Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 845–848
Comptes Rendus Mathematique

Théorie des nombres

Sur les symboles modulaires de Manin–Teitelbaum pour $\mathbf{F}_q(T)$

Cécile Armana

Fachrichtung 6.1 Mathematik, Universität des Saarlandes, Postfach 15 11 50, 66041 Saarbrücken, Allemagne

Reçu le 5 mars 2009 ; accepté le 30 avril 2009

Disponible sur Internet le 23 mai 2009

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Le groupe des symboles modulaires pour $\mathbf{F}_q(T)$, défini par Teitelbaum, possède une présentation par générateurs, appelés symboles de Manin–Teitelbaum, et relations. Nous explicitons l'action des opérateurs de Hecke en termes de ces générateurs. On en déduit une minoration de la proportion de certaines formes automorphes propres de rang nul pour $\mathbf{F}_q(T)$. Enfin, on exhibe une base explicite de symboles modulaires parmi ces générateurs. ***Pour citer cet article : C. Armana, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

On Manin–Teitelbaum modular symbols for $\mathbf{F}_q(T)$. The group of modular symbols for $\mathbf{F}_q(T)$, as defined by Teitelbaum, has a presentation given by generators, called Manin–Teitelbaum symbols, and relations. We give a formula for the action of Hecke operators, in terms of generators. We deduce a lower bound for the proportion of certain automorphic eigenforms of zero rank for $\mathbf{F}_q(T)$. Finally, we provide an explicit basis of generators. ***To cite this article: C. Armana, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Soit q une puissance d'un nombre premier p. Teitelbaum [11] a introduit une notion de symboles modulaires pour le corps de fonctions $\mathbf{F}_q(T)$, analogues aux symboles modulaires classiques pour $\mathbf{Q}$. En particulier, ils admettent une présentation par générateurs et relations, similaire à la présentation de Manin. Nous apportons des compléments à cette théorie :

(i) une formule pour l'action des opérateurs de Hecke sur la famille de générateurs (Théorème 3.1) ;
(ii) une base explicite de symboles modulaires, extraite de ces générateurs (Théorème 5.1).

Nous donnons ensuite des applications. Le premier énoncé fournit une minoration de la proportion de formes automorphes pour $\mathbf{F}_q(T)$, propres pour Hecke et de rang analytique nul (Théorème 4.2). Le deuxième permet de décrire la structure du module de Hecke des symboles modulaires dans un cas particulier (Proposition 5.2).

Adresse e-mail : armana@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.04.032

2. Rappels sur les symboles modulaires de Teitelbaum

Posons $A = \mathbf{F}_q[T]$ et, pour un idéal non nul $\mathfrak{n}$ de A, $\Gamma_0(\mathfrak{n}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, A) \mid c \equiv 0 \bmod \mathfrak{n}\}$. On appelle *degré* de $\mathfrak{n}$ l'entier $\log_q \# A/\mathfrak{n}$. Le groupe des diviseurs de degré 0 à support dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_q(T))$ est muni d'une action de $\Gamma_0(\mathfrak{n})$ par transformations linéaires. Le groupe abélien des coinvariants par cette action est le groupe des symboles modulaires $\mathbf{M}_\mathfrak{n}$ de Teitelbaum [11]. Rappelons la présentation qu'il en a donnée. Notons $(u:v)$ les éléments de $\mathbf{P}^1(A/\mathfrak{n})$. Le groupe $\mathbf{M}_\mathfrak{n}$ est isomorphe au quotient du groupe abélien libre $\mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(A/\mathfrak{n})]$ par les relations

$$\begin{aligned}
&(u:v) - (du:d'v) = 0,\\
&(u:v) + (-v:u) = 0,\\
&(u:v) + (v:-u-v) + (-u-v:u) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

pour $d, d' \in \mathbf{F}_q^\times$ et $(u:v) \in \mathbf{P}^1(A/\mathfrak{n})$. Le symbole modulaire correspondant à $(u:v)$ est noté $\xi(u:v)$ et appelé *symbole modulaire de Manin–Teitelbaum* (Teitelbaum a adopté la convention inverse $-\xi(u:v)$).

Considérons le groupe abélien $\mathbf{H}_\mathfrak{n}$ des cochaînes harmoniques paraboliques à valeurs dans $\mathbf{Z}$ et invariantes sous l'action de $\Gamma_0(\mathfrak{n})$ [2]. D'après Drinfeld, $\mathbf{H}_\mathfrak{n} \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{C}$ s'interprète comme un espace de formes automorphes paraboliques sur $\mathrm{GL}(2, \mathbf{A})$, où $\mathbf{A}$ est l'anneau des adèles de $\mathbf{F}_q(T)$. Le sous-espace des symboles modulaires paraboliques est noté $\mathbf{M}_\mathfrak{n}^0$. Teitelbaum a mis en évidence un accouplement parfait sur $\mathbf{Q}$, donné par l'intégration d'une cochaîne le long d'un symbole modulaire (voir [11], Th. 14) :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_\mathfrak{n}^0 \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{Q} \times \mathbf{H}_\mathfrak{n} \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q},\\
&(m, F) \longmapsto \int_m F.
\end{aligned}$$

3. Action de Hecke sur les symboles modulaires de Manin–Teitelbaum

Les opérateurs de Hecke $T_\mathfrak{m}$ (pour $\mathfrak{m}$ idéal de A) sont des endomorphismes de $\mathbf{M}_\mathfrak{n}$ définis à partir de correspondances sur le graphe combinatoire $\Gamma_0(\mathfrak{n})\backslash\mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est l'arbre de Bruhat–Tits de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{F}_q((\frac{1}{T})))$. Ils engendrent une $\mathbf{Z}$-algèbre commutative $\mathbf{T}$ de $\mathrm{End}(\mathbf{M}_\mathfrak{n}^0 \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{C})$ appelée *algèbre de Hecke*. Ces correspondances définissent aussi des endomorphismes de $\mathbf{H}_\mathfrak{n} \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{C}$; la $\mathbf{Z}$-algèbre qu'ils engendrent s'identifie à $\mathbf{T}$ *via* l'accouplement. L'action des opérateurs de Hecke sur les générateurs de $\mathbf{M}_\mathfrak{n}$ s'exprime à l'aide des formules suivantes :

Théorème 3.1. *Pour tout idéal* $\mathfrak{m}$ *de* A *et* $(u:v) \in \mathbf{P}^1(A/\mathfrak{n})$*, on a*

$$T_\mathfrak{m}\xi(u:v) = \sum_{M \in \mathscr{S}_\mathfrak{m}} \xi\big((u:v)M\big) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{S}_\mathfrak{m}} \xi(au+cv:bu+dv)$$

où $\mathscr{S}_\mathfrak{m}$ *est l'ensemble fini* $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in A,\ \deg a > \deg b,\ \deg d > \deg c,\ a$ *et* d *unitaires,* $(ad-bc) = \mathfrak{m}\}$ *et la somme est restreinte aux matrices* M *telles que* $(u:v)M$ *est bien défini dans* $\mathbf{P}^1(A/\mathfrak{n})$.

Ces expressions sont similaires à celles obtenues par Merel [6] pour les symboles modulaires classiques et leur démonstration suit d'ailleurs le même principe (pour les détails, voir [1], Th. 2.28).

L'ensemble $\mathscr{S}_\mathfrak{m}$ est indépendant de l'idéal $\mathfrak{n}$: en particulier, le Théorème 3.1 entraîne l'analogue de la « loi de réciprocité de Manin » pour les courbes elliptiques sur les corps de fonctions [3,5]. Enfin, ce Théorème fournit un algorithme pour l'étude des opérateurs de Hecke sur les symboles modulaires et les cochaînes harmoniques.

4. Minoration du nombre de formes automorphes de rang nul

Toute cochaîne harmonique $F \in \mathbf{H}_\mathfrak{n}$ possède une fonction L, holomorphe en la variable complexe s, notée $L(F, s)$. Soit $[0, \infty] \in \mathbf{M}_\mathfrak{n}$ le symbole modulaire associé au diviseur $(\infty) - (0)$. On a $L(F, 1) = \frac{1}{q-1}\int_{[0,\infty]} F$ ([11], p. 290, par exemple d'après Tan et Rockmore [9,10]). Par dualité, il existe un unique symbole modulaire $\mathbf{e} \in \mathbf{M}_\mathfrak{n}^0 \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{Q}$

correspondant à la forme linéaire $F \mapsto \int_{[0,\infty]} F$ sur $\mathbf{H}_{\mathfrak{n}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Il est appelé *élément d'enroulement*, d'après [4,7]. L'énoncé suivant estime la dimension du sous-espace $\mathbf{Te}$:

Proposition 4.1. *Soit $r \in \mathbf{N}$. Si $\mathfrak{n}$ est un idéal premier de A de degré $\geqslant 2r+3$, les symboles modulaires $T_{\mathfrak{m}}\mathbf{e}$, pour $\mathfrak{m}$ de degré r, sont linéairement indépendants dans $\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.*

La démonstration s'apparente à celle de Parent [8] : elle repose sur le Théorème 3.1 et un critère combinatoire d'indépendance linéaire dans $\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}$, qui fait usage de la présentation de Manin–Teitelbaum. Toutefois, alors qu'un résultat de théorie analytique des nombres intervenait dans la démonstration classique, aucun tel énoncé n'est requis ici. Pour les détails, on se réfère au Th. 2.58 de [1]. Signalons que la Proposition 4.1 joue un rôle important dans une étude de la torsion des modules de Drinfeld de rang 2, qui devrait faire l'objet d'une autre Note [1].

Remarque 1. On dispose de la variante modulo p suivante. Il existe un plus petit entier $d_{\mathbf{e}} \in \mathbf{N}$, premier à p, tel que $d_{\mathbf{e}}\mathbf{e} \in \mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0$. Notons $\widetilde{\mathbf{e}}$ la classe de $d_{\mathbf{e}}\mathbf{e}$ dans $\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0/p\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0$. Sous les mêmes hypothèses, on a un énoncé de $\mathbf{F}_p$-indépendance linéaire pour les symboles modulaires $T_{\mathfrak{m}}\widetilde{\mathbf{e}}$ dans $\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0/p\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0$.

Par dualité, on déduit de la Proposition 4.1 une estimation de la proportion de cochaînes harmoniques de rang nul.

Théorème 4.2. *Soit $\mathfrak{n}$ un idéal premier de degré $\geqslant 3$. Notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des formes propres pour Hecke et normalisées de $\mathbf{H}_{\mathfrak{n}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$. Alors on a*

$$\#\{F \in \mathscr{F} \mid L(F,1) \neq 0\} \geqslant \frac{\sqrt{q^2-1}}{q^2}(\#\mathscr{F})^{1/2}.$$

Pour les formes modulaires classiques, des énoncés d'indépendance linéaire dans les symboles modulaires fournissent des minorations moins fines, avec les exposants $1/6$ (par Parent avec une méthode similaire à la nôtre, [8], rem. p. 89) et $1/2+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (par VanderKam [12]).

5. Base explicite de symboles modulaires

L'énoncé suivant est obtenu par la même méthode que la Proposition 4.1 (Th. 2.40 et Cor. 2.42 de [1]) :

Théorème 5.1. *Soit $\mathfrak{n}$ un idéal premier de A de degré impair $d \geqslant 3$. Les symboles de Manin–Teitelbaum $\xi(P:Q)$, où P et Q parcourent les polynômes unitaires de A, premiers entre eux et tels que $\deg Q < \deg P < d/2$, forment une base sur $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0$. De plus, en ajoutant à cette famille le symbole modulaire $\xi(1:0)$, on obtient une base sur $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}$.*

L'espace des symboles modulaires de poids 2 pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(N)$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est l'analogue de $\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}$: Manin a montré qu'il admet un système de générateurs indexés par $\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ et donné un ensemble de relations analogue à (1). Cette présentation est couramment utilisée pour calculer les symboles modulaires. Il ne semble pourtant pas exister de méthode systématique pour extraire une base de générateurs analogue à celle énoncée dans le Théorème 5.1.

Ce Théorème devrait avoir des applications à l'étude algorithmique des formes automorphes. Nous donnons ici une conséquence pour la structure du $\mathbf{T}$-module des symboles modulaires paraboliques. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal premier de A distinct de $\mathfrak{n}$, on pose $\eta_{\mathfrak{m}} = T_{\mathfrak{m}} - (1+q^{\deg \mathfrak{m}}) \in \mathbf{T}$. L'*idéal d'Eisenstein* est l'idéal I_E de $\mathbf{T}$ engendré par $\eta_{\mathfrak{m}}$, pour tout $\mathfrak{m}$ distinct de $\mathfrak{n}$. Il est facile de voir que le symbole modulaire $\eta_{\mathfrak{m}}[0,\infty]$ est dans le sous-espace $(q-1)\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0$. L'homomorphisme de $\mathbf{T}$-modules

$$\begin{aligned} I_E &\longrightarrow \mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0, \\ t &\longmapsto \frac{1}{q-1} t\mathbf{e} \end{aligned}$$

est donc bien défini. C'est l'analogue de l'homomorphisme d'enroulement de Mazur. L'énoncé suivant peut être rapproché du Th. 8.10 de [4] :

Proposition 5.2. *Si* $\mathfrak{n}$ *est un idéal premier de degré* 3*, l'homomorphisme d'enroulement est un isomorphisme de* $\mathbf{T}$*-modules.*

Le principe de la preuve est le suivant : on démontre que les symboles modulaires $\xi(P:1)$, pour P unitaire de degré 1, sont dans l'image de l'homomorphisme. Comme ils forment une base de $\mathbf{M}_{\mathfrak{n}}^0$ d'après le Théorème 5.1, cela permet de conclure.

Remerciements

Cette Note a été rédigée lors d'un séjour à l'Université de la Sarre, avec l'aide d'une bourse Lavoisier. Je remercie E.-U. Gekeler pour son hospitalité et L. Merel pour ses conseils.

Références

[1] C. Armana, Torsion rationnelle des modules de Drinfeld, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7, 2008.
[2] V. Drinfeld, Elliptic modules, Math. Sbornik 94 (1976) 594–627. Traduction anglaise : Math. USSR-Sb. 23 (4) (1976) 561–592.
[3] Y. Manin, Parabolic points and zeta functions of modular curves, Math. USSR-Izv. 6 (1972) 19–64.
[4] B. Mazur, Modular curves and the Eisenstein ideal, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 47 (1977) 33–186.
[5] L. Merel, Opérateurs de Hecke pour $\Gamma_0(N)$ et fractions continues, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (3) (1991) 519–537.
[6] L. Merel, Universal Fourier expansions of modular forms, in: On Artin's Conjecture for Odd 2-Dimensional Representations, in: Lecture Notes in Math., vol. 1585, Springer, Berlin, 1994, pp. 59–94.
[7] L. Merel, Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres, Invent. Math. 124 (1–3) (1996) 437–449.
[8] P. Parent, Bornes effectives pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres, J. Reine Angew. Math. 506 (1999) 85–116.
[9] K.-S. Tan, Modular elements over function fields, J. Number Theory 45 (3) (1993) 295–311.
[10] K.-S. Tan, D. Rockmore, Computation of L-series for elliptic curves over function fields, J. Reine Angew. Math. 424 (1992) 107–135.
[11] J. Teitelbaum, Modular symbols for $\mathbf{F}_q(T)$, Duke Math. J. 68 (2) (1992) 271–295.
[12] J. VanderKam, Linear independence of Hecke operators in the homology of $X_0(N)$, J. London Math. Soc. 61 (2) (2000) 349–358.