Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1373–1378
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Un résultat de stabilité pour la récupération d'un paramètre du système de la viscoélasticité 3D ☆

Maya de Buhan [a,b], Axel Osses [b]

[a] *UPMC Univ Paris 06, UMR 7598, laboratoire J.L. Lions, 75005 Paris, France*
[b] *Universidad de Chile, UMI 2807, Centro de Modelamiento Matemático, Santiago, Chile*

Reçu le 17 avril 2009 ; accepté après révision le 24 octobre 2009

Disponible sur Internet le 6 novembre 2009

Présenté par Gilles Lebeau

Résumé

Dans cette Note, on démontre une inégalité de Carleman pour le système hyperbolique intégro-différentiel de la viscoélasticité et on utilise cette inégalité pour prouver un résultat de stabilité pour le problème inverse de récupération d'un coefficient viscoélastique à partir d'une seule mesure interne. ***Pour citer cet article : M. de Buhan, A. Osses, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

A stability result for the recovery of a 3D viscoelasticity system coefficient. In this Note, we prove a Carleman's estimate for the integro-differential hyperbolic system of the viscoelasticity problem and we use this estimate to obtain a stability result for the inverse problem of recovering a viscoelastic coefficient from a unique internal measure. ***To cite this article: M. de Buhan, A. Osses, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Let Ω be an open bounded domain of $\mathbb{R}^3$ with a smooth boundary. For $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$, we consider the following integro-differential hyperbolic system:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\lambda,\mu,\tilde{\lambda},\tilde{\mu}} u(x,t) = \partial_t^2 u(x,t) - \nabla \cdot (\mu(x)(\nabla u(x,t) + \nabla u(x,t)^T) + \lambda(x)(\nabla \cdot u)(x,t) I) \\ \quad + \int_0^t \nabla \cdot (\tilde{\mu}(x,s)(\nabla u(x,t-s) + \nabla u(x,t-s)^T) + \tilde{\lambda}(x,s)(\nabla \cdot u)(x,t-s) I)\, \mathrm{d}s = F(x,t), \\ u(x,0) = \bar{u}_0(x) \quad \text{and} \quad \partial_t u(x,0) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \qquad u(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty). \end{cases} \tag{1}$$

This system models the dynamics of a 3D viscoelastic material subjected to a load F, u being the displacement vector, (λ, μ) the Lamé coefficients and $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ the viscosity coefficients, respectively. We assume that the coefficient $\tilde{\mu}$ can be decomposed as $\tilde{\mu}(x,t) = p(x)h(t)$. Hence, knowing $h(t)$, we would like to recover $p(x)$ from measurements of the solution $u(x,t)$ in $\omega \times (0,T)$, where ω is a part of Ω and $T > 0$.

☆ Ce travail a été partiellement financé par CNRS, CONICYT, EGIDE, FONDECYT 1061263 et Math-AmSud CIP-EDP.
Adresses e-mail : debuhan@ann.jussieu.fr (M. de Buhan), axosses@dim.uchile.cl (A. Osses).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.10.022

Several authors have dealt the problem of recovering the coefficients of the viscoelasticity system. Some of them (see Janno and Wolfersdorf [6] and references therein) recovered the time dependance h of the coefficient $\tilde{\mu}$ by reducing the problem to a non-linear Volterra integral equation using Fourier's method. The recovering of the space dependance p of the coefficient $\tilde{\mu}$ consists in using Carleman estimates [3]. Thus, in 2006, Cavaterra et al. [4] modified a pointwise Carleman inequality [7] for a hyperbolic scalar equation and integrated, thanks to a change of variable, the integral term. They used this inequality to solve the inverse problem of recovering the source term in the integro-differential scalar equation. Then, in 2007, Lorenzi et al. [8] recovered the coefficient p for the viscoelasticity system from 3 measures, relying on the assumption that all the coefficients in Eq. (1) are independent of the third space variable. This allowed them to reduce the problem to a scalar equation and to apply the results shown in [4]. In 2008, Bellassoued et al. [1] proved a Carleman's estimate for the 3D Lamé system – Eq. (1) without the integral term. Their technique consisted in decoupling the system by writing the equations satisfied by u, $\nabla \wedge u$ and $\nabla \cdot u$ and then by applying well known results for hyperbolic scalar equations.

The main result of this Note is Theorem 2 which establishes the stability and the uniqueness with respect to the measurements for the inverse problem of recovering the coefficient p. The use of the decoupling method introduced by [1] along with the techniques to deal with the integral term proposed by [4] make this work original. The difficulties lie in the fact that the trace of the functions $\nabla \wedge u$ and $\nabla \cdot u$ is not defined on $\partial\Omega$ and that the presence of the integral term does not allow to work on $[-T, T]$, as usual.

Condition 1. *The scalar function q satisfies Condition* 1 *if*: (i) *there exists $K > 0$ such that $\forall x \in \overline{\Omega}$, $q(x) \geqslant K$,* (ii) *there exists $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ such that $\forall x \in \overline{\Omega}$, $\frac{K}{2} + \nabla q(x) \cdot (x - x_0) \geqslant 0$.*

Hypothesis 1 *(on the coefficients).* (i) *$(\lambda, \mu) \in (C^2(\overline{\Omega}))^2$ and $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in (C^2(\overline{\Omega \times (0,T)}))^2$ are such that $u \in W^{8,\infty}(\Omega \times (0,T))^3$,* (ii) *$\mu$ and $\lambda + 2\mu$ satisfy Condition* 1, (iii) *p is known in a neighborhood V of $\partial\Omega$,* (iv) *$h(0) \neq 0$, $h'(0) = 0$.*

Notation. We define $d = \sqrt{\sup_{x\in\Omega} |x - x_0|^2 - \inf_{x\in\Omega} |x - x_0|^2}$.

For $\varepsilon > 0$, we pose $\Omega(\varepsilon) = \{x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon\}$ and we fix ε such that $\Omega \setminus \Omega(\varepsilon) \subset V$.

Hypothesis 2 *(on the observation part). $T > T_0 = \frac{\mathrm{d}}{\sqrt{\beta}}$ where $\beta > 0$ will be precised later and $\omega \supset \Omega(\varepsilon) \setminus \Omega(2\varepsilon)$.*

Hypothesis 3 *(on the initial data). We suppose that $\bar{u}_0$ is such that there exists $M > 0$ such that*: $|(\nabla\bar{u}_0 + \nabla\bar{u}_0^T)(x) \cdot (x - x_0)| \geqslant M$, $\forall x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}$.

Theorem 2 *(Hölder Stability). Let u (respectively $\bar{u}$) be the solution of* (1) *associated to the coefficient p (respectively $\bar{p}$). Under Hypotheses* 1, 2 *and* 3, *there exists a constant $\kappa \in (0,1)$ such that the following estimate holds true*:

$$\|p - \bar{p}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\|u - \bar{u}\|^{\kappa}_{H^2(\omega\times(0,T))},$$

where C depends on the $C^2(\overline{\Omega})$-norm of p and $\bar{p}$ and on the $W^{8,\infty}(\Omega \times (0,T))$-norm of $\bar{u}$.

Section 1 is devoted to the proof of a Carleman's estimate (Theorem 1) for the integro-differential system. The proof consists in decoupling the system of Eq. (2). Then, the idea is to introduce a change of variable (3) to reduce the problem to a hyperbolic equation for which the Carleman's estimate is well known [7]. Finally, we come back to the initial variable by a series of inequalities assuming the regularity of the coefficients and the fundamental Lemma 3.1.1 of [2]. Section 2 presents the proof of the stability result (Theorem 2). First, we bring the unknown parameter p to the source by writing Eq. (10) satisfied by $\hat{v} = \partial_t(u - \bar{u})$. Then, we apply the method of Bukhgeim and Klibanov [2], i.e. we differentiate Eq. (10) to bring the parameter in the initial condition (11) and we apply the Carleman's estimate (Theorem 1) to the new variable $\hat{w} = \partial_t\hat{v}$ (12) in order to bound the initial energy, which depends on p, by the norm of the measurements in ω (13).

1. Introduction

On considère le système hyperbolique intégro-différentiel introduit en (1). Ce système décrit la dynamique d'un matériau viscoélastique 3D soumis à un chargement F, u étant le vecteur déplacement, λ et μ les coefficients de Lamé et $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ les coefficients de viscosité. On suppose que le coefficient $\tilde{\mu}$ peut s'écrire sous la forme $\tilde{\mu}(x,t) = p(x)h(t)$. Connaissant $h(t)$, on cherche à récupérer $p(x)$ à partir de la mesure de la solution $u(x,t)$ dans $\omega \times (0,T)$ où ω est une partie de Ω et $T > 0$.

Plusieurs auteurs ont adressé le problème de récupération des coefficients du système de la viscoélasticité. Ainsi, certains (voir Janno et Wolfersdorf [6] et références) récupèrent la dépendance temporelle h du coefficient $\tilde{\mu}$ en réduisant le problème à une équation intégrale de Volterra non linéaire par une méthode de Fourier. Pour ce qui est de la récupération de la dépendance spatiale p du coefficient $\tilde{\mu}$, une méthode consiste à utiliser les inégalités de Carleman [3]. Ainsi, en 2006, Cavaterra et al. [4] modifient une inégalité de Carleman ponctuelle [7] pour une équation hyperbolique scalaire et y intègrent, grâce à un changement de variable, le terme intégral. Ils utilisent alors cette inégalité pour résoudre le problème inverse de récupération de la source de l'équation hyperbolique intégro-différentielle scalaire. Puis, en 2007, Lorenzi et al. [8] cherchent à résoudre le problème de récupération du coefficient p pour le système de la viscoélasticité. Pour cela, ils font l'hypothèse que les coefficients de l'équation sont indépendants d'une des variables d'espace, ce qui leur permet de ramener le problème à celui d'une équation scalaire et d'appliquer les résultats de [4]. Ils réussissent ainsi à récupérer le coefficient à partir de 3 mesures. En 2008, Bellassoued et al. [1] démontrent une inégalité de Carleman pour le système de Lamé 3D – Éq. (1) sans le terme intégral. Leur technique consiste à découpler le système en écrivant les équations vérifiées par u, $\nabla \wedge u$ et $\nabla \cdot u$ et à appliquer les résultats connus concernant les équations hyperboliques scalaires.

Le résultat principal de cette Note est le Théorème 2 qui établit la stabilité et l'unicité pour le problème inverse de récupération du coefficient p à partir d'une seule mesure interne. C'est un premier pas vers l'obtention d'un résultat de stabilité relatif à des observations frontières (article en rédaction). La Section 1 est consacrée à la preuve de l'inégalité de Carleman (Théorème 1) pour le système intégro-différentiel (1). L'originalité du travail réside dans la combinaison du découplage des équations introduit par [1] et de la technique de traitement des termes intégraux proposée par [4]. Les difficultés viennent du fait que la trace des fonctions $\nabla \wedge u$ et $\nabla \cdot u$ n'est pas définie sur $\partial\Omega$ et que la présence du terme intégral ne permet pas de travailler sur l'intervalle usuel $[-T,T]$. Enfin, la Section 2 est la démonstration du Théorème 2 qui utilise l'inégalité de Carleman précédemment démontrée et la méthode de Bukhgeim et Klibanov [2].

2. Inégalité de Carleman

Pour $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ et $\beta > 0$, on introduit la fonction $\varphi(x,t) = |x-x_0|^2 - \beta t^2$, $\forall (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$ et on définit : $d_0 = \inf_{x\in\Omega} |x-x_0|$ et $d = \sqrt{\sup_{x\in\Omega} |x-x_0|^2 - d_0^2}$.

On note $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega(\varepsilon) = \{x \in \Omega, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon\}$ et $Q(\varepsilon,\delta) = \Omega(\varepsilon) \times (0, T-\delta)$ pour $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. On fixe ε tel que $\Omega \setminus \Omega(\varepsilon) \subset V$ (voir Hypotèse 1(iii)). Pour $\eta > 0$ fixé, on peut, d'après l'Hypothèse 2, trouver un δ suffisamment petit tel que $\varphi(x,t) \leqslant d_0^2 - \eta$, $\forall (x,t) \in \Omega \times (T-2\delta, T)$.

Pour tout domaine $Q \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, pour tout $\sigma > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit les normes suivantes :

$$\|u\|^2_{H^{1,\sigma}(Q)} = \|\nabla_{x,t} u\|^2_{L^2(Q)} + \sigma^2 \|u\|^2_{L^2(Q)} \quad \text{et} \quad \|u\|^2_{H_x^{k,\sigma}(Q)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sigma^{2(k-|\alpha|)} \|\partial_x^\alpha u\|^2_{L^2(Q)}.$$

Théorème 1 *(Inégalité de Carleman). Il existe $\sigma_0 > 0$ et $\beta > 0$ suffisamment petit tels que pour tout $\sigma \geqslant \sigma_0$, la solution u du problème* (1) *avec $u(x,0) = 0$ ou $\partial_t u(x,0) = 0$ vérifie l'estimation suivante* :

$$\frac{C}{\sigma} \|u e^{\sigma\varphi}\|^2_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))} \leqslant \|F e^{\sigma\varphi}\|^2_{L^2(Q)} + \|\nabla F e^{\sigma\varphi}\|^2_{L^2(Q)} + e^{C\sigma} \|u\|^2_{H^2(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(2\varepsilon,\delta))} + \sigma^3 e^{2\sigma(d_0^2-\eta)} \|u\|^2_{H^2(Q)},$$

où $C > 0$ dépend de la norme $W^{2,\infty}(Q)$ du coefficient $\tilde{\mu}$ mais est indépendant de σ.

Remarque. Le dernier terme de cette inégalité de Carleman n'est pas standard car il est global mais il disparaîtra en (13) grâce à un choix convenable de σ.

Preuve. Tout d'abord, on prend le rotationnel et la divergence du système (1). On introduit les vecteurs $u_1 = u$, $u_3 = \nabla \wedge u$ et le scalaire $u_2 = \nabla \cdot u$ qui vérifient alors le système de sept équations suivant :

$$\partial_t^2 u_i(x,t) - q_i(x)\Delta u_i(x,t) + \int_0^t \tilde{q}_i(x,t-s)\Delta u_i(x,s)\,ds = F_i(x,t) + A_i(u_1,u_2,u_3)(x,t), \quad \forall i \in \{1,2,3\}, \tag{2}$$

où $q_1 = q_2 = \mu$, $q_3 = \lambda + 2\mu$, $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{\mu}$, $\tilde{q}_3 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}$, $F_1 = F$, $F_2 = \nabla \wedge F$, $F_3 = \nabla \cdot F$ et où les termes de couplage A_i sont des opérateurs intégro-différentiels du premier ordre en x et t dont tous les coefficients sont bornés dans Q. On introduit ensuite le changement de variable suivant :

$$\tilde{u}_i(x,t) = q_i(x)u_i(x,t) - \int_0^t \tilde{q}_i(x,t-s)u_i(x,s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall i \in \{1,2,3\},\ \forall (x,t) \in Q. \tag{3}$$

Alors les $\tilde{u}_i$ vérifient le système d'équations hyperboliques de la forme : $\partial_t^2 \tilde{u}_i(x,t) - q_i(x)\Delta\tilde{u}_i(x,t) = q_i(x)(F_i(x,t) + A_i(u_1,u_2,u_3)(x,t)) + L_i(u_i)(x,t)$, $\forall i \in \{1,2,3\}$, où les L_i sont des opérateurs intégro-différentiels du 1er ordre dont tous les coefficients sont bornés dans Q. On introduit la fonction plateau $\chi(x,t) = \chi_1(x)\chi_2(t)$ où $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ sont telles que :

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega(2\varepsilon), \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega(\varepsilon), \end{cases} \qquad \chi_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T-2\delta], \\ 0, & t \in [T-\delta, T], \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \chi_1, \chi_2 \leqslant 1, \tag{4}$$

et $\forall i \in \{1,2,3\}$, on pose $u_i^*(x,t) = \chi(x,t)\tilde{u}_i(x,t)$ qui satisfait une équation de la forme : $\partial_t^2 u_i^*(x,t) - q_i(x)\Delta u_i^*(x,t) = \chi(x,t)(q_i(x)(F_i(x,t) + A_i(u_1,u_2,u_3)(x,t)) + L_i(u_i)(x,t)) + \tilde{L}_i(\tilde{u}_i)(x,t)$. Puisque $u_i^*(x,0) = 0$ ou $\partial_t u_i^*(x,0) = 0$ et que, d'après l'Hypothèse 1(ii), le coefficient q_i vérifie la Condition 1, on peut appliquer le Théorème B de [4] à u_i^*, à savoir qu'il existe $\sigma_0 > 0$ et $\beta > 0$ suffisamment petit tels que $\forall \sigma > \sigma_0$:

$$\sigma \left\| u_i^* \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q)}^2 \leqslant C \left\| \left(\partial_t^2 u_i^* - q_i \Delta u_i^*\right) \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{L^2(Q)}^2, \tag{5}$$

sans terme de bord car u_i^* et $\nabla_{x,t} u_i^*$ sont nuls sur $\partial Q \setminus (\Omega \times \{0\})$. On tient alors compte du fait que χ est nul sur $Q \setminus Q(\varepsilon,\delta)$, que tous les coefficients λ, μ, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont bornés dans Q (Hypothèse 1(i)), que tous les termes des opérateurs A_i, L_i et $\tilde{L}_i$ sont d'ordre inférieur ou égal à 1 et que le Lemme 3.1.1 de [2] permet de majorer les termes intégraux de A_i, L_i et $\tilde{L}_i$ de la façon suivante :

$$\int_Q \left(\int_0^t \left| u(x,s) \right| \mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{C}{\sigma} \int_Q \left| u(x,t) \right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

pour majorer le terme :

$$\left\| \left(\partial_t^2 u_i^* - q_i \Delta u_i^*\right) \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leqslant C \left\| F_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{L^2(Q)}^2 + C \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} \left\| u_j \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2. \tag{7}$$

On utilise à nouveau le changement de variable (3) : $u_i(x,t) = \frac{1}{q_i(x)}\tilde{u}_i(x,t) + \int_0^t \frac{\tilde{q}_i(x,t-s)}{q_i(x)} u_i(x,s)\,\mathrm{d}s$, $\forall i \in \{1,2,3\}$ $\forall (x,t) \in Q$, ce qui conduit à écrire, compte-tenu de l'Hypothèse 1(ii) et grâce au Lemme (6), $\forall i \in \{1,2,3\}$:

$$\int_{Q(\varepsilon,\delta)} \left| u_i(x,t) \right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C \int_{Q(\varepsilon,\delta)} \left| \tilde{u}_i(x,t) \right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{C}{\sigma} \int_{Q(\varepsilon,\delta)} \left| u_i(x,t) \right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Pour σ suffisamment grand, le deuxième terme est absorbé. On procède de même pour les dérivées, ce qui permet d'obtenir, $\forall i \in \{1,2,3\}$:

$$\left\| u_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \leqslant C \left\| \tilde{u}_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2. \tag{8}$$

Par ailleurs, $\chi = 1$ sur $Q(2\varepsilon, 2\delta)$ donc on a $\tilde{u}_i = u_i^*$, d'où $\forall i \in \{1,2,3\}$:

$$\left\| \tilde{u}_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 = \left\| u_i^* \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(2\varepsilon,2\delta))}^2 + \left\| \tilde{u}_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(2\varepsilon,2\delta))}^2. \tag{9}$$

Finalement, en utilisant (5), (7), (8) et (9) et de nouveau le Lemme (6), on obtient :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} \sigma \left\| u_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \leqslant C \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} \left(\left\| F_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| u_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma \left\| u_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(2\varepsilon,2\delta))}^2 \right)$$

et grâce aux poids de Carleman, on absorbe le deuxième terme dans le membre de gauche. On remarque ensuite que, puisque $\varphi(x,t) \leqslant d_0^2 - \eta$, $\forall (x,t) \in \Omega \times (T-2\delta, T)$, on a :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant 3} \sigma \left\| u_i \mathrm{e}^{\sigma\varphi} \right\|^2_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(2\varepsilon,2\delta))} \leqslant \mathrm{e}^{C\sigma} \|u\|^2_{H^2(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(2\varepsilon,\delta))} + \sigma^3 \mathrm{e}^{2\sigma(d_0^2-\eta)} \|u\|^2_{H^2(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(\varepsilon,2\delta))}.$$

Finalement, on utilise le Lemme 2.2 de [1] qui, grâce à la relation $\Delta u = \nabla \wedge (\nabla \wedge u) - \nabla(\nabla \cdot u)$, majore la norme $H_x^{2,\sigma}$ de u par les normes $H^{1,\sigma}$ des u_i, ce qui conclut la démonstration du Théorème 1. □

3. Résultat de stabilité

Théorème 2 *(Stabilité Hölder). Soit u (respectively $\bar{u}$) la solution de Éq.* (1) *associée au coefficient p (respectively $\bar{p}$). Sous les Hypothèses* 1 (*sur les coefficients*), 2 (*sur T et ω*) *et* 3 (*sur la donnée initiale*), *il existe $\kappa \in (0,1)$ telle que* :

$$\|p - \bar{p}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C \|u - \bar{u}\|^{\kappa}_{H^2(\omega\times(0,T))},$$

où $C > 0$ dépend des normes $C^2(\bar{\Omega})$ de p et $\bar{p}$ et de la norme $W^{8,\infty}(\Omega \times (0,T))$ de $\bar{u}$. De ce résultat découle immédiatement l'unicité.

Remarque 1. Si on affaiblit l'Hypothèse 2 en prenant $\omega \supset (\Omega(\varepsilon) \setminus \Omega(2\varepsilon)) \cap \{x \in \Omega, |x - x_0| \geqslant \bar{\varepsilon}\}$, le résultat reste vrai, à condition de supposer alors que $V \supset (\Omega \setminus \Omega(\varepsilon)) \cup \{x \in \Omega, |x - x_0| < \bar{\varepsilon}\}$.

Preuve. On pose $\hat{p} = p - \bar{p}$ et $\hat{u} = u - \bar{u}$ qui vérifie alors l'équation :

$$\mathscr{L}_{\lambda,\mu,\tilde{\lambda},p} \hat{u}(x,t) = -\int_0^t h(s) \nabla \cdot \big(\hat{p}(x)\big(\nabla \bar{u}(x,t-s) + \nabla \bar{u}(x,t-s)^T\big)\big)\,\mathrm{d}s, \quad \forall (x,t) \in Q$$

avec les conditions initiales et les conditions de bord nulles. On dérive alors cette équation en temps et on pose $\hat{v} = \partial_t \hat{u}$ qui satisfait l'équation :

$$\mathscr{L}_{\lambda,\mu,\tilde{\lambda},p} \hat{v} = -\int_0^t h(s) \nabla \cdot \big(\hat{p}\big(\nabla \bar{v}(t-s) + \nabla \bar{v}(t-s)^T\big)\big)\,\mathrm{d}s - h(t) \nabla \cdot \big(\hat{p}\big(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^T\big)\big). \tag{10}$$

Ainsi, le paramètre que l'on cherche à récupérer apparaît dans la source et on peut appliquer la méthode de Bukhgeim et Klibanov [2]. Pour cela, on dérive de nouveau l'équation en posant $\hat{w} = \partial_t^2 \hat{u}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\lambda,\mu,\tilde{\lambda},p} \hat{w} = -\int_0^t h(s) \nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{w}(t-s) + \nabla \bar{w}(t-s)^T))\,\mathrm{d}s - h'(t) \nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^T)), \\ \hat{w}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \hat{w}(0) = -h(0) \nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^T)) \quad \text{dans } \Omega, \qquad \hat{w} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{11}$$

Le coefficient à récupérer apparaît dans les conditions initiales. On introduit de nouveau la fonction χ_2 définie en (4) et on pose $w^*(x,t) = \chi_2(t)\hat{w}(x,t)$. Comme w^* est nulle pour $t \in [T-\delta, T]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(\varepsilon)} \left|\partial_t w^*(x,0)\right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^T \partial_t \left(\int_{\Omega(\varepsilon)} \left|\partial_t w^*(x,t)\right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \int_{\Omega(\varepsilon)} 4\beta t\sigma \left|\partial_t w^*(x,t)\right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_{\Omega(\varepsilon)} 2\partial_t w^*(x,t) \partial_t^2 w^*(x,t) \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C \int_{Q(\varepsilon,\delta)} \left(\sigma \left|\partial_t^2 \hat{u}(x,t)\right|^2 + \sigma \left|\partial_t^3 \hat{u}(x,t)\right|^2 + \left|\partial_t^4 \hat{u}(x,t)\right|^2\right) \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On fait le même raisonnement pour les dérivées d'ordre $|\alpha| \leqslant 2$, ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\sigma^{2(1-|\alpha|)}\int_{\Omega(\varepsilon)}\left|\partial_x^\alpha(\partial_t w)(x,0)\right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{C}{\sigma}\big(\big\|\big(\partial_t^2\hat{u}\big)\mathrm{e}^{\sigma\varphi}\big\|^2_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}+\big\|\big(\partial_t^3\hat{u}\big)\mathrm{e}^{\sigma\varphi}\big\|^2_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}+\big\|\big(\partial_t^4\hat{u}\big)\mathrm{e}^{\sigma\varphi}\big\|^2_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}\big).$$

On voit donc qu'il faut appliquer l'inégalité de Carleman (Théorème 1) à $\partial_t^j\hat{u}$ pour $j=2,3,4$:

$$\frac{C}{\sigma}\big\|\big(\partial_t^j\hat{u}\big)\mathrm{e}^{\sigma\varphi}\big\|^2_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\big\|\big(\partial_x^\alpha\hat{p}\big)\mathrm{e}^{\sigma\varphi}\big\|^2_{L^2(Q)}+\mathrm{e}^{C\sigma}\big\|\partial_t^j\hat{u}\big\|^2_{H^2(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(2\varepsilon,\delta))}+\sigma^3\mathrm{e}^{2\sigma(d_0^2-\eta)}\big\|\partial_t^j\hat{u}\big\|^2_{H^2(Q)}.$$

On obtient donc, en utilisant le fait que u est dans $W^{8,\infty}(Q)$ (Hypothèse 1(i)) et l'Hypothèse 2 :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\sigma^{2(1-|\alpha|)}\int_{\Omega(\varepsilon)}\left|\partial_x^\alpha(\partial_t w)(x,0)\right|^2 \mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\big\|\big(\partial_x^\alpha\hat{p}\big)\mathrm{e}^{\sigma\varphi}\big\|^2_{L^2(Q)}+C\mathrm{e}^{C\sigma}\|\hat{u}\|^2_{H^6(\omega\times(0,T))}+C\sigma^3\mathrm{e}^{2\sigma(d_0^2-\eta)}. \tag{12}$$

Comme le coefficient $\hat{p}$ satisfait l'EDP du premier ordre $-h(0)\nabla\cdot(\hat{p}(x)(\nabla\bar{u}_0(x)+\nabla\bar{u}_0(x)^T))=\partial_t w(x,0)$ avec $h(0)\neq 0$ (Hypothèse 1(iv)) et que la donnée initiale vérifie l'Hypothèse 3, on peut appliquer le Lemme 2.4 de [1] : $\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\int_{\Omega(\varepsilon)}|\partial_x^\alpha\hat{p}(x)|^2\mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\sigma^{2(1-|\alpha|)}\int_{\Omega(\varepsilon)}|\partial_x^\alpha(\partial_t w)(x,0)|^2\mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x$. D'après l'Hypothèse 1(iii), on connait p sur un voisinage V de $\partial\Omega$ donc $\hat{p}=0$ sur $\Omega\setminus\Omega(\varepsilon)\subset V$. Alors :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\int_\Omega\left|\partial_x^\alpha\hat{p}(x)\right|^2\mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\big\|\big(\partial_x^\alpha\hat{p}\big)\mathrm{e}^{\sigma\varphi}\big\|^2_{L^2(Q)}+C\mathrm{e}^{C\sigma}\|\hat{u}\|^2_{H^6(\omega\times(0,T))}+C\sigma^3\mathrm{e}^{2\sigma(d_0^2-\eta)}$$
$$\leqslant\frac{C}{\sqrt{\sigma}}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\int_\Omega\left|\partial_x^\alpha\hat{p}(x)\right|^2\mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x+C\mathrm{e}^{C\sigma}\|\hat{u}\|^2_{H^6(\omega\times(0,T))}+C\sigma^3\mathrm{e}^{2\sigma(d_0^2-\eta)},$$

et on absorbe le premier terme du membre de droite dans le membre de gauche pour obtenir :

$$\mathrm{e}^{2\sigma d_0^2}\|\hat{p}\|^2_{H^2(\Omega)}\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\int_\Omega\left|\partial_x^\alpha\hat{p}(x)\right|^2\mathrm{e}^{2\sigma\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x\leqslant C\mathrm{e}^{C\sigma}\|\hat{u}\|^2_{H^6(\omega\times(0,T))}+C\sigma^3\mathrm{e}^{2\sigma(d_0^2-\eta)}$$
$$\Longrightarrow\quad\|\hat{p}\|^2_{H^2(\Omega)}\leqslant C\big(\mathrm{e}^{C\sigma}\|\hat{u}\|^2_{H^6(\omega\times(0,T))}+\mathrm{e}^{-\sigma\eta}\big)\quad\text{car}\sup_\sigma\big(\sigma^3\mathrm{e}^{-\sigma\eta}\big)<\infty. \tag{13}$$

On choisit alors $\sigma=-\frac{1}{\eta+C}\log\|\hat{u}\|^2_{H^2(\omega\times(0,T))}$ de telle sorte que $\|\hat{p}\|_{H^2(\Omega)}\leqslant C\|\hat{u}\|^{\frac{\eta}{\eta+C}}_{H^6(\omega\times(0,T))}$.

On utilise ensuite le résultat d'interpolation suivant (Proposition 4, p. 929 de [5]) :

$$\|\hat{u}\|_{H^6(\omega\times(0,T))}\leqslant C\|\hat{u}\|^{1/3}_{H^2(\omega\times(0,T))}\|\hat{u}\|^{2/3}_{H^8(\omega\times(0,T))}$$

et $\hat{u}\in W^{8,\infty}(Q)$ (Hypothèse 1(i)) pour conclure la démonstration du Théorème 2, avec $\kappa=\frac{\eta}{3(\eta+C)}$. □

Références

[1] M. Bellassoued, O. Imanuvilov, M. Yamamoto, Inverse problem of determining the density and the Lamé coefficients by boundary data, SIAM J. Math. Anal. 40 (2008) 238–265.

[2] A.L. Bukhgeim, M.V. Klibanov, Global uniqueness of class of multidimensional inverse problems, Soviet. Math. Dokl. 24 (1981) 244–247.

[3] T. Carleman, Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, Ark. Mat. Astr. Fys. 2B (1939) 1–9.

[4] C. Cavaterra, A. Lorenzi, M. Yamamoto, A stability result via Carleman estimates for an inverse source problem related to a hyperbolic integro-differential equation, Comput. Appl. Math. 25 (2006) 229–250.

[5] R. Dautray, J.L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, vol. 3, Masson, 1987.

[6] J. Janno, L. von Wolfersdorf, Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity, Math. Methods Appl. Sci. 20 (1997) 291–314.

[7] M.V. Klibanov, A. Timonov, Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications, VSP, Utrecht, 2004.

[8] A. Lorenzi, F. Messina, V.G. Romanov, Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system, Appl. Anal. 86 (11) (2007) 1375–1395.