{B}$ est

$$\lambda_{\mathbf{u}}(\mathcal{B}) = \lambda^{(G,l)}_{j,k,\mathbf{u}}(\mathcal{B}) = (2^{-l_1}k_1,\ldots,2^{-l_m}k_m) + \prod_{i=1}^m \big[0,2^{-l_i}\big) \tag{15}$$

(**cette égalité est considérée dans les coordonnées dans** $\mathcal{B}$).

On note

$$c_{\lambda_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})} = c^{(G,\mathbf{l})}_{j,k,\mathbf{u}}. \tag{16}$$

Définition 4. Les **u**-coefficients d'ondelettes dominants ($\mathcal{B}$ **orientés**) sont définis par

$$d_{\lambda_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})} = \sup_{\lambda'_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})\subset\lambda_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})} |c_{\lambda'_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})}|. \tag{17}$$

Bien sûr, comme on s'intéresse à la régularité ponctuelle, on peut supposer que f est localement bornée et parsuite les **u**-coefficients d'ondelettes dominants sont finis.

Définition 5. On dit que deux rectangles **u**-dyadiques sont adjacents s'ils sont à la même échelle et si la distance qui les sépare est nulle (noter qu'un rectangle **u**-dyadique est adjacent à lui même). On note par $\lambda_{j,\mathbf{u}}(x_0,\mathcal{B})$ le rectangle **u**-dyadique à l'échelle j contenant x_0, et par $Adj(\lambda_{\mathbf{u}}(\mathcal{B}))$ l'ensemble des rectangles **u**-dyadiques adjacents à $\lambda_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})$. Alors

$$d_{j,\mathbf{u}}(x_0,\mathcal{B}) = \max_{\lambda'_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})\in Adj(\lambda_{j,\mathbf{u}}(x_0,\mathcal{B}))} d_{\lambda'_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})}. \tag{18}$$

On montre aussi le résultat suivant :

Théorème 3. *Si* $f \in C^\beta_{\mathbf{u}}(\mathbb{R}^m,\mathcal{B})$ *pour un* $\beta > 0$, *alors*

$$h_{\mathbf{u},f}(x_0,\mathcal{B}) = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log(d_{j,\mathbf{u}}(x_0,\mathcal{B}))}{\log(2^{-j})}.$$

On déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2. *Soit* $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^m)$ *pour un* $\varepsilon > 0$. *Soit* $e \in \mathbb{R}^m$ *un vecteur unitaire. Alors* $\alpha_f(x_0,e)$ *est donné par* (5), *où* $\mathcal{B}$ *est n'importe quelle base orthonormée qui commence par e.*

Remerciements

Mourad Ben Slimane tient à exprimer sa reconnaissance à Stéphane Jaffard pour de nombreuses remarques. Les auteurs remercient aussi le(s) rapporteur(s) pour plusieurs commentaires. Les auteurs expriment leur appréciation au Doyen de la Recherche Scientifique de King Saud University pour financer le travail à travers le projet du groupe de recherche No. RGP-VPP-024.

Références

[1] A. Arneodo, B. Audit, N. Decoster, J.F. Muzy, C. Vaillant, Wavelet-based multifractal formalism: applications to DNA sequences, satellite images of the cloud structure and stock market data, in: A. Bunde, J. Kropp, H.J. Schellnhuber (Eds.), The Science of Disasters, Springer, 2002, pp. 27–102.
[2] M. Ben Slimane, Multifractal formalism and anisotropic self-similar functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 124 (1998) 329–363.
[3] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988) 909–996.
[4] S. Jaffard, Pointwise and directional regularity of nonharmonic Fourier series, Appl. Comput. Harmon. Anal. 28 (2010) 251–266.
[5] P.-G. Lemarié, Y. Meyer, Ondelettes et bases hilbertiennes, Rev. Mat. Iberoam. 1 (1986) 1–8.
[6] H. Triebel, Wavelet bases in anisotropic function spaces, in: Proc. Conf. Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Milovy, 2004, Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic, Prague, 2005, pp. 370–387.
[7] H. Triebel, Theory of Function Spaces III, Monographs in Mathematics, vol. 78, Birkhäuser, Basel, 2006.