Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1075–1080

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Statistique

# Estimation non paramétrique de quantiles conditionnels pour des variables fonctionnelles spatialement dépendantes

Ali Laksaci[a], Fouzia Maref[b]

[a] *Laboratoire de mathématiques, université Djilali-Liabes, BP 89, Sidi Bel Abbes, 22000, Algérie*
[b] *Université de Saida, Saida, 20000, Algérie*

Reçu le 13 mars 2009 ; accepté après révision le 17 juin 2009

Présenté par Paul Deheuvels

**Résumé**

Étant donné un champ aléatoire fonctionnel, stationnaire $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})_{,\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N}, N > 0)$ à valeurs dans $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{F}$ est un espace semi-métrique, de dimension éventuellement infinie. Dans cette Note, on se propose d'étudier la covariation spatiale des deux variables $X_{\mathbf{i}}$ et $Y_{\mathbf{i}}$ via l'estimation non paramétrique des quantiles conditionnels de $Y_{\mathbf{i}}$ sachant $X_{\mathbf{i}}$. Nous construisons un estimateur à noyau pour ce modèle non paramétrique spatial et nous établissons sa vitesse de convergence presque complètement. ***Pour citer cet article : A. Laksaci, F. Maref, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

**Abstract**

**Nonparametric estimation of conditional quantiles for functional and spatial dependent variables.** Consider $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^N$ be a $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$-valued measurable strictly stationary spatial process, where $\mathcal{F}$ is a semi-metric space. We study a kernel estimator of conditional quantiles of the univariate response variable $Y_{\mathbf{i}}$ given the functional variable $X_{\mathbf{i}}$. The main aim of this Note is to prove the almost complete convergence (with rate) of this estimate.

***To cite this article: A. Laksaci, F. Maref, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

Consider $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N\ N\geqslant 1}$ be a $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$-valued measurable strictly stationary spatial process, where $\mathcal{F}$ is a semi-metric space. Let $d$ denotes the semi-metric. We assume that the $Z_{\mathbf{i}}$'s have the same distribution with $Z$ : $(X, Y)$ and the regular version of the conditional probability of $Y$ given $X$ exists. Furthermore, we assume that the process $(Z_{\mathbf{i}})$ is observed over a rectangular domain $I_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_N) \in \mathbb{Z}^N,\ 1 \leqslant i_k \leqslant n_k,\ k = 1, \ldots, N\}$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{N}^N$. We will write $\mathbf{n} \to \infty$ if $\min\{n_k\} \to \infty$ and $|\frac{n_j}{n_k}| < C$ for a constant $C$ such that $0 < C < \infty$ for all $j, k$ such that $1 \leqslant j, k \leqslant N$. For $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{N}^N$, we set $\hat{\mathbf{n}} = n_1 \times \cdots \times n_N$.

*Adresses e-mail :* alilak@yahoo.fr (A. Laksaci), fouziamaref@yahoo.fr (F. Maref).

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.06.012

In the following $x$ will be a fixed point in $\mathcal{F}$ and we will note respectively by $F^x$ and $f^x$ the conditional distribution function and the density of $Y$ given $X = x$. For $\alpha \in ]0, 1[$, the $\alpha$th conditional quantile noted $t_\alpha(x)$ is defined by

$$F^x\big(t_\alpha(x)\big) = \alpha.$$

To insure existence and unicity of $t_\alpha(x)$, we assume that $F^x$ is strictly increasing. This is estimated by

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}} K(h_K^{-1}\,\mathrm{d}(x, X_\mathbf{i}))H(h_H^{-1}(y - Y_\mathbf{i}))}{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}} K(h_K^{-1}\,\mathrm{d}(x, X_\mathbf{i}))}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

where $K$ is a kernel, $H$ is a distribution function, $h_K = h_{K,\mathbf{n}}$ (resp. $h_H = h_{H,\mathbf{n}}$) is a sequence of real numbers which converges to 0 when $\mathbf{n} \to \infty$.

The kernel estimate $\hat{t}_\alpha(x)$ of the conditional quantile $t_\alpha(x)$ defined by

$$\widehat{F}^x\big(\hat{t}_\alpha(x)\big) = \alpha.$$

The main goal of this Note is to study the non-parametric estimate $\hat{t}_\alpha(x)$ of $t_\alpha(x)$ when the explanatory variable $X$ is valued in a space of eventually infinite dimension. We establish the almost complete convergence of this estimator. This work gives a generalization of Ferraty et al. [9] to the spatially dependent case. Our main result is given in the following theorem (see the French version for the notations and assumptions):

**Theorem 0.1.** *Under the hypotheses* (H1)–(H7) *and if* $f^x(t_\alpha(x)) > 0$, *we have,*

$$\hat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x) = O\big(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\big) + O\left(\left(\frac{\log \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{n}}\,\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad p.co. \quad as \quad \mathbf{n} \to \infty.$$

## 1. Introduction

La modélisation statistique des données spatiales connaît un développement important du fait de son utilisation dans de nombreux domaines tels l'épidémiologie, l'économétrie, les sciences de l'environnement et de la terre, la foresterie et l'agronomie, l'imagerie, .... Des travaux précurseurs en statistique spatiale sont ceux de Cressie [3], Ripley [17], Guyon [11], Anselin et Florax [1]. L'objectif de cette Note est d'étudier l'estimation non paramétrique de quantiles conditionnels lorsque les observations présentent une structure de corrélation spatiale. Notons que, la modélisation non paramétrique de données spatiales est relativement récente par rapport au cas paramétrique. En effet, les premiers résultats ont été obtenus par Tran [21], tandis que les références les plus récentes incluent celles de Dabo-Niang et Yao [5], Carbon et al. [2] et Li et Tran [16].

L'estimation de quantiles conditionnels est un sujet très important en statistique. Elle est utilisée pour la construction d'intervalles de prédiction, la détermination de courbes de référence ou comme outil de prévision alternatif à la méthode de régression (prévision via la médiane conditionnelle). Historiquement, les premiers résultats conséquents, sur ce sujet, furent établis en 1977 (voir Stone [19]) et qui a connu, depuis, des développements continus (citons par exemple, Stute [20], Samanta [18] et Lemdani et al. [15] pour des références récentes). Dans le cas spatial la littérature est très restreinte. Laksaci et Ould-Saïd [13] ont étudié la convergence presque complète et la normalité asymptotique d'un estimateur de type $L^1$ pour les quantiles conditionnels à variable explicative vectorielle. Nous renvoyons à Hallin et al. [12] pour une étude semi-paramétrique de ce modèle spatial. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'estimation des quantiles conditionnels à variable explicative fonctionnelle. Citons par exemples Ferraty et al. [9,10] pour la convergence presque complète et Ezzahrioui et Ould-Said [7] pour la normalité asymptotique. Nous renvoyons à Laksaci et al. [14] pour des résultats analogues à ceux présentés dans [7] et [10] mais pour un estimateur alternatif, basé sur l'approche $L^1$.

Dans la plus part des travaux suscités, les auteurs considèrent des observations indépendantes ou des données dépendantes issues de séries temporelles. Dans cette Note, on se propose d'étudier l'estimation de quantiles de régression dans le cas où les observations sont à la fois spatialement dépendantes et la coraviable est fonctionnelle. Sous des conditions de mélange assez générales, on établit la convergence presque complète (avec vitesse) d'un estimateur à noyau pour les quantiles de régression. Ce travail généralise au cas spatial les résultats de [9] sur les observations fortement mélangeantes et complète l'étude de Dabo-Niang et Laksaci [6] où la convergence en norme $L^p$ et la normalité asymptotique de cet estimateur ont été obtenus. Notons que, comme toute les propriétés asymptotiques en statistique non paramétrique fonctionnelle, notre résultat est liés au phénomène de concentration de la mesure de probabilité de la variable explicative et à la régularité de l'espace fonctionnelle du modèle.

Nous présentons l'estimateur de notre modèle spatial dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3 nous donnons les hypothèses, puis nous étudions la convergence presque complète de cet estimateur.

## 2. Le modèle et son estimateur

Soit $N$ un entier naturel strictement positif. On considère le champ aléatoire $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^N$ à valeurs dans $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, où $(\mathcal{F}, d)$ est un espace semi-métrique de dimension éventuellement infinie. Dans ce contexte, $(X_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N}$ peuvent être des variables aléatoires fonctionnelles. Ces questions de statistique en dimension infinie sont au coeur d'une dynamique autour de la statistique fonctionnelle. Le lecteur peut trouver dans Ferraty et Vieu [8] une vue d'ensemble sur des problématiques et des avancées récentes liées à ce domaine important de la statistique moderne.

Par la suite, on fixe un point $x$ dans $\mathcal{F}$, on suppose que les observations spatiales $(X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^N$ ont la même distribution que $Z := (X, Y)$ et que la version régulière de la probabilité conditionnelle de $Y$ sachant $X = x$ existe et admet une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, notée $f^x$. Pour $\alpha \in ]0, 1[$, le quantile conditionnel d'ordre $\alpha$, noté $t_\alpha(x)$, est solution de l'équation

$$F^x\big(t_\alpha(x)\big) = \alpha,$$

où $F^x$ est la fonction de répartition conditionnelle de $Y$ sachant $X = x$. Pour assurer l'unicité de quantiles conditionnels on suppose que $F^x$ est strictement croissante.

Par ailleurs, nous supposons que le champ aléatoire fonctionnel est observé sur l'ensemble $I_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^N,\ 1 \leqslant i_k \leqslant n_k,\ k = 1, \dots, N\}$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$. Rappelons que dans ce contexte spatial $\mathbf{n} \to \infty$ signifie que $\min\{n_k\} \to \infty$ et que pour chaque $1 \leqslant j,\ k \leqslant N$ on a $|\frac{n_j}{n_k}| < C < \infty$. On estime la fonction de répartition conditionnelle $F^x$, en utilisant la méthode du noyau, par

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K(h_K^{-1}\,\mathrm{d}(x, X_{\mathbf{i}}))H(h_H^{-1}(y - Y_{\mathbf{i}}))}{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K(h_K^{-1}\,\mathrm{d}(x, X_{\mathbf{i}}))}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

où $K$ est un noyau, $H$ est une fonction de répartition strictement croissante et $h_K = h_{K,\mathbf{n}}$ (resp. $h_H = h_{H,\mathbf{n}}$) est une suite de nombres réels positifs qui tend vers zéro quand $\mathbf{n}$ tend vers l'infini. L'estimateur $\hat{t}_\alpha(x)$ de $t_\alpha(x)$ est tel que :

$$\widehat{F}^x\big(\hat{t}_\alpha(x)\big) = \alpha.$$

Pour assurer l'unicité de l'estimateur de quantiles conditionnels on suppose que la fonction de répartition $H$ est strictement croissante. Notons que, lorsque $N = 1$ cet estimateur a été utilisé par Samanta [18] dans le cas réel et par Ferraty et al. [10] pour le cas fonctionnel. Le lecteur pourra se reporter à Crujeiras et al. [4] pour une méthode d'estimation alternative basée sur l'approche $L^1$ et qui donne un estimateur à un seul noyau. Mentionnons que pour les deux méthodes, le choix du paramètre de lissage joue un role très important. Ce choix est un peu compliqué dans le cas du doubles noyaux, où il faut faire un choix multiple de ce paramètre. A titre indicatif, la méthode de sélection de Youndjé [22] pour la densité conditionnelle est adaptable à cette situation.

L'objet de cette Note est d'étudier la convergence presque complète l'estimateur $\hat{t}_\alpha(x)$ vers $t_\alpha(x)$, lorsque, le champ aléatoire fonctionnel $(Z_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^N}$ vérifie la condition de mélange suivante

$$\begin{cases} \text{il existe une fonction } \varphi(t) \downarrow 0 \text{ quand } t \to \infty, \text{ telle que} \\ \quad \forall E, E' \text{ sous ensemble de } \mathbb{N}^N \text{ de cardinal fini} \\ \alpha(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E')) = \sup_{B\in\mathcal{B}(E), C\in\mathcal{B}(E')} |\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)| \\ \qquad\qquad \leqslant \psi(\mathrm{Card}(E), \mathrm{Card}(E'))\varphi(\mathrm{dist}(E, E')), \end{cases}$$

où $\mathcal{B}(E)$ (*resp.* $\mathcal{B}(E')$) la tribu borélienne engendrée par $(Z_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in E)$ (*resp.* $(Z_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in E')$), $\mathrm{Card}(E)$ (*resp.* $\mathrm{Card}(E')$) est le cardinal de $E$ (*resp.* $E'$), $\mathrm{dist}(E, E')$ désigne la distance euclidien entre $E$ et $E'$ et $\psi$ est une fonction symétrique : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}^+$, décroissante par rapport aux deux variables séparément et satisfait l'une des conditions suivantes

$$\psi(n, m) \leqslant C \min(n, m), \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

ou

$$\psi(n, m) \leqslant C(n + m + 1)^{\widetilde{\beta}}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{2}$$

pour certains $\widetilde{\beta} \geqslant 1$ et $C > 0$.

## 3. Propriétés asymptotiques

Dans la suite, nous noterons $C$ et/ou $C'$ des constantes strictement positives quelconques. Nous introduisons les hypothèses suivantes

(H1) $\mathbb{P}(X \in B(x,r)) = \phi_x(r) > 0$, où $B(x,r)$ est la boule centrée en $x$ et de rayon $r$.
(H2) La fonction $\varphi$ vérifie $\sum_{i=1}^{\infty} i^{\delta}\varphi(i) < \infty$, pour un certain $\delta > 5N$.
(H3) $0 < \sup_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}} \mathbb{P}[(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}}) \in B(x,h) \times B(x,h)] \leqslant C(\phi_x(h))^{(a+1)/a}$, pour un certain $1 < a < \delta N^{-1}$.
(H4) Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\forall (t_1,t_2) \in [t_\alpha(x) - \delta_1, t_\alpha(x) + \delta_1]^2$, $\forall (x_1,x_2) \in \mathcal{N}_x^2$,

$$\left|F^{x_1}(t_1) - F^{x_2}(t_2)\right| \leqslant C\left(\mathrm{d}(x_1,x_2)^{b_1} + |t_1 - t_2|^{b_2}\right), \quad b_1 > 0,\ b_2 > 0$$

où $\mathcal{N}_x$ est un voisinage de $x$.
(H5) $K$ est à support compact [0, 1] vérifie $C\mathbb{1}_{(0,1)}(\cdot) \leqslant K(\cdot) \leqslant C'\mathbb{1}_{(0,1)}(\cdot)$, où $\mathbb{1}_{\{.\}}$ est la fonction indicatrice.
(H6) $H$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée bornée et vérifiée $\int |t|^{b_2} H'(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.
(H7) Il existe $0 < \alpha < (\delta - 5N)/2N$ et $\eta_0 > 0$, tels que $\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \hat{\mathbf{n}}^{\alpha} h_H = \infty$ et $C\hat{\mathbf{n}}^{\frac{(5+2\alpha)N-\delta}{\delta}+\eta_0} \leqslant \phi_x(h)$ où $\hat{\mathbf{n}} = n_1 \times \cdots \times n_N$.

Nos hypothèses sont relativement standard, puisque les conditions (H1), (H3)–(H7) sont très similaires à celles utilisées par Ferraty et al. [9], tandis que les conditions (1)–(2) et (H2) sont les mêmes que dans Tran [21].

**Théorème 3.1.** *Sous les hypothèses* (H1)–(H7) *et si* $f^x(t_\alpha(x)) > 0$*, on a,*

$$\hat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x) = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{n}}\,\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad \textit{p.co.} \quad \textit{quand} \quad \mathbf{n} \to \infty.$$

Notons que si $N = 1$ on obtient la même vitesse de convergence que Ferraty et al. [9].

**Schéma de la preuve.** En utilisant la continuité de $f^x$ on montre qu'il existe un $\delta_1' > 0$ tel que

$$\min_{y \in [t_\alpha(x)-\delta_1', t_\alpha(x)+\delta_1']} f^x(y) \geqslant C > 0.$$

Posons $\delta_0 = \min(\delta_1', \delta_1)$, alors

$$\left|\hat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)\right| = \left|\hat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)\right| \mathbb{1}_{\{|\hat{t}_\alpha(x)| \leqslant \delta_0\}} + \left|\hat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)\right| \mathbb{1}_{\{|\hat{t}_\alpha(x)| > \delta_0\}}$$

il suffit donc de démontrer que

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathbb{P}\left(\left|\hat{t}_\alpha(x)\right| > \delta_0\right) < \infty$$

et

$$\left|\hat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)\right| \mathbb{1}_{\{|\hat{t}_\alpha(x)| \leqslant \delta_0\}} = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \textit{p.co.} \tag{3}$$

Pour le dernier résultat, on peut écrire

$$\left|\hat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)\right| = \frac{1}{|f^x(t^*(x))|}\left|F^x\left(\hat{t}_\alpha(x)\right) - F^x\left(t_\alpha(x)\right)\right|$$

où $t^*(x)$ est un point entre $\hat{t}_\alpha(x)$ et $t_\alpha(x)$. Ceci implique que

$$\left|\hat{t}_\alpha(x) - t_\alpha(x)\right| \mathbb{1}_{\{|\hat{t}_\alpha(x)| \leqslant \delta_0\}} \leqslant C \sup_{y \in [t_\alpha(x)-\delta_0, t_\alpha(x)+\delta_0]} \left|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right|.$$

Ainsi, la démonstration de (3) devient une conséquence du résultat suivant

$$\sup_{y \in [t_\alpha(x)-\delta_0,\, t_\alpha(x)+\delta_0]} \left|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad \textit{p.co.}$$

Ce dernier se démontre en suivant le même cheminement que dans Ferraty et Vieu [8].

Finalement, le Théorème 3.1 est une conséquence des résultats suivants.

**Lemme 3.2.** *Sous les hypothèses* (H1)–(H3), (H5) *et* (H7)*, on a,*

$$\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}\widehat{F}_D^x = O\left(\left(\frac{\log \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{n}}\,\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad p.co. \quad quand \quad \mathbf{n} \to \infty$$

*où* $\widehat{F}_D^x = \frac{1}{\hat{\mathbf{n}}\mathbb{E}[K(h_K^{-1}\,\mathrm{d}(x, X_{\mathbf{1}}))]} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K(h_K^{-1}\,\mathrm{d}(x, X_{\mathbf{i}}))$.

**Corollaire 3.3.** *Sous les hypothèses du Lemme* 3.2*, on a,* $\sum_{\mathbf{n}} \mathbb{P}(\widehat{F}_D^x < 1/2) < \infty$.

**Lemme 3.4.** *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H4)–(H6)*, on a,*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta_0, t_\alpha(x)+\delta_0]} \left|F^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)\right| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) \quad quand \quad \mathbf{n} \to \infty$$

*où* $\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{\hat{\mathbf{n}}\mathbb{E}[K(h_K^{-1}\,\mathrm{d}(x, X_{\mathbf{1}}))]} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K(h_K^{-1}\,\mathrm{d}(x, X_{\mathbf{i}}))H(h_H^{-1}(y - Y_{\mathbf{i}}))$.

**Lemme 3.5.** *Sous les conditions du Théorème* 3.1*, on a,*

$$\sup_{y\in[t_\alpha(x)-\delta_0, t_\alpha(x)+\delta_0]} \left|\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)\right| = O\left(\left(\frac{\log \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad p.co. \quad quand \quad \mathbf{n} \to \infty.$$

**Lemme 3.6.** *Sous les conditions du Théorème* 3.1*, on a,*

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathbb{P}\left(|\hat{t}_\alpha(x)| > \delta_0\right) < \infty.$$

## Remerciements

Le rapporteur anonyme est vivement remercié pour ses commentaires détaillés et constructifs. La démonstration détaillée de ces résultats peuvent être obtenue sur demande.

## Références

[1] L. Anselin, R.J.G.M. Florax, New Directions in Spatial Econometrics, Springer, Berlin, 1995.
[2] M. Carbon, C. Francq, L.T. Tran, Kernel regression estimation for random fields, J. Statist. Plann. Inference 137 (2007) 778–798.
[3] N.A. Cressie, Statistics for Spatial Data, Wiley, New York, 1991.
[4] R.M. Crujeiras, W.G. Manteiga, A. Laksaci, E. Ould Saïd, Asymptotic properties for an $L^1$-norm kernel estimator of the spatial quantile regression for functional data. Technical report, no. 393, Mars 2009, LMPA, Université du Littoral Cote d'Opale, submitted for publication.
[5] S. Dabo-Niang, A.F. Yao, Kernel regression estimation for continuous spatial processes, Math. Methods Statist. 16 (2007) 298–317.
[6] S. Dabo-Niang, A. Laksaci, Spatial conditional quantile regression: Weak consistency of a kernel estimate, 2009, submitted for publication.
[7] M. Ezzahrioui, E. Ould-Said, Asymptotic results of the kernel estimator of the conditional quantile in the normed space under $\alpha$-mixing hypothesis, Comm. Statist. Theory Methods 37 (2008) 2735–2759.
[8] F. Ferraty, Ph. Vieu, Nonparametric Functional Data Analysis, Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2006.
[9] F. Ferraty, A. Rabhi, Ph. Vieu, Conditional quantiles for functionally dependent data with application to the climatic El Nino Phenomenon, Sankhyia 67 (2005) 378–399.
[10] F. Ferraty, A. Laksaci, Ph. Vieu, Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, Stat. Inference Stoch. Process. 9 (2006) 47–76.
[11] X. Guyon, Random Fields on a Network – Modeling, Statistics, and Applications, Springer, New York, 1995.
[12] M. Hallin, Z. Lu, K. Yu, Local linear spatial quantile regression, Bernoulli (2009), in press.
[13] A. Laksaci, E. Ould Saïd, Kernel estimator for the spatial regression quantile : $L_1$-approach. Technical report, no. 392, Mars 2009, LMPA, Université du Littoral Côte d'Opale, submitted for publication.
[14] A. Laksaci, M. Lemdani, E. Ould-Saïd, A generalized $L^1$-approach for a kernel estimator of conditional quantile with functional regressors: Consistency and asymptotic normality, Statist. Probab. Lett. 79 (2009) 1065–1073.

[15] M. Lemdani, E. Ould-Saïd, N. Poulin, Asymptotic properties of a conditional quantile estimator with randomly truncated data, J. Multivariate Anal. 100 (2009) 546–559.
[16] J. Li, L.T. Tran, Nonparametric estimation of conditional expectation, J. Statist. Plann. Inference 139 (2009) 164–175.
[17] B. Ripley, Spatial Statistics, Wiley, New York, 1981.
[18] M. Samanta, Non-parametric estimation of conditional quantiles, Statist. Probab. Lett. 7 (1989) 407–412.
[19] C. J Stone, Consistent nonparametric regression, Discuss. Ann. Statist. 5 (1977) 595–645.
[20] W. Stute, Conditional empirical processes, Ann. Statist. 14 (1986) 638–647.
[21] L.T. Tran, Kernel density estimation on random fields, J. Multivariate Anal. 34 (1990) 37–53.
[22] E. Youndjé, Estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau, Thèse de Doctarat, Université de Rouen, 1993.