Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1227–1230

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des nombres

Quelques endomorphismes continus des suites P-récursives

Ahmed Ait Mokhtar

Département de mathématiques, École normale supérieure, Kouba, P92, Alger, Algérie

Reçu le 27 avril 2009 ; accepté après révision le 17 juillet 2009

Disponible sur Internet le 1er octobre 2009

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle, $r(K)$ et $j(K)$ les algèbres de Hadamard des suites récurrentes linéaires à coefficients constants respectivement à coefficients polynomiaux. Dans un article précédent, nous avons défini les applications décimation ϕ_d et tressage $\psi_{d,J,\sigma}$, où $d \in \mathbb{N}^*$, $J \in \mathbb{N}^d$ et σ une permutation de $\{0, 1, \ldots, d-1\}$. Nous avons montré que ces deux applications sont des endomorphismes continus de $r(K)$. Dans cette Note, nous montrons qu'elles sont aussi des endomorphismes continus de $j(K)$. ***Pour citer cet article : A. Ait Mokhtar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Some continuous endomorphisms of P-recursives sequences. Let be K a commutative field of zero characteristic, $r(K)$ and $j(K)$ the Hadamard algebra of linear recurrence sequences with constant coefficients respectively polynomial coefficients. In a preceding article, we have defined the map decimation ϕ_d and tressage $\psi_{d,J,\sigma}$, where $d \in \mathbb{N}^*$, $J \in \mathbb{N}^d$ and σ is a permutation of $\{0, 1, \ldots, d-1\}$. We have shown that these maps are continuous endomorphisms of the algebra $r(K)$. In this Note, we show that these maps are also continuous endomorphisms of the algebra $j(K)$. ***To cite this article: A. Ait Mokhtar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Dans la première section, A désigne un anneau commutatif unitaire et $S(A)$ l'ensemble des suites à valeurs dans A. Muni du produit de Hadamard, $S(A)$ est une A-algèbre appelée algèbre de Hadamard. Nous rappelons les définitions essentielles telles que les applications décalage, décimation, emboîtement et tressage. Comme dans [2], on note $r(A)$ l'ensemble des suites de $S(A)$ qui sont récurrentes linéaires à coefficients constants et $j(A)$ l'ensemble des suites de $S(A)$ qui sont récurrentes linéaires à coefficients polynomiaux. Nous appelons, comme dans [4], suite P-récursive une suite de $j(A)$. Dans la deuxième section, après avoir défini une topologie sur l'algèbre $S(A)$, nous rappelons le résultat qui caractérise les endomorphismes continus de $S(A)$. Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. Nous montrons que l'application emboîtement envoie un élément de $(j(K))^d$ dans $j(K)$. Dans la troisième section, nous étendons les résultats trouvés dans $r(K)$ [1] à l'algèbre $j(K)$. Notamment, nous montrons les théorèmes suivants :

Adresse e-mail : ahmed.aitmokhtar@yahoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.08.005

Théorème 1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. L'application décimation ϕ_d est un endomorphisme continu de l'algèbre $j(K)$.*

Théorème 2. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $J \in \mathbb{N}^d$ et σ une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \dots, d-1\}$. L'application tressage $\psi_{d,J,\sigma}$ est un endomorphisme continu de l'algèbre $j(K)$.*

2. Rappel des définitions

Soit A un anneau commutatif unitaire et $S(A)$ l'ensemble des suites à valeurs dans A.

Définition 2.1. Soit u et v deux éléments de $S(A)$. Le produit de Hadamard des suites u et v est la suite $w = u \odot v$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w(n) = u(n)v(n)$.

Muni de l'addition terme à terme et du produit de Hadamard, l'ensemble $S(A)$ est une A-algèbre appelée l'algèbre de Hadamard des suites.

Définition 2.2. L'application T de $S(A)$ dans $S(A)$ qui, à toute suite u, associe la suite Tu définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $(Tu)(n) = u(n+1)$, est appelée application *décalage* (ou shift).

Définition 2.3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. L'application $\phi_{d,j}$ de $S(A)$ dans $S(A)$ qui, à toute suite u, associe la suite $\phi_{d,j}u$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $(\phi_{d,j}u)(n) = u(dn+j)$, est appelée d-décimation de rang j (ou simplement décimation de rang j).

Pour $u \in S(A)$, les suites $\phi_{d,j}u$ sont dites les d-décimées (ou d-extraites) de la suite u.

Remarques 2.4.

1. On note $\phi_{d,0} = \phi_d$, et nous l'appellerons la d-décimation (ou simplement décimation).
2. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et tout $(n, i) \in \mathbb{N}^2$, on a : $(T^i u)(n) = u(n+i)$ et $(\phi_d^i u)(n) = u(d^i n)$.
3. Il est facile de voir que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, on a : $\phi_d \circ T^j = \phi_{d,j}$.

Définition 2.5. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. L'application E_d de $(S(A))^d$ dans $S(A)$ qui, à tout d-uplet $(u_0, \dots, u_{d-1})$, associe la suite u définie par :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, d-1\},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_d(u_0, \dots, u_{d-1})(dn+j) = u_j(n), \tag{1}$$

est appelée d-emboîtement (ou simplement emboîtement).

Lorsque la relation (1) est vérifiée, on dit que la suite u est un emboîtement des suites $u_0, \dots, u_{d-1}$.

Définition 2.6. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $J = (j_0, j_1, \dots, j_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ et σ une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \dots, d-1\}$. On définit les applications suivantes :

$$\Delta_d : S(A) \to \big(S(A)\big)^d, \qquad \Sigma_\sigma : \big(S(A)\big)^d \to \big(S(A)\big)^d, \qquad T_J : \big(S(A)\big)^d \to \big(S(A)\big)^d, \quad \text{par :}$$

- $\forall u \in S(A)$, $\Delta_d u = (\phi_d u, (\phi_d \circ T)u, \dots, (\phi_d \circ T^{d-1})u)$.
- $\forall (u_0, \dots, u_{d-1}) \in (S(A))^d$, $\Sigma_\sigma(u_0, \dots, u_{d-1}) = (u_{\sigma(0)}, \dots, u_{\sigma(d-1)})$.
- $\forall (u_0, \dots, u_{d-1}) \in (S(A))^d$, $T_J(u_0, \dots, u_{d-1}) = (T^{j_0}u_0, T^{j_1}u_1, \dots, T^{j_{d-1}}u_{d-1})$.

Remarques 2.7.

1. Les applications données ci-dessus sont bien définies (voir [1]).
2. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, l'application Δ_d est une bijection dont la réciproque est l'emboîtement E_d.

Définition 2.8. L'application $E_d \circ \Sigma_\sigma \circ T_J \circ \Delta_d$ est appelée application *tressage*, notée $\psi_{d,J,\sigma}$.

Pour $u \in S(A)$, la suite $\psi_{d,J,\sigma}u$ est dite *tressage*.

Définition 2.9. On dit qu'une suite u de $S(A)$ est une suite récurrente linéaire à coefficients polynomiaux s'il existe deux entiers naturels n_0, h (h non nul), des polynômes p_i à coefficients dans A, $p_h \neq 0$, tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad p_h(n)u(n+h) + p_{h-1}(n)u(n+h-1) + \cdots + p_0(n)u(n) = 0.$$

Exemple. La suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(n) = n! + 1$, est une suite récurrente linéaire à coefficients polynomiaux ; elle satisfait à la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nu(n+2) - (n^2+3n+1)u(n+1) + (n^2+2n+1)u(n) = 0$.

3. Résultats préliminaires

Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons l'application π_n de $S(A)$ dans A définie, pour tout $u \in S(A)$, par $\pi_n(u) = u(n)$. Cette application est un morphisme de A-algèbres. On considère A comme un espace topologique discret et $S(A)$ sera muni de la topologie produit. Rappelons que cette topologie produit est la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications π_n, $n \in \mathbb{N}$. Elle est évidemment compatible avec les opérations algébriques de $S(A)$ qui devient de ce fait une A-algèbre topologique.

Dans [1], nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit A un anneau unitaire intègre et f une application de $S(A)$ dans $S(A)$. Pour que f soit un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard $S(A)$ il faut et il suffit qu'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout u dans $S(A)$, on ait $f(u) = u \circ \varphi$.*

Toujours dans [1], en utilisant le Théorème 3.1, nous avons montré que les applications décimation et tressage sont des endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard $r(A)$.

Dans ce qui suit K désigne un corps commutatif de caractéristique nulle.

Définition 3.2. Soit $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} u(n)x^n$ et $g(x) = \sum_{n\geqslant 0} v(n)x^n$ deux séries dans $K[\![x]\!]$. Le produit de Hadamard de f et g est la série h définie par : $h(x) = \sum_{n\geqslant 0} u(n)v(n)x^n$.

Définition 3.3. Soit f une série dans $K[\![x]\!]$. On dit que f est D-finie (*differentiably finite*) si elle est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynomiaux.

Signalons que certains auteurs, comme D. Zeilberger et P. Zimmerman, utilisent le terme *holonome* pour P-récursive (ou D-finie). Dans [4], Stanley montre le théorème suivant.

Théorème 3.4. *Soit $u \in S(K)$. La suite u est P-récursive si et seulement si sa série génératrice f_u est D-finie.*

On trouve également dans [4] la preuve du théorème de clôture suivant :

Théorème 3.5. *Le produit de Hadamard de deux séries D-finies est une série D-finie.*

Remarques 3.6.

1. Le théorème ci-dessus montre que l'ensemble $j(K)$ est stable par le produit de Hadamard.
2. Notons que $r(K)$ et $j(K)$ sont des sous-algèbres topologiques de $S(K)$.
3. $r(K)$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Hadamard $j(K)$.

Un exemple important de séries D-finies est donné par les séries dites algébriques : les éléments de $K[\![x]\!]$ qui sont algébriques sur $K(x)$ (voir [3]).

Dans [1], nous avons montré que les applications décimation et tressage sont des endomorphismes continus de $r(K)$ pour la topologie citée ci-dessus ; et les applications φ associées sont données, respectivement, par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = u(dn), \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j_{\sigma(r)}\right) + \sigma(r), \quad r = d\left\{\frac{n}{d}\right\}. \tag{3}$$

Proposition 3.7. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. L'application emboîtement E_d envoie un élément de $(j(K))^d$ dans $j(K)$.*

Démonstration. Soit $u_0, u_1, \dots, u_{d-1}$ des suites P-récursives et $f_{u_0}, f_{u_1}, \dots, f_{u_{d-1}}$ les séries génératrices associées respectives. Si u est l'emboîtement des suites u_j alors la série génératrice associée à u est donnée par la relation

$$f_u(x) = f_{u_0}\bigl(x^d\bigr) + x f_{u_1}\bigl(x^d\bigr) + \cdots + x^{d-1} f_{u_{d-1}}\bigl(x^d\bigr) \tag{4}$$

qui se vérifie aisément, en posant, pour tout $j \in \{0, \dots, d-1\}$,

$$f_u(x) = \sum_{n \geqslant 0} u(n)x^n \quad \text{et} \quad f_{u_j}(x) = \sum_{n \geqslant 0} u_j(n)x^n = \sum_{n \geqslant 0} u(dn+j)x^n.$$

Comme, pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant d-1$, les u_j sont des suites P-récursives alors les séries $f_{u_j}(x^d)$ sont D-finies, et par suite, les séries $x^j f_{u_j}(x^d)$ sont D-finies. D'après le Théorème 3.5, on déduit que f_u est D-finie. Par conséquent la suite u est P-récursive. □

4. Démonstrations des résultats

Démonstration du Théorème 1. Montrons d'abord que l'application ϕ_d est un endomorphisme de $j(K)$. Soit u une suite P-récursive, il suffit de montrer que la suite $\phi_d u$ est P-récursive. Condidérons la suite e_d définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_d(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{d}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite est une suite périodique donc elle est dans $j(K)$, donc P-récursive.

D'après la remarque 1 du Théorème 3.5, la suite $v = u \odot e_d$ est alors P-récursive. Il existe donc h dans N^* et $p_0, p_1, \dots, p_h$ des polynômes dans $K[x]$ non tous nuls tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_h(n)v(n+h) + p_{h-1}(n)v(n+h-1) + \cdots + p_0(n)v(n) = 0. \tag{5}$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v(n) = \begin{cases} u(n) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{d}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

les $v(i)$ sont soit nuls soit égaux à des $u(dm_i)$, $m_i \in \{[\frac{n}{d}], \dots, [\frac{n+h}{d}]\}$.

La relation non triviale (5) lie donc les termes de la suite $(u(dn))_{n \geqslant 0}$; Ce qui montre que la suite $\phi_d u$ est P-récursive. La continuité de ϕ_d découle du Théorème 3.1, l'application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ associée à ϕ_d est donnée par la relation (2). □

Remarque 4.1. Soit u une suite P-récursive. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{0, \dots, d-1\}$. De la même façon que ci-dessus, on montre, en considérant les décalées $T^j e_d$ de e_d, que les d-décimées de rang j définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi_{d,j} u(n) = u(dn+j)$ sont des suites P-récursives.

Démonstration du Théorème 2. Montrons d'abord que l'application $\psi_{d,J,\sigma}$ est un endomorphisme de $j(K)$. Soit u une suite P-récursive, il suffit de montrer que la suite $\psi_{d,J,\sigma} u$ est P-récursive. D'après la Remarque 4.1, les suites $u_0, u_1, \dots, u_{d-1}$ dont la suite u est l'emboîtement sont P-récursives. Par définition des application Δ_d, Σ_σ et T_j, la suite $(\Sigma_\sigma \circ T_J \circ \Delta_d)u$ est P-récursive. De la Proposition 3.7, on déduit que la suite $(E_d \circ \Sigma_\sigma \circ T_J \circ \Delta_d)u = \psi_{d,J,\sigma} u$ est P-récursive. La continuité de $\psi_{d,J,\sigma}$ découle du Théorème 3.1, l'application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ associée à $\psi_{d,J,\sigma}$ est donnée par la relation (3). □

Références

[1] A. Ait Mokhtar, A. Necer, A. Salinier, Endomorphismes d'algèbres de suites, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 20 (2008) 1–21.
[2] B. Benzaghou, Algèbre de Hadamard, Bulletin de la Société Mathématique de France 98 (1970) 209.
[3] L. Comtet, Calcul pratique des coefficients de Taylor d'une fonction algébrique, L'Enseignement Mathématique 10 (1964) 267–270.
[4] R.P. Stanley, Differentiably finite power series, European Journal of Combinatorics 1 (1980) 175–188.