C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 1–4

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Applications purement semi-affines et tressages

Completely semi-affine applications and tressages

Ahmed Ait Mokhtar

Département de mathématiques, École normale supérieure, Kouba, BP92, Alger, Algérie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 14 juillet 2009
Accepté après révision le 23 novembre 2009
Disponible sur Internet le 29 décembre 2009

Présenté par Jean-Pierre Kahane

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous montrons essentiellement deux résultats qui complètent l'article par Ait Mokhtar et al., 2008. Le premier, après avoir défini les applications *purement semi-affines*, consiste à donner l'écriture explicite de la composée de ces applications. Le deuxième résultat, après avoir défini le *tressage*, consiste à montrer que la composée de deux *tressages* est aussi un *tressage*.

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

In this Note, we show essentially two results which complete the article by Ait Mokhtar et al., 2008. The first one, having defined the maps *purement semi-affines*, consists in looking the writing clarify of the compound of these maps. The second result, having defined the *tressage*, consists in showing that the compound of two *tressages* is also a *tressage*.

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit A un anneau commutatif unitaire et $S(A)$ l'ensemble des suites à valeurs dans A. Dans l'article [1], nous avons montré que la composée de deux applications semi-affines est aussi une application semi-affine, sans pour autant donner l'écriture explicite. Dans la première section de cette Note, nous explicitons la composée de deux applications purement semi-affines (Proposition 2.3). Dans la deuxième section, nous démontrons deux lemmes (Lemme 3.7 et Lemme 3.8) que nous utilisons pour donner la forme précise de la composée de deux tressages (Théorème 3.9). Ces deux résultats originaux complètent ainsi l'article [1].

2. Applications purement semi-affines

Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappelons les notations $[x]$ pour la partie entière de x et $\{x\}$ pour sa partie fractionnaire.

Définition 2.1. Soit $(d,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $a = (a_i)_{0\leqslant i<d} \in \mathbb{N}^d$, $b = (b_i)_{0\leqslant i<d} \in \mathbb{Z}^d$ et $c = (c_l)_{0\leqslant l<dt} \in \mathbb{N}^{dt}$. On suppose ces données assujetties aux conditions $a_i t + b_i \geqslant 0$ pour tout $i \in \{0,\dots,d-1\}$. On définit l'application $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$\varphi_{(d,a,b,c,t)}(n) = \begin{cases} c_n & \text{si } n < dt, \\ a_r\left[\frac{n}{d}\right] + b_r & \text{si } n \geqslant dt, \quad r = d\left\{\frac{n}{d}\right\}. \end{cases}$$

Les applications de la forme $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$ sont dites *semi-affines*.

Adresse e-mail : ahmed.aitmokhtar@yahoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.11.021

Définition 2.2. Une application semi-affine $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$ est dite purement semi-affine lorsque t est nul.

Dans le cas d'une application purement semi-affine, l'ensemble des c_l est vide et $b_i \in \mathbb{N}$, pour $0 \leqslant i < d$. Ainsi, l'application purement semi-affine $\varphi_{(d,a,b,\varnothing,0)}$ notée simplement $\varphi_{(d,a,b)}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{(d,a,b)}(n) = a_r \left[\frac{n}{d}\right] + b_r, \quad r = d\left\{\frac{n}{d}\right\}.$$

Nous notons Φ l'ensemble des applications semi-affines et Φ_0 le sous-ensemble de Φ des applications purement semi-affines. Nous avons montré dans [1] que l'ensemble Φ est un sous-monoïde du monoïde des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Dans la proposition qui suit, nous explicitons l'écriture de la composée de deux éléments de Φ_0.

Proposition 2.3. *Soit $(d,d') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a = (a_0,\dots,a_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$, $b = (b_0,\dots,b_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$, $a' = (a'_0,\dots,a'_{d'-1}) \in \mathbb{N}^{d'}$, $b' = (b'_0,\dots,b'_{d'-1}) \in \mathbb{N}^{d'}$. Alors il existe $d'' \in \mathbb{N}^*$, $a'' \in \mathbb{N}^{dd'}$ et $b'' \in \mathbb{N}^{dd'}$ tels que : $\varphi_{(d,a,b)} \circ \varphi_{(d',a',b')} = \varphi_{(d'',a'',b'')}$. Plus précisément on a : $d'' = dd'$ et*

$$\forall k \in \{0,1,\dots,dd'-1\}, \quad a''_k = a_r a'_s, \quad b''_k = a_r d\left[\frac{a'_s[\frac{k}{d'}] + b'_s}{d}\right] + b_r, \quad 0 \leqslant r < d,\ 0 \leqslant s < d'.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons, $n = dd'q + k = dd'q + d'q_1 + s = d'(dq + q_1) + s$, de telle sorte que $k = d'q_1 + s$, $q_1 = [\frac{k}{d'}]$ et $s = d'\{\frac{k}{d'}\}$.

On a alors : $(\varphi_{(d,a,b)} \circ \varphi'_{(d',a',b')})(n) = \varphi_{(d,a,b)}(a'_s[\frac{n}{d'}] + b'_s) = \varphi_{(d,a,b)}(a'_s dq + a'_s q_1 + b'_s)$.

En posant $a'_s q_1 + b'_s = dq_2 + r$, avec $r = d\{\frac{a'_s[\frac{k}{d'}]+b'_s}{d}\}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\big(\varphi_{(d,a,b)} \circ \varphi'_{(d',a',b')}\big)(n) &= \varphi_{(d,a,b)}\big(a'_s dq + dq_2 + r\big) \quad \text{avec } q_2 = d\left[\frac{a'_s q_1 + b'_s}{d}\right] \\ &= \varphi_{(d,a,b)}\big(d\big(a'_s q + q_2\big) + r\big) = a_r\big(a'_s q + q_2\big) + b_r = a_r a'_s\left[\frac{n}{dd'}\right] + a_r q_2 + b_r.\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $d'' = dd'$, $a''_k = a_r a'_s$ et $b''_k = a_r q_2 + b_r$, avec $0 \leqslant k < dd'$, $0 \leqslant r < d$, $0 \leqslant s < d'$. □

Corollaire 2.4. *L'ensemble Φ_0 est un sous-monoïde du monoïde Φ.*

3. Composition de tressages

Soit A un anneau commutatif unitaire et $S(A)$ l'ensemble des suites à valeurs dans A.

Définition 3.1. Soit u et v deux éléments de $S(A)$. Le produit de Hadamard des suites u et v est la suite $w = u \odot v$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w(n) = u(n)v(n)$.

Muni de l'addition terme à terme et du produit de Hadamard, l'ensemble $S(A)$ est une A-algèbre appelée l'algèbre de Hadamard des suites.

Définition 3.2. L'application T de $S(A)$ dans $S(A)$ qui, à toute suite u, associe la suite Tu définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $(Tu)(n) = u(n+1)$, est appelée application *décalage* (ou shift).

Définition 3.3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{0,1,\dots,d-1\}$. L'application ϕ_d de $S(A)$ dans $S(A)$ qui, à toute suite u, associe la suite $\phi_d u$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $(\phi_d u)(n) = u(dn)$, est appelée d-décimation (ou décimation).

Définition 3.4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. L'application E_d de $(S(A))^d$ dans $S(A)$, qui à tout d-uplet $(u_0,\dots,u_{d-1})$ associe la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u(dn+j) = u_j(n)$, $j \in \{0,1,\dots,d-1\}$, est appelée emboîtement.

Définition 3.5. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $J = (j_0, j_1, \dots, j_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ et σ une permutation de l'ensemble $\{0,1,\dots,d-1\}$. On définit les applications suivantes : $\Delta_d : S(A) \longrightarrow (S(A))^d$, $\Sigma_\sigma : (S(A))^d \longrightarrow (S(A))^d$, $T_J : (S(A))^d \longrightarrow (S(A))^d$, par :

a) $\forall u \in S(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\Delta_d u)(n) = ((\phi_d u)(n), (\phi_d \circ Tu)(n), \dots, (\phi_d \circ T^{d-1}u)(n))$.
b) $\forall (u_0,\dots,u_{d-1}) \in (S(A))^d$, $\Sigma_\sigma(u_0,u_1,\dots,u_{d-1}) = (u_{\sigma(0)}, u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(d-1)})$.
c) $\forall (u_0,\dots,u_{d-1}) \in (S(A))^d$, $T_J(u_0,\dots,u_{d-1}) = (T^{j_0}u_0, T^{j_1}u_1, \dots, T^{j_{d-1}}u_{d-1})$.

Les applications données ci-dessus sont bien définies (voir [1]) et $\Delta_d^{-1} = E_d$.

Définition 3.6. L'application $E_d \circ \Sigma_\sigma \circ T_J \circ \Delta_d$ est appelée application *tressage*, notée $\psi_{d,J,\sigma}$.
Pour $u \in S(A)$, la suite $\psi_{d,J,\sigma} u$ est dite *tressage*.

Nous avons montré dans [1] qu'un tressage $\psi_{d,J,\sigma}$ est bijectif si et seulement si J est nul et que la composition de deux tressages bijectifs est un tressage bijectif. Dans cette note, nous montrons que la composition de deux tressages quelconques est aussi un tressage. Pour cela, nous avons besoin des deux lemmes qui suivent.

Lemme 3.7. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $J = (j_0, \dots, j_{d-1})$, $J' = (j'_0, \dots, j'_{d-1})$ dans $\mathbb{N}^d$ et σ, σ' deux permutations de l'ensemble $\{0, \dots, d-1\}$. Alors il existe $J'' = (j''_0, \dots, j''_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ et une permutation σ'' de l'ensemble $\{0, \dots, d-1\}$ tels que l'on ait : $\psi_{d,J,\sigma} \circ \psi_{d,J',\sigma'} = \psi_{d,J'',\sigma''}$.*

Démonstration. Rappelons, (voir [1]), que pour un tressage quelconque $\psi_{d,J,\sigma}$, on a pour toute suite u : $(\psi_{d,J,\sigma})(u) = u \circ \varphi$, où φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donnée par $\varphi(n) = d([\frac{n}{d}] + j_{\sigma(r)}) + \sigma(r)$, $r = d\{\frac{n}{d}\}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi')(n) &= d\left(\left[\frac{\varphi'(n)}{d}\right] + j_{\sigma(r)}\right) + \sigma(r), \quad r = d\left\{\frac{\varphi'(n)}{d}\right\} \\ &= d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j'_{\sigma'(r)} + j_{(\sigma\circ\sigma')(r)}\right) + (\sigma \circ \sigma')(r).\end{aligned}$$

En posant $\sigma'' = \sigma \circ \sigma'$ et $k = (\sigma \circ \sigma')(r)$ en sachant que $0 \leqslant r < d-1$ et

$$\forall k \in \{0, \dots, d-1\}, \quad j''_k = j_k + j'_{\sigma^{-1}(k)},$$

on obtient :

$$(\varphi \circ \varphi')(n) = d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j''_{\sigma''(k)}\right) + \sigma''(k), \quad \text{où } k = d\left\{\frac{n}{d}\right\}. \qquad \square$$

Example. Soit $u \in S(A)$. Pour $d = 3$, $J = (1,0,1)$, $J' = (0,1,2)$ et $\sigma = (1,2)$, $\sigma' = (0,2)$ deux permutations de $\{0,1,2\}$, on trouve : $J'' = (1,1,3)$, $\sigma'' = (0,1,2)$, de sorte que l'on ait : $(\psi_{d,J,\sigma} \circ \psi_{d,J',\sigma'})u = \psi_{d,J'',\sigma''}u = (u(11), u(3), u(4), u(14), u(6), u(7), u(17), u(9), u(10), u(20), \dots)$.

Lemme 3.8. *Soit $(d, d') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $J = (j_0, \dots, j_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ et σ une permutation de l'ensemble $\{0, \dots, d-1\}$. Alors il existe un dd'-uplet $J' = (j'_0, \dots, j'_{dd'-1})$ dans $\mathbb{N}^{dd'}$ et une permutation τ de l'ensemble $\{0, \dots, dd'-1\}$ tels que l'on ait : $\psi_{d,J,\sigma} = \psi_{dd',J',\tau}$.*

Démonstration. On considère l'application τ suivante définie par :

$$\forall r' \in \{0, \dots, dd'-1\}, \quad \tau(r') = dd'\left\{\frac{1}{d'}\left[\frac{r'}{d}\right] + \frac{j_{\sigma(r)}}{d'} + \frac{\sigma(r)}{dd'}\right\}, \quad \text{où } r = d\left\{\frac{r'}{d}\right\},$$

et le dd'-uplet $J' = (j'_0, \dots, j'_{dd'-1})$ donné par :

$$\forall k \in \{0, \dots, dd'-1\}, \quad j'_k = \left[\frac{1}{d'}\left[\frac{\tau^{-1}(k)}{d}\right] + \frac{j_{\sigma(r)}}{d'} + \frac{\sigma(r)}{dd'}\right], \quad \text{où } r = d\left\{\frac{\tau^{-1}(k)}{d}\right\}.$$

Un simple calcul, modulo dd', montre que τ est injective, donc une permutation de l'ensemble $\{0, \dots, dd'-1\}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $[\frac{n}{d}] = d'[\frac{n}{dd'}] + [\frac{r'}{d}]$, $r' = \{\frac{n}{dd'}\}$, ensuite vérifier que les applications φ et φ' asociées aux deux tressages $\psi_{d,J,\sigma}$ et $\psi_{dd',J',\tau}$ sont égales. $\square$

Example. Soit $u \in S(A)$. Pour $d = 2$, $d' = 3$, $J = (1,2)$ et $\sigma = (0,1)$ une permutation de $\{0,1\}$, on trouve : $\tau = (0,5)(1,2)(3,4)$ et $J' = (1,1,0,1,0,0)$, de sorte que l'on ait : $\psi_{d,J,\sigma} = \psi_{dd',J',\tau} = (u(5), u(2), u(7), u(4), u(9), u(6), u(11), u(8), u(13), u(10), \dots)$.

Théorème 3.9. *Soit $(d, d') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $(J, J') \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^{d'}$ et σ, σ' deux permutations des ensembles $\{0, \dots, d-1\}$ et $\{0, \dots, d'-1\}$. Alors il existe un d''-uplet $J'' = (j''_0, \dots, j''_{d''-1}) \in \mathbb{N}^{dd'}$ et une permutation σ'' de l'ensemble $\{0, \dots, d''-1\}$) tels que l'on ait : $\psi_{d,J,\sigma} \circ \psi_{d',J',\sigma'} = \psi_{d'',J''\sigma''}$.*

Démonstration. Soit $d, d', J, J', \sigma, \sigma'$ les données du théorème. D'après le Lemme 3.8, il existe deux dd'-uplets $L = (l_0, \ldots, l_{dd'-1})$, $L' = (l'_0, \ldots, l'_{dd'-1})$ dans $\mathbb{N}^{dd'}$ et deux permutations τ, τ' de l'ensemble $\{0, \ldots, dd'-1\}$ tels que l'on ait : $\psi_{d,J,\sigma} = \psi_{dd',L,\tau}$ et $\psi_{d',J',\sigma'} = \psi_{dd',L',\tau'}$. Et en vertu du Lemme 3.7, il existe un dd'-uplet J'' dans $\mathbb{N}^{dd'}$ et une permutation σ'' de l'ensemble $\{0, \ldots, dd'-1\}$ tels que l'on ait : $\psi_{dd',L,\tau} \circ \psi_{dd',L',\tau'} = \psi_{dd',J'',\sigma''}$. Plus précisément, les dd'-uplets L, L' et les permutations τ, τ' sont données explicitement par le même lemme, et on a : $d'' = dd'$, $\sigma'' = \tau \circ \tau'$ et $\forall k \in \{0, \ldots, d''-1\}$, $j_k = l_k + l'_{\tau^{-1}(k)}$, de sorte que l'application $\psi_{d,J,\sigma} \circ \psi_{d',J',\sigma'} = \psi_{d'',J'',\sigma''}$ est un tressage. $\square$

Example. Soit $u \in S(A)$. Pour $d_1 = 3$, $J_1 = (3,3,3) \in \mathbb{N}^3$, $\sigma_1 = (0,2)$ une permutation de $\{0,1,2\}$ et pour $d_2 = 4$, $J_2 = (2,2,2,2) \in \mathbb{N}^4$, $\sigma_2 = (1,2)$ une permutation de $\{0,1,2,3\}$, on trouve : $\tau = (0,7)(1,5,8,11)(2,6)(3,9,4,10)$ et $J = (2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1)$, de sorte que l'on ait : $(\psi_{3,J_1,\sigma_1} \circ \psi_{4,J_2,\sigma_2})(u) = (\psi_{12,J,\tau})(u) = (u(19), u(17), u(18), u(21), u(22), u(20), u(26), u(24), u(23), u(28), u(27), u(25), u(31), u(39), \ldots)$.

Remarque 3.10.

1. Les tressages ne commutent pas, en général, par exemple on a : $\psi_{3,J_1,\sigma_1} \circ \psi_{4,J_2,\sigma_2} \neq \psi_{4,J_2,\sigma_2} \circ \psi_{3,J_1,\sigma_1}$.
2. Nous avons montré dans [1] que les applications semi-affines donnent tous les endomorphismes continus de l'algèbre des suites récurrentes linéaires à coefficients constants et en particulier ceux des applications tressages.

Remerciements

L'auteur exprime ses remerciements au DMI-Xlim de l'Université de Limoges pour son accueil chaleureux, où ce travail a été réalisé. Il tient à remercier Mrs. A. Salinier et A. Necer pour leurs précieux conseils et aide.

Références

[1] A. Ait Mokhtar, A. Necer, A. Salinier, Endomorphismes d'algèbres de suites, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 20 (2008) 1–21.