Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 853–856
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

# Nouvelle approche du théorème de ABB

Abdelhamid Bourass, Lahoussine Lafhim

*Département de mathématiques, faculté des sciences, université Mohamed V-Agdal, Rabat, Maroc*

Reçu le 11 mai 2008 ; accepté après révision le 19 mai 2009

Disponible sur Internet le 11 juin 2009

Présenté par Pierre-Louis Lions

**Résumé**

Cette Note présente un résultat de densité de type (ABB) pour la topologie forte dans un espace de Banach muni du préordre associé à un cône convexe possédant une base bornée. L'hypothèse de compacité est sensiblement affaiblie et la méthode présentée ici est nouvelle à notre connaissance. Basée sur des propriétés du cône de Bishop–Phelps, elle ne nécessite pas l'utilisation des cônes de dilatation de Hening. ***Pour citer cet article : A. Bourass, L. Lafhim, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***


**Abstract**

**New concept of the ABB Theorem.** This Note presents a density result of the ABB theorem type for a strong topology of a Banach space equipped with the preorder associated to a convex well-based cone. The hypothesis of compactness is relaxed. Here the technique used is based on properties of the Bishop–Phelps cone, and does not require any property of the Hening dilating cone. ***To cite this article: A. Bourass, L. Lafhim, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***


## 1. Introduction

En 1953, Arrow, Barankin et Blackwell (ABB) ont établi en [1] que lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de son ordre naturel induit par le cône $\mathbb{R}^n_+ = \prod_1^n \mathbb{R}^+$ et $A$ est une partie convexe compacte de $\mathbb{R}^n$, alors l'ensemble des points de $A$ supportés par une forme linéaire strictement positive sur $\mathbb{R}^n_+$ est dense dans l'ensemble des points maximaux de $A$. Depuis, plusieurs auteurs ont donné des extensions de ce résultat en dimension infinie dans le cadre des espaces normés et des espaces localement convexes munis d'une topologie compatible avec la dualité. Les hypothèses portent sur la nature du cône (cône à base bornée, cône à base non bornée, cône à base compacte) et/ou sur l'ensemble $A$ (compacité faible ou compacité forte). Des hypothèses affaiblies sur le cône nécessitant des hypothèses renforcées sur la partie $A$ et inversement.

Notre contribution à travers cette note réside en deux points : un point de vue nouveau différent des méthodes utilisant les cônes de dilatation de Hening [2,7,11] (voir aussi [9]), où le cône de Bishop–Phelps joue un rôle crucial, et un affaiblissement de l'hypothèse de compacité sur la partie $A$. Signalons toutefois que la démarche que nous proposons ne permet pas à priori d'atteindre les cônes à base non bornée.

*Adresses e-mail :* bourass.a@fsr.ac.ma (A. Bourass), laflah2@hotmail.com (L. Lafhim).

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.05.010

## 2. Définitions et résultats préliminaires

Soit $X$ un espace de Banach de dual $X'$, $C$ un cône convexe fermé saillant de sommet 0 (i.e. : $\lambda C \subset C$, $\forall \lambda \geqslant 0$, $C + C \subset C$ et $C \cap (-C) = \{0\}$). L'ensemble $C^- = \{x' \in X'\colon\ x'x \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in C\}$, désigne le cône dual négatif de $C$ et $C^{-*} = \{x' \in X'\colon\ x'x < 0 \text{ pour tout } x \in C \setminus \{0\}\}$, l'ensemble des formes strictement négatives. Un élément de $A$ est un point maximal de $A$ par rapport à $C$ si $A \cap (x + C) = \{x\}$. Un élément de $A$ est un point maximal propre positif si, il existe $x' \in C^{-*}$ tel que $x'(x) = \max_{y \in A} x'(y)$.

On notera par la suite $E(A, C)$ l'ensemble des points maximaux de $A$ et $\operatorname{Pos} E(A, C)$ l'ensemble des points maximaux propres positifs de $A$.

**Définition 2.1.** Un cône convexe $C \subset X$ admet une base s'il existe une partie convexe fermée $B \subset X$ ne contenant pas 0 telle que pour tout $x \in C$ il existe $\lambda \geqslant 0$ et $b \in B$ uniques tels que $x = \lambda b$. Si de plus $B$ est bornée on dit que $C$ est à base bornée ou $C$ est bien basé.

Soit $x' \in X'$ et $\alpha < 0$, la tranche de $C$ en 0 définie par $x'$ et $\alpha$ est l'ensemble $T(C, x', \alpha) = \{x \in C,\ x'(x) > \alpha\}$.

**Définition 2.2.** (See [3,10].) Le sommet 0 est fortement exposé dans $C$ si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $\forall \epsilon > 0$ il existe $x' \in X'$ et $\alpha < 0$ tels que la tranche $T(C, x', \alpha)$ soit de diamètre plus petit que $\epsilon$.
(ii) Il existe $x' \in C^{-*}$ tel que pour toute suite $(x_n)_n$ de $C$ vérifiant $x'(x_n) \to 0$ on a $\|x_n\| \to 0$.

On notera par la suite $SE(C)$ l'ensemble des formes linéaires qui exposent fortement 0 dans $C$.

Un exemple de cône convexe fermé de sommet fortement exposé est le cône de Bishop–Phelps, défini pour $x' \in X'$ et $\epsilon > 0$ par, $C(x', \epsilon) = \{x \in X,\ x'x + \epsilon\|x\| \leqslant 0\}$.

Les propriétés suivantes sont partiellement mentionnées sous d'autres formes par plusieurs auteurs [4,6,8]. Nous les énonçons telles que nous les utiliserons. Notons $\{x' = \alpha\} = \{x \in X,\ x'(x) = \alpha\}$.

**Lemme 2.3.**

(a) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :
 (i) $C^{-*} \neq \emptyset$ ;
 (ii) *le cône $C$ admet une base* ;
 (iii) *il existe $x' \in X'$ tel que pour tout $\alpha < 0$ l'ensemble $\{x' = \alpha\} \cap C$ est une base de $C$.*
(b) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :
 (i) $SE(C) \neq \emptyset$ ;
 (ii) *le cône $C$ admet une base bornée* ;
 (iii) *il existe $x' \in X'$ tel que pour tout $\alpha < 0$ l'ensemble $\{x' = \alpha\} \cap C$ est une base bornée de $C$.*

Le lemme ci-dessous, moins connu, met en évidence l'importance du cône de Bishop–Phelps. Il exprime le fait que tout cône de sommet fortement exposé est contenu dans un cône de Bishop–Phelps.

**Lemme 2.4.** *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Le sommet* 0 *est fortement exposé par $x'$ dans $C$ ($SE(C) \neq \emptyset$).*
(ii) *Il existe $\epsilon > 0$ et $x' \in X'$ tels que $C \subset C(x', \epsilon)$.*

Nous regroupons ci-dessous quelques propriétés des cônes de Bishop–Phelps dont on fera usage. Elles sont analogues à celles des cônes de dilatation de Hening, [7,11].

**Propriétés 2.5.** *On suppose que $SE(C) \neq \emptyset$. Pour tout $x' \in SE(C)$ posons $\epsilon(x') = \sup\{\epsilon > 0, C \subset C(x', \epsilon)\}$. Alors*

(1) *$C \subset C(x', \epsilon(x'))$ et $\epsilon(x') \leqslant \|x'\|$.*
(2) *Si $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon(x') < \epsilon$, alors $C \subset C(x', \epsilon(x')) \subset C(x', \epsilon_2) \subset C(x', \epsilon_1)$ et $C \nsubseteq C(x', \epsilon)$.*
(3) *Si $\epsilon < \epsilon(x')$ alors $C \setminus \{0\} \subset C(x', \epsilon(x')) \subset int(C(x', \epsilon))$ et $0 \notin int(C(x', \epsilon(x')))$.*
(4) *$C(x', \epsilon(x')) = \bigcap_{0<\epsilon\leqslant\epsilon(x')} C(x', \epsilon)$.*

Dans toute la suite, pour tout $x' \in SE(C)$, on notera $C(x') = C(x', \epsilon(x'))$.

## 3. Théorème de densité

Pour toute partie finie $F \subset SE(C)$ on note $C_F$ le cône convexe fermé $C_F = \bigcap_{x'\in F} C(x')$. Il est clair que $F \subset SE(C_F)$, et $C \subset \bigcap_{x'\in SE(C)} C(x') = \bigcap_{F\in P_f(SE(C))} C_F$, où $P_f(SE(C))$ désigne l'ensemble des parties finies de $SE(C)$. On note $\overline{E}$ l'adhérence d'une partie $E$ de $X$.

**Théorème 3.1.** *Soit $C$ un cône convexe fermé et $A$ une partie convexe fermée de $X$. On suppose que $SE(C) \neq \emptyset$ et que l'ensemble $\{x' = \alpha\} \cap A \cap C_F$ est faiblement compact pour tout $F \in P_f(SE(C))$, tout $x' \in F$, et tout $\alpha < 0$. Alors :*

$$E(A, C) \subset \overline{\bigcup_{F\in P_f(SE(C))} E(A, C_F)}.$$

La démonstration repose sur les observations suivantes regroupées dans les lemmes ci-dessous :

**Lemme 3.2.** *Soit $C$ un cône convexe fermé tel que $SE(C) \neq \emptyset$. Alors*

$$SE(C) = SE(C) + C^- \quad \text{et} \quad C = \bigcap_{x'\in SE(C)} \{x' \leqslant 0\}.$$

**Démonstration 3.3.** D'après le théorème des bipolaires ou bien directement en utilisant un argument de séparation, observons d'abord que $C = \bigcap_{x'\in C^-} \{x' \leqslant 0\}$. Ensuite si $x' + y' \in SE(C) + C^-$, soit $(x_n)_n$ une suite de $C \setminus \{0\}$ telle que $(x' + y')(x_n) \to 0$. On a $x'(x_n) \to 0$ et $y'(x_n) \to 0$ car $x'(x_n) + y'(x_n) < 0$. Il en résulte que $\|x_n\| \to 0$ car $x' \in SE(C)$.

Montrons la relation $C = \bigcap_{x'\in SE(C)} \{x' \leqslant 0\}$. Soit $x \in \bigcap_{x'\in SE(C)} \{x' \leqslant 0\}$. Si $x \notin C$, il existerait $x'_1 \in C^-$ tel que $x'_1(x) > 0$. Soit $x' \in SE(C)$ quelconque et $(\lambda_n)_n$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. Comme $\lambda_n x'(x) \to 0$, il existe un entier $n_0$ tel que $\lambda_{n_0} x'(x) + x'_1(x) > 0$. Cela contredit le fait que $x \in \bigcap_{x'\in SE(C)} \{x' \leqslant 0\}$ puisque $\lambda_{n_0} x' + x'_1 \in SE(C)$. L'autre inclusion est évidente. □

**Lemme 3.4.** *Soit $C$ un cône convexe fermé et $K$ un convexe faiblement compact de $X$ tel que $C \cap K = \emptyset$. Si $SE(C) \neq \emptyset$, alors il existe une partie finie $F \subset SE(C)$ telle que $C_F \cap K = \emptyset$.*

**Démonstration 3.5.** Soit $x \in K$, d'après le Lemme 3.2, il existe $x' \in SE(C)$ tel que $x'(x) > 0$. Il en résulte l'existence d'un voisinage faible ouvert $V_x$ de $x$ tel que $x'(y) > 0$ pour tout $y \in V_x$. Puisque $K$ est faiblement compact, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Toujours d'après le Lemme 3.2, il existe $x'_1, \ldots, x'_n$ dans $SE(C)$ tels que $x'_i(c) \leqslant 0 < x'_i(y)$ $\forall i = 1, \ldots, n$, $\forall c \in C$ et $\forall y \in V_{x_i}$.

Choisissons $F = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$. On vérifie alors que $C_F \cap K = \emptyset$, car $x \in C_F$ implique $x'_i(x) \leqslant 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $x \in K$ implique qu'il existe $x'_i$ tel que $x'_i(x) > 0$. □

**Lemme 3.6.** *Soit $C$ un cône convexe fermé et $A$ une partie convexe fermée de $X$ telle que $A \cap C = \{0\}$. Soit $F$ une partie finie de $SE(C)$, $x' \in F$ et un réel $\alpha < 0$. On suppose que $\{x' = \alpha\} \cap A \cap C_F$ est faiblement compact. Alors il existe une partie finie $F_1$ de $SE(C)$ telle que $F_1 \supset F$ et $A \cap C_{F_1} \subset A \cap T(C_F, x', \alpha)$.*

**Démonstration 3.7.** En appliquant le Lemme 3.4 à $K = \{x' = \alpha\} \cap A \cap C_F$, on peut trouver une partie finie $F_1$ de $SE(C)$, que l'on peut choisir contenant $F$ (en considérant $F_1 \cup F$), telle que $C_{F_1} \cap K = \emptyset$. Si $x_1 \in A \cap C_{F_1}$ et $x_1 \notin A \cap T(C_F, x', \alpha)$, alors $x'(x_1) < \alpha < 0$. Posons $\lambda = \frac{\alpha}{x'(x_1)}$. Comme $0 < \lambda < 1$ et $0 \in A$ on a $\lambda x_1 \in A \cap C_{F_1} \cap \{x' = \alpha\} \subset A \cap C_F \cap \{x' = \alpha\} = K$. Ainsi $\lambda x_1 \in K \cap C_{F_1}$, ce qui contredit le fait que $K \cap C_{F_1} = \emptyset$. □

**Démonstration du Théorème 3.1.** Soit $x \in E(A, C)$. Par translation on se ramène à $x = 0$ et donc $A \cap C = \{0\}$. Montrons qu'il existe une suite $(F_n)_n$ de parties finies de $SE(C)$ et une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in E(A, C_{F_n})$ et $\|x_n\| \to 0$. Soit $(\epsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs convergente vers 0. Fixons $x'_0 \in SE(C)$ et posons $F_0 = \{x'_0\}$. Soit $\alpha_0 < 0$ tel que $T(C(x'_0), x'_0, \alpha_0)$ soit de diamètre inférieur à $\epsilon_0$. Supposons construits $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ des parties finies de $SE(C)$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $x_i \in E(A, C_{F_i})$ et $\|x_i\| \leqslant \epsilon_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $x'_n \in F_n$ quelconque et soit $\alpha < 0$ tel que la tranche $T(C_{F_n}, x'_n, \alpha)$ soit de diamètre plus petit que $\epsilon_n$. D'après le Lemme 3.6 il existe une partie finie $F_{n+1}$ de $SE(C)$ telle que $F_{n+1} \supset F_n$ et $A \cap C_{F_{n+1}} \subset T(C_{F_n}, x'_n, \alpha)$. L'ensemble $A \cap C_{F_{n+1}}$ étant borné, il existe $x_{n+1} \in E(A \cap C_{F_{n+1}}, C_{F_{n+1}})$ [2,5]. En fait, $x_{n+1} \in E(A, C_{F_n})$ et on a $\|x_{n+1}\| \leqslant \epsilon_{n+1}$ ce qui achève la construction de la suite $(x_n)_n$ désirée. □

**Corollaire 3.8.** *Sous les hypothèses du Théorème* 3.1 *on a*

$$E(A, C) \subset \overline{\operatorname{Pos} E(A, C)}.$$

**Démonstration 3.9.** Il suffit de montrer que $\bigcup_{F \in P_f(SE(C))} E(A, C_F) \subset \operatorname{Pos} E(A, C)$, la démonstration est une adaptation de celle de [11]. □

## Références


[1] K.J. Arrow, E.W. Barankin, D. Blackwell, Admissible Points of Convex Sets. Contribution to the Theory of Games, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953.

[2] H. Attouch, H. Riahi, Stability result for Ekeland's $\epsilon$-variational principle and cone extremal solutions, Math. Oper. Res. 18 (1) (1993) 173–201.

[3] R.D. Bourgin, Geometric Aspects of Convex Sets with Radon–Nikodym Property, Lecture Notes in Math., vol. 993, Springer-Verlag, 1983.

[4] A. Daniilidis, ABB theorem and related results in cone duality: a survey, in: Optimization, in: Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, vol. 481, Springer, Berlin, 2000, pp. 119–131.

[5] F. Ferro, A new ABB theorem in Banach spaces, Optimization 46 (1999) 353–362.

[6] R.J. Gallagher, O.A. Salh, Two generalization of a theorem of ABB, SIAM J. 31 (1) (1993) 247–256.

[7] A. Göpfert, C.H.R. Tammer, C. Zălinescu, A new ABB theorem in normed vector spaces, Optimization 53 (4) (2004) 369–376.

[8] J. Jahn, A generalization of a theorem of Barankin, and Blackwell, SIAM J. Control Appl. 26 (5) (1988).

[9] J.P. Penot, The drop theorem, The petal theorem and Ekeland variational principle, Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 10 (9) (1986) 813–822.

[10] R.R. Phelps, Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, Lecture Note in Mathematics, vol. 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[11] F. Wantao, On the density of proper efficient points, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 1213–1217.