Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 943–946
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

L'intégrabilité du réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et sa généralisation aux algèbres de Lie semi-simples

Khaoula Ben Abdeljelil

Université de Poitiers, UMR CNRS 6086, téléport 2, boulevard Marie-et-Pierre-Curie, BP 30179, 86962 Chasseneuil Futuroscope cedex, France

Reçu le 19 mai 2008 ; accepté le 28 mai 2009

Disponible sur Internet le 17 juin 2009

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous définissons le réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, étendons cette définition sur toute algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, et nous démontrons son intégrabilité au sens de Liouville. ***Pour citer cet article : K. Ben Abdeljelil, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

The integrability of the 2-Toda lattice on $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ and its generalization to semi-simple Lie algebras. We define the 2-Toda lattice on $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$; we extend its definition to any simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ and we show its integrability in the sense of Liouville. ***To cite this article: K. Ben Abdeljelil, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Le réseau de 2-Toda en dimension infinie a été introduit en 1982 par Ueno et Takasaki [6]. Il s'agit d'une paire d'équations de Lax où l'opérateur de Lax est dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}((\infty)) \times \mathfrak{gl}((\infty))$. Suite à des travaux de Adler et van Moerbeke [2] puis de Carlet [3] on sait que ce réseau (dit « sur $\mathfrak{gl}((\infty))$ »), est décrit par des champs hamiltoniens, où la structure de Poisson est définie par une $\mathcal{R}$-matrice.

Le réseau de 2-Toda admet une restriction à $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, que nous appelons le *réseau de* 2-*Toda classique*, et que nous définissons maintenant :

Définition 1.1. Le *réseau de* 2-*Toda classique* est donné par la paire d'équations de Lax

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(L,M)}{\partial t} = \big[(L_+,L_+),(L,M)\big], \\ \dfrac{\partial(L,M)}{\partial s} = \big[(M_-,M_-),(L,M)\big], \end{cases} \tag{1}$$

Adresse e-mail : Khaoula.Ben.Abdeljelil@math.univ-poitiers.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.05.015

où $(L,M)\in\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})\times\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ est de la forme :

$$(L,M)=\left(\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & & 0\\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & b_{n,n-1} & b_{nn}\end{pmatrix}\right), \tag{2}$$

L_+, resp. M_-, étant le projeté de L, resp. de M, sur la sous-algèbre de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ formée par les matrices triangulaires supérieures, resp. strictement inférieures.

Comme dans le cas infini, vis à vis d'une structure de Poisson associée à une $\mathcal{R}$-matrice, les équations (1) décrivent les champs hamiltoniens des fonctions $\frac{1}{2}\operatorname{Trace}L^2$ et $\frac{1}{2}\operatorname{Trace}M^2$. Grâce au théorème AKS (voir [1, thm. 4.37]), les fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})\times\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, données par $\frac{1}{i}\operatorname{Trace}L^i$ et $\frac{1}{j}\operatorname{Trace}M^j$, $1\leqslant i,j\leqslant n-1$, sont en involution. Mais elles sont insuffisamment nombreuses pour l'intégrabilité du réseau de 2-Toda classique au sens de Liouville. Ceci s'explique par le nombre important ($\sim n^2$) de variables libres sur l'espace de phase de ce réseau. Nous montrons que les fonctions $F_{k,i}$, pour $0\leqslant k\leqslant i+1$ et $1\leqslant i\leqslant n-1$, construites par la relation : $\operatorname{Trace}(\lambda L+M)^{i+1}=\sum_{k=0}^{i+1}\lambda^k F_{k,i}(L,M)$ forment un système intégrable.

Il est bien connu que le réseau de Toda classique admet une généralisation aux algèbres de Lie simples (voir [5]). Dans cette note, nous généralisons le réseau de 2-Toda aux algèbres de Lie simples et nous démontrons son intégrabilité au sens de Liouville. En effet, nous construisons une grande famille de fonctions involutives (pour un crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ qui vient d'une $\mathcal{R}$-matrice) contenant celles construites à partir du théorème AKS (voir Théorème 2.1), nous prouvons à l'aide de [4] que cette famille est indépendante sur l'espace de phase du réseau de 2-Toda et nous montrons que son cardinal donne le nombre exact de fonctions pour l'intégrabilité du réseau de 2-Toda au sens de Liouville.

2. Structure de $\mathcal{R}$-matrice sur le carré d'une algèbre de Lie

Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie, on note $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ l'algèbre de fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^2$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. On rappelle qu'un endomorphisme $R:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ est appelé une *R-matrice*, si l'opérateur

$$[X,Y]_R:=\frac{1}{2}\big([RX,Y]+[X,RY]\big) \tag{3}$$

est un crochet de Lie. En particulier, s'il existe $c\in\mathbf{C}$, tel que, pour tout X,Y dans $\mathfrak{g}$

$$[RX,RY]-R\big([RX,Y]+[X,RY]\big)=-c^2[X,Y],$$

alors R est une R-matrice, appelée *solution de l'équation de Yang–Baxter classique modifiée* (*mCYBE*) *de constante* c.

Pour tout nombre complexe λ, on définit $\psi_\lambda:\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$, $(\xi,\eta)\mapsto\lambda\xi+\eta$.

Théorème 2.1. *Soient c un nombre complexe et R un endomorphisme de* $\mathfrak{g}$. *On note* $\mathcal{R}$ *l'opérateur de* $\mathfrak{g}^2$, *défini par* :

$$\mathcal{R}(X,Y):=\big(R(X-Y)+cY,R(X-Y)+cX\big). \tag{4}$$

(i) *Si R est une solution de l'équation de* (*mCYBE*) *de constante c, alors* $\mathcal{R}$ *est aussi solution de* (*mCYBE*) *de constante c.*
(ii) *Si* $\mathcal{R}$ *est une* $\mathcal{R}$*-matrice, alors pour toutes fonctions* Ad**-invariantes* F,G *sur* $\mathfrak{g}^*$ *et* λ,μ *deux nombres complexes, on a* :
   (a) $F\circ\psi_1$ *est un Casimir pour* $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.
   (b) *Les fonctions* $F\circ\psi_\lambda$ *et* $G\circ\psi_\mu$ *sont en involution pour* $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.

3. Intégrabilité du réseau de 2-Toda

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de rang ℓ, munie de sa forme de Killing $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$. On note, $\Pi=(\alpha_1,\dots,\alpha_\ell)$ une base de Φ et $(h_1,\dots,h_\ell)$ la base de $\mathfrak{h}$ formée par les coracines de Π. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe de deux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{k\geqslant 0}\mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{k<0}\mathfrak{g}_k$, où $\mathfrak{g}_k$, pour $k\neq 0$, est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les vecteurs e_β, avec β une racine de longueur k, et où $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$.

Soient P_+ et P_- les projections de $\mathfrak{g}$ respectivement, sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. L'endomorphisme $R := P_+ - P_-$ est une solution de (mCYBE) de constante 1. D'après le premier point (i) du Théorème 2.1, l'opérateur

$$\mathcal{R}(X,Y) = \big((P_+ - P_-)(X-Y)+Y, (P_+ - P_-)(X-Y)+X\big) \tag{5}$$

est une $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$. Via la forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle : \mathfrak{g}^2\times\mathfrak{g}^2\to\mathbf{C}$, $((x,y),(z,s))\mapsto \langle x\mid z\rangle + \langle y\mid s\rangle$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2=\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ s'identifie à $\mathfrak{g}^{*2}=\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$. Ce qui munit la variété $\mathfrak{g}^2$ du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson

$$\{F,G\}_{\mathcal{R}}(X,Y) = \big\langle (X,Y)\,\big|\,\big[\nabla F(X,Y),\nabla G(X,Y)\big]_{\mathcal{R}}\big\rangle,\quad \forall F,G\in\mathcal{F}\big(\mathfrak{g}^2\big), \tag{6}$$

où $\nabla F(X,Y)$ est le gradient de F en $(X,Y)\in\mathfrak{g}^2$ par rapport à $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$.

Remarque 3.1. Soit $(P_1,\dots,P_\ell)$ un système de ℓ générateurs homogènes de l'algèbre des fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}$ et soit $\phi_1 : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, $(X,Y)\mapsto X+Y$. D'après le Théorème 2.1, les fonctions $P_i\circ\phi_1$, pour $1\leqslant i\leqslant \ell$, sont des Casimirs pour $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.

Proposition 3.2. *Soit* $\mathcal{T}^2 = \bigoplus_{k\leqslant 0}\mathfrak{g}_k \times \bigoplus_{k\geqslant -1}\mathfrak{g}_k + (e,0)$, *où* $e=\sum_{i=1}^{\ell} e_{\alpha_i}$.

(i) *La variété* $\mathcal{T}^2$ *est une sous-variété de Poisson de* $(\mathfrak{g}^2,\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ *de dimension* $\dim\mathfrak{g}+2\ell$.
(ii) *En un point générique de la variété* $\mathcal{T}^2$*, le rang du* $\mathcal{R}$*-crochet de Poisson est égal à* $\dim\mathfrak{g}+\ell$.

Si $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, alors les éléments de $\mathcal{T}^2$ s'écrivent sous la forme (L,M) de l'expression (2). $\mathcal{T}^2$ est donc l'espace de phase du réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{g}$. Nous étendons la Définition 1.1 à $\mathfrak{g}$ de la manière suivante :

Définition 3.3. On appelle *réseau de* 2*-Toda sur une algèbre de Lie simple* $\mathfrak{g}$, le système formé par la paire d'équations de Lax

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(L,M)}{\partial t} = \big[(L_+,L_+),(L,M)\big],\\[2mm] \dfrac{\partial(L,M)}{\partial s} = \big[(M_-,M_-),(L,M)\big],\end{cases} \tag{7}$$

où (L,M) est un élément de $\mathcal{T}^2$, L_+ étant le projeté de L sur $\mathfrak{g}_+$ et M_- étant le projeté de M sur $\mathfrak{g}_-$.

Nous prouvons l'intégrabilité au sens de Liouville du réseau de 2-Toda. En effet, nous construisons une famille de fonctions, qui contient les hamiltoniens $\frac12\operatorname{Trace}L^2$ et $\frac12\operatorname{Trace}M^2$ du réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{g}$, de cardinal $\dim\mathcal{T}^2-\frac12\operatorname{Rk}\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$, indépendante et en involution sur $(\mathcal{T}^2,\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}})$.

Soit $(P_1,\dots,P_\ell)$ un système de ℓ générateurs homogènes de l'algèbre des fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}$ comme dans la Remarque 3.1. Puisque le degré de chaque P_i est m_i+1, où $m_1,\dots,m_\ell$ sont les exposants de $\mathfrak{g}$, chaque P_i permet de définir m_i+2 fonctions définies dans $\mathfrak{g}^2$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ de la façon suivante :

$$P_i\circ\phi_\lambda(X,Y) = P_i(\lambda X+Y) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m_i+1}\lambda^k F_{k,i}(X,Y). \tag{8}$$

Il suit du Théorème 2.1, de l'isomorphisme entre $\mathfrak{g}^{*2}$ et $\mathfrak{g}^2$ et de la formule (8) que :

Proposition 3.4. *La famille de fonctions* $\mathcal{F}=(F_{k,i},\ 0\leqslant k\leqslant m_i+1$ *et* $1\leqslant i\leqslant\ell)$ *est involutive pour le crochet* $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.

Soit $(e,h)=(\sum_{i=1}^{\ell} e_{\alpha_i},\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{2\ell}h_i)\in\mathcal{T}^2$. A l'aide d'un résultat de Rais, publié dans [4], on peut vérifier que les différentielles $\mathrm{d}F_{k,i}(e,h)$, pour $0\leqslant k\leqslant m_i+1$ et $1\leqslant i\leqslant\ell$, sont linéairement indépendantes comme éléments de $T^*_{(e,h)}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$ et ensuite comme éléments de $T^*_{(e,h)}\mathcal{T}^2$. Par suite :

Corollaire 3.5. *La famille de fonctions $\mathcal{F}$ est indépendante sur $\mathcal{T}^2$.*

A partir de la formule (8), on a $\operatorname{card}\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{\ell} m_i + 2\ell$. De l'égalité classique $\sum_{i=1}^{\ell} m_i = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} - \ell)$, nous déduisons que

$$\operatorname{card}\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + 3\ell),$$

nombre qui est, d'après la Proposition 3.2, égal à $\dim\mathcal{T}^2 - \frac{1}{2}\operatorname{Rk}\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.

En regroupant ces résultats et en utilisant la définition [1, déf. 4.13], nous obtenons que :

Théorème 3.6. *Le triplet $(\mathcal{T}^2, \{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}, \mathcal{F})$ est complètement intégrable au sens de Liouville.*

Remerciements

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Pol Vanhaecke, qui m'a initiée à la belle théorie des systèmes intégrables et m'a proposé cette question de recherche. Je suis très reconnaissante de l'aide que Camille Laurent-Gengoux m'a apportée aux cours des discussions que nous avons eues. Je remercie également Mustapha Rais de m'avoir indiqué la référence [4].

Références

[1] M. Adler, P. van Moerbeke, P. Vanhaecke, Algebraic Integrability, Painlevé Geometry and Lie Algebras, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
[2] M. Adler, P. van Moerbeke, String-orthogonal polynomials, string equations, and 2-Toda symmetries, Comm. Pure Appl. Math. 50 (3) (1997) 241–290.
[3] G. Carlet, The Hamiltonian structures of the two-dimensional Toda lattice and R-matrices, Lett. Math. Phys. 71 (3) (2005) 209–226.
[4] D. De Turck, H. Goldschmidt, J. Talvacchia, Connections with prescribed curvature and Yang–Mills currents: The semi-simple case, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 24 (1) (1991) 57–112.
[5] B. Kostant, The solution to a generalized Toda lattice and representation theory, Adv. in Math. 34 (3) (1979) 195–338.
[6] K. Ueno, K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, in: Group Representations and Systems of Differential Equations, Tokyo, 1982, in: Adv. Stud. Pure Math., vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1–95.