



Géométrie

Dérivation des surfaces convexes de \mathbb{R}^3 dans l'espace de Lorentz et étude de leurs focales*Derivation of convex surfaces of \mathbb{R}^3 in Lorentz space and study of their focals*

Yves Martinez-Maure

1, rue Auguste Perret, 92500 Rueil-Malmaison, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 17 novembre 2009

Accepté après révision le 21 octobre 2010

Disponible sur Internet le 18 novembre 2010

Dedicated to the memory of Heliodoro Martinez

Présenté par Étienne Ghys

R É S U M É

En introduisant une notion de dérivation des surfaces convexes de \mathbb{R}^3 dans l'espace de Lorentz–Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$, nous donnons pour les surfaces convexes de \mathbb{R}^3 un équivalent naturel d'une majoration du déficit isopérimétrique des courbes convexes de \mathbb{R}^2 en termes d'aire algébrique de leur développée. Nous établissons en outre une série d'inégalités géométriques pour les focales des surfaces convexes.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Introducing a notion of derivation of closed convex surfaces of \mathbb{R}^3 in the Lorentz–Minkowski space $\mathbb{R}^{3,1}$, we give a natural three-dimensional equivalent of an upper bound of the isoperimetric deficit of convex curves of \mathbb{R}^2 in terms of signed area of their evolute. Furthermore we establish a series of geometric inequalities for focals of closed convex surfaces.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction et majoration du déficit isopérimétrique dans \mathbb{R}^3

Soit \mathcal{K} un corps convexe de classe C^4_+ [5] dans le plan vectoriel euclidien \mathbb{R}^2 . Paramétré par son vecteur normal sortant, le bord de \mathcal{K} est un hérisson \mathcal{H}_h de fonction de support définie sur le cercle unité \mathbb{S}^1 par : $\forall u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$, $h(\theta) = \max_{x \in \mathcal{K}} \langle x, u(\theta) \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^2 . La développée (resp. la développée seconde) de \mathcal{H}_h est encore un hérisson $\mathcal{H}_{\partial h}$ (resp. $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$) de fonction de support $(\partial h)(\theta) = h'(\theta - \frac{\pi}{2})$ (resp. $(\partial^2 h)(\theta) = -h''(\theta)$). L'aire $a(h)$ et la longueur $l(h)$ de \mathcal{H}_h , l'aire $a(\partial h)$ de sa développée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et l'aire mixte $a(h, \partial^2 h)$ de \mathcal{H}_h et de sa développée seconde $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient [3, Prop. 6] :

$$0 \leq l(h)^2 - 4\pi a(h) \leq -4\pi a(\partial h) = -4\pi a(h, \partial^2 h). \quad (1)$$

La première inégalité est l'inégalité isopérimétrique. La seconde majore le déficit $l(h)^2 - 4\pi a(h)$ à l'aide des « courbes dérivées » $\mathcal{H}_{\partial h}$ et $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ de \mathcal{H}_h . Dans cette Note, nous prouvons que (1) admet un équivalent naturel en dimension 3.

Soit \mathcal{K} un corps convexe de classe C^4_+ dans l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 . Paramétré par son vecteur normal sortant, le bord de \mathcal{K} est un hérisson \mathcal{H}_h de fonction de support définie sur la sphère unité \mathbb{S}^2 par : $\forall u \in \mathbb{S}^2$, $h(u) = \max_{x \in \mathcal{K}} \langle x, u \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^3 . La développée moyenne de \mathcal{H}_h est l'enveloppe des plans médiateurs des

Adresse e-mail : martinez@math.jussieu.fr.

segments focaux $\sigma_h(u) := [c_h^1(u), c_h^2(u)]$, où $c_h^1(u), c_h^2(u)$ sont les centres de courbure principaux de \mathcal{H}_h au point de vecteur normal sortant u . Elle est, plus précisément, le hérisson de fonction de support $(\partial^2 h)(u) = -\frac{1}{2}(\Delta h)(u)$, où $(\Delta h)(u)$ est la somme des valeurs propres du hessien sphérique de h en u . L'intégrale de la courbure moyenne $m(h)$ de \mathcal{H}_h , son aire $s(h)$ et l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$ de \mathcal{H}_h et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ (définie en polarisant la forme quadratique $h \mapsto s(h)$ sur $C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$) sont données par [3] :

$$m(h) = \int_{\mathbb{S}^2} h \, d\sigma, \quad s(h) = \int_{\mathbb{S}^2} R_h \, d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} \, d\sigma \quad \text{et} \quad s(h, \partial^2 h) = \int_{\mathbb{S}^2} (\partial^2 h) R_{(1,h)} \, d\sigma$$

où σ est la mesure de Lebesgue sphérique et R_h (resp. $R_{(1,h)}$) le produit $R_1 R_2$ (resp. la moyenne $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$) des rayons de courbure principaux R_1, R_2 de \mathcal{H}_h , c'est-à-dire la fonction de courbure (resp. le rayon de courbure moyen) de \mathcal{H}_h . Pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, l'application tangente à la réciproque x_h de l'application de Gauss de \mathcal{H}_h est donnée en u par $T_u x_h = h(u) Id_{T_u \mathbb{S}^2} + H_h(u)$, où $H_h(u)$ est l'endomorphisme symétrique associé au hessien de h en u [1]. Par conséquent, pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, $R_{(1,h)}(u) = \frac{1}{2} \text{Trace}[T_u x_h] = (h + \frac{1}{2} \Delta h)(u)$ et $R_h(u) = \det[T_u x_h]$.

Théorème 1. Soit \mathcal{K} un corps convexe de classe C^4_+ de \mathbb{R}^3 et soit $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ sa fonction de support. L'intégrale de la courbure moyenne $m(h)$ du hérisson \mathcal{H}_h , son aire $s(h)$ et l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$ de \mathcal{H}_h et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient :

$$0 \leq m(h)^2 - 4\pi s(h) \leq -4\pi s(h, \partial^2 h). \tag{2}$$

L'encadrement (2) est vérifié pour tout hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$, où $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. L'aire "algébrique" $s(h)$ s'écrit alors $s_+(h) - s_-(h)$, où $s_+(h)$ (resp. $s_-(h)$) est l'aire totale des régions de \mathcal{H}_h à courbure de Gauss > 0 (resp. < 0). Le lecteur pourra consulter [1] pour une introduction aux hérissons et [4] pour un panorama récent.

Démonstration. La première inégalité est bien connue pour \mathcal{H}_h convexe (e.g. [5, p. 322]). Le cas général est traité dans [3]. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$m(h)^2 - 4\pi s(h) = \left(\int_{\mathbb{S}^2} R_{(1,h)} \, d\sigma \right)^2 - 4\pi s(h) \leq 4\pi \int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h) \, d\sigma.$$

Or, on a $\int_{\mathbb{S}^2} R_h \, d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} \, d\sigma$ par symétrie du volume mixte [3]. Comme $R_{(1,h)} = h + \frac{1}{2} \Delta h$, on en déduit que : $\int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h) \, d\sigma = -s(h, \partial^2 h)$. □

La comparaison des encadrements (1) et (2) suggère l'existence d'une « surface dérivée » $\mathcal{H}_{\partial h}$ dont l'aire $s(\partial h)$ devrait vérifier :

$$0 \leq m(h)^2 - 4\pi s(h) \leq -4\pi s(\partial h) = -4\pi s(h, \partial^2 h).$$

Une telle notion de surface dérivée ne peut être définie dans \mathbb{R}^3 et c'est sans aucun doute ce qui explique que son existence soit passée inaperçue jusqu'à ce jour. Cette surface $\mathcal{H}_{\partial h}$ est en effet à chercher dans l'espace de Lorentz–Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. C'est en effet ce que nous suggère le fait que l'intégrale

$$-s(h, \partial^2 h) := \int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h) \, d\sigma = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} (R_1 - R_2)^2 \, d\sigma$$

soit l'aire de Laguerre du hérisson \mathcal{H}_h paramétré par la réciproque $x_h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u \mapsto \nabla h(u) + h(u)u$ de son application de Gauss (e.g. [2,6]) :

$$L(x_h) := \int_{\mathbb{S}^2} \frac{H^2 - K}{K} \, d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h) \, d\sigma,$$

où H (resp. K) est la courbure moyenne (resp. de Gauss) de \mathcal{H}_h . Autrement dit, $-s(h, \partial^2 h)$ est égale à l'aire de la surface décrite dans l'espace $\Sigma \approx \mathbb{R}^{3,1}$ des sphères orientées et sphères-points de \mathbb{R}^3 par la sphère moyenne $S(\frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u); R_{(1,h)}(u))$, orientée par u en $x_h(u)$, lorsque u décrit \mathbb{S}^2 . Nous verrons que cette surface peut s'interpréter comme une surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ de fonction de support $\partial h = (dh)/\sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2}\partial$ comme l'opérateur de Dirac–Hodge $D = d + \delta$, où δ est la codifférentiation extérieure, de sorte que l'on a bien $\partial^2 h = \frac{1}{2}\delta(dh) = -\frac{1}{2}\Delta h(u)$. En passant, cela permet d'interpréter l'aire de Laguerre $L(x_h)$ comme l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$.

2. Développement des hérissons de \mathbb{R}^3 dans l'espace de Lorentz $\mathbb{R}^{3,1}$

Reprenons les notations précédentes. Posons $\mathbb{R}^{3,1} = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{3,1})$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3,1}$ est la métrique de Lorentz : $\langle (x; t), (x'; t') \rangle_{3,1} = \langle x, x' \rangle - tt'$. Pour tout $(x; r) \in \mathbb{R}^{3,1}$, $(x; r)$ sera vu comme la sphère $S(x; |r|)$ de \mathbb{R}^3 orientée par le vecteur normal sortant (resp. rentrant) si $r > 0$ (resp. $r < 0$), et comme la sphère-point $\{x\}$ si $r = 0$.

Pour interpréter $-s(h, \partial^2 h)$ comme l'aire d'une surface dérivée, identifions pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, la droite normale à \mathcal{H}_h en $x_h(u)$, soit $N_h(u) := \{\nabla h(u)\} + \mathbb{R}u$, à la droite $L_h(u) := \{(\nabla h(u); h(u))\} + \mathbb{R}(u; -1)$ de $\mathbb{R}^{3,1}$, en associant à $x_h(u)$ (resp. à tout $x \in N_h(u) - \{x_h(u)\}$), la sphère-point $(x_h(u); 0)$ (resp. la sphère de centre x passant par $x_h(u)$ et orientée par u en $x_h(u)$), à l'aide de la bijection $\Sigma_h(u) : N_h(u) \rightarrow L_h(u)$, $\nabla h(u) + \lambda u \mapsto (\nabla h(u); h(u)) + \lambda(u; -1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le point $c_h(u) = \frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u) = \nabla h(u) - \frac{\Delta h(u)}{2}u$ de la surface moyenne $\mathcal{M}_h = c_h(\mathbb{S}^2)$ est ainsi identifié à la sphère moyenne $(c_h(u); R_{(1,h)}(u))$ orientée par u en $x_h(u)$. L'hypersurface réglée \mathcal{L}_h de $\mathbb{R}^{3,1}$ dont les $L_h(u)$ sont les génératrices est l'enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation

$$\langle (x; t), u_L \rangle_{3,1} = \frac{h(u)}{\sqrt{2}}, \quad \text{où } u_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(u; -1).$$

Elle peut être paramétrée par $A_h : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$, $(u, r) \mapsto (x_h(u); 0) - r(u; -1)$. Elle jouit d'un « caractère hérisson » (de « fonction de support » $h(u)/\sqrt{2}$) dans la mesure où u_L reste $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3,1}$ -orthogonal à l'espace tangent à \mathcal{L}_h tout le long de $L_h(u)$. Comme tous les hérissons parallèles \mathcal{H}_{h+t} ($t \in \mathbb{R}$), ont la même surface moyenne et, pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, la même normale $N_h(u)$ et des droites $L_{h+t}(u)$ (resp. des sphères moyennes $(c_{h+t}(u); R_{(1,h+t)}(u))$) telles que $L_{h+t}(u) = L_h(u) + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}$ (resp. $(c_{h+t}(u); R_{(1,h+t)}(u)) = (c_h(u); R_{(1,h)}(u)) + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}$), nous considérerons \mathcal{L}_h et toutes les $\mathcal{L}_{h+t} = \mathcal{L}_h + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}$ comme une seule et même hypersurface. Comme $\{h+t \mid t \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des fonctions dont ∇h est le gradient, on définira donc la « fonction de support » de \mathcal{L}_h par $\partial h := (dh)/\sqrt{2}$. L'identification des normales à \mathcal{H}_h aux génératrices de \mathcal{L}_h fait correspondre à la surface moyenne \mathcal{M}_h , une surface $\mathcal{H}_{\partial h} \subset \mathcal{L}_h$ (que l'on confond avec ses translattées $\mathcal{H}_{\partial(h+t)} \subset \mathcal{L}_{h+t}$). Cette surface est paramétrée par $x_{\partial h} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{H}_{\partial h}$, $u \mapsto (c_h(u); R_{(1,h)}(u)) = (x_h(u); 0) - R_{(1,h)}(u)(u; -1) = (\nabla h(u); h(u)) + (y; s)$, où $(y; s) \in \mathbb{R}(u; -1)$ est déterminé par :

$$\langle (y; s), v_L \rangle_{3,1} = -\frac{\Delta h(u)}{\sqrt{2}} = \delta(\partial h)(u), \quad \text{où } v_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(u; 1).$$

Le calcul de sa première forme fondamentale g donne $x_{\partial h}^* g = \frac{1}{4}(R_1 - R_2)^2 g_S$, où $x_{\partial h}^* g$ est l'image réciproque de g par $x_{\partial h}$ et g_S la métrique standard sur \mathbb{S}^2 . L'aire de $\mathcal{H}_{\partial h}$ est donc égale à $-s(h, \partial^2 h)$. Son élément d'aire $\frac{1}{4}(R_1 - R_2)(u)^2 d\sigma(u)$ n'est autre que la projection orthogonale sur le plan médiateur du segment focal $\sigma_h(u)$ de l'élément d'aire correspondant de la surface moyenne. Comme la composée de l'application tangente $T_u x_{\partial h} : T_u \mathbb{S}^2 \rightarrow T_{x_{\partial h}(u)} \mathcal{L}_h$ avec la projection de $T_{x_{\partial h}(u)} \mathcal{L}_h = (T_u \mathbb{S}^2 \times \{0\}) \oplus \mathbb{R}(u; -1)$ sur $T_u \mathbb{S}^2 \times \{0\} \approx T_u \mathbb{S}^2$ inverse l'orientation, nous définirons l'aire algébrique de $\mathcal{H}_{\partial h}$ par : $s(\partial h) := s(h, \partial^2 h)$. Notons que les surfaces dérivées $\mathcal{H}_{\partial h}$ forment un espace vectoriel sur lequel $\partial h \mapsto \sqrt{-s(\partial h)}$ est une norme associée à un produit scalaire s'interprétant comme une aire mixte.

3. Des inégalités de type Brunn–Minkowski pour les surfaces focales

Soit \mathcal{H}_h un hérisson de \mathbb{R}^3 de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. Sa focale \mathcal{F}_h est définie comme le lieu de ses centres de courbure principaux (ou, ce qui est équivalent, comme l'enveloppe de ses normales). Définissons le volume de \mathcal{F}_h par :

$$v(\nabla h) := - \int_{\mathbb{R}^3} i_{\mathcal{F}_h}(x) dx,$$

où $i_{\mathcal{F}_h}(x) := 1 - \frac{1}{2}v_h(x)$, en désignant par $v_h(x)$ le nombre de normales orientées à \mathcal{H}_h passant par x . Notons que \mathcal{F}_h , et donc son volume, ne dépendent que de ∇h .

Théorème 2. Soit \mathcal{H}_h un hérisson de \mathbb{R}^3 de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. Le volume de la focale \mathcal{F}_h de \mathcal{H}_h est donné par :

$$v(\nabla h) = \frac{1}{6} \int_{\mathbb{S}^2} |R_1 - R_2|^3 d\sigma = \frac{4}{3} \int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h)^{\frac{3}{2}} d\sigma,$$

où R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure principaux de \mathcal{H}_h .

Démonstration. On exprime $v(\nabla h)$ comme une intégrale sur $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ en notant que $-i_{\mathcal{F}_h}(x) = \text{Card}[\gamma_h^{-1}(\{x\})]$, où $\gamma_h : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, t) \mapsto tc_h^1(u) + (1-t)c_h^2(u)$, $c_h^1(u)$, $c_h^2(u)$ désignant les centres de courbure principaux de \mathcal{H}_h en $x_h(u)$. □

Corollaire 1. Soit \mathcal{H} l'espace vectoriel réel des familles de hérissons parallèles de classe C^4 de \mathbb{R}^3 . L'application $v : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\nabla h \mapsto v(\nabla h)^{\frac{1}{3}}$ est une norme.

En majorant $|s(\partial h)|$ à l'aide de l'inégalité de Hölder avec $(p, q) = (3/2, 3)$, il vient :

Corollaire 2. Soit \mathcal{H}_h un hérisson de \mathbb{R}^3 de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. L'aire de la surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et le volume de la focale \mathcal{F}_h vérifient

$$4|s(\partial h)|^3 \leq 9\pi v(\nabla h)^2.$$

Références

- [1] R. Langevin, G. Levitt, H. Rosenberg, Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss), in: Singularities, Warsaw, 1985, in: Banach Center Publ., vol. 20, PWN, Warsaw, 1988, pp. 245–253.
- [2] T. Li, Laguerre geometry of surfaces in \mathbb{R}^3 , Acta Math. Sin., Engl. Ser. 21 (2005) 1525–1534.
- [3] Y. Martinez-Maure, De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons, Arch. Math. 72 (1999) 444–445.
- [4] Y. Martinez-Maure, New notion of index for hedgehogs of \mathbb{R}^3 and applications, Eur. J. Comb. 31 (2010) 1037–1049.
- [5] R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [6] C. Wang, Weierstrass representations of Laguerre minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , Result Math. 52 (2008) 399–408.