Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 725–728
Comptes Rendus Mathematique

Théorie des groupes/Équations aux dérivées partielles

Équation des ondes sur les espaces symétriques riemanniens

Ali Hassani

Laboratoire Modal'X, UFR SEGMI, bâtiment G, Université Paris Ouest Nanterre-La Défense, 200, avenue de la République, 92001 Nanterre cedex, France

Reçu le 7 avril 2009 ; accepté le 28 avril 2009

Disponible sur Internet le 23 mai 2009

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Nous montrons que les solutions de l'équation des ondes homogène sur des espaces symétriques riemanniens possèdent des propriétés de dispersion et nous déduisons des estimations de type Strichartz pour ces solutions. ***Pour citer cet article : A. Hassani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Wave equation on Riemannian symmetric spaces. We prove that the solutions of the homogeneous wave equation on Riemannian symmetric spaces have dispersion properties and we deduce Strichartz type estimates for these solutions. ***To cite this article: A. Hassani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction et notation

Soient Δ l'opérateur de Laplace sur une variété X et u une solution du problème de Cauchy :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u = 0, \qquad u(t=0) = u_0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(t=0) = u_1, \quad x \in X \text{ et } t \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, il existe des estimations de type Strichartz pour les solutions du problème $(*)$ [4] :

$$\|u\|_{L^r(I, \dot{B}_p^{s,2}(\mathbb{R}^n))} \leqslant c(r)\big(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{\dot{B}_2^{-1,2}(\mathbb{R}^n)}\big) \tag{A}$$

où $I = [0; +\infty[$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $s = \frac{n+1}{4}(\frac{2}{p} - 1)$, $\frac{2}{r} = \frac{n-1}{2}(1 - \frac{2}{p})$ et $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est *l'espace de Besov homogène* sur $\mathbb{R}^n$. Des estimées analogues ont été obtenues sur les groupes de Heisenberg [2], sur les espaces hyperboliques [8] et sur les espaces de Damek–Ricci [6]. Il existe également des propriétés de dispersion pour ces solutions [3] :

$$\big\|u(t,.)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\big(1 + |t|\big)^{-(n-1)/2}\big(\|u_0\|_{\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{\dot{B}_1^{s-1,1}(\mathbb{R}^n)}\big) \tag{B}$$

où $s = \frac{n+1}{2}$.

Adresse e-mail : ali.hassani@u-paris10.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.04.031

Dans le contexte général où X est une variété pseudo-riemannienne et $\Delta = L$ est un opérateur différentiel du second ordre qui satisfait certaines conditions d'intégrabilité, N. Lohoué obtient des estimations de ces solutions dans L^p en fonction des normes des données initiales [5].

Dans cette Note, nous généralisons les estimations (A) et (B) au cas où X est un espace symétrique riemannien. Plus précisement, nos résultats se situent dans le contexte où $X = G/K$, avec G un groupe de Lie semisimple non compact connexe de centre fini et K un sous groupe compact maximal de G.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, où $\mathfrak{k}$ désigne l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{p}$ s'identifit à l'espace tangent à G/K en eK.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$. On fixe un système positif Σ_+ de racines de $\mathfrak{g}$ relatives à $\mathfrak{a}$, on note ρ la demi-somme des racines positives comptées avec leur multiplicité et W le groupe de Weyl associé. En particulier si $\mathfrak{a}_+$ désigne la chambre de Weyl positive définie par Σ_+, on a la décomposition de Cartan $G = K\exp(\overline{\mathfrak{a}_+})K$ de G où $\overline{\mathfrak{a}_+}$ est la fermeture de $\mathfrak{a}_+$. On notera par $A(g)$ la composante dans $\exp(\overline{\mathfrak{a}_+})$ d'un élément g de G. La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ induit une norme sur $\mathfrak{a}$, sur le dual vectoriel $\mathfrak{a}^\star$ de $\mathfrak{a}$ et par extension linéaire sur les complexifications $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{a}^\star_\mathbb{C}$ de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^\star$. Pour simplifier, nous désignons par le même symbole $\|\ \|$ ces normes. De même, on pose $\|g\| = \|A(g)\|$ pour tout $g \in G$.

Notons $B_p^{s,q}(X)$; $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Besov sur X, i.e. l'ensemble des distributions tempérées sur X tel que :

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(X)} = \|f \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \left(\int_0^1 t^{-sq}\|f \times \varphi_t^N\|^q_{L^p(X)} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} < \infty,$$

où $\{\varphi_{0,N}, \varphi_t^N\}_{0<t\leqslant 1,\ 2N>|s|}$ représente un système de fonctions K-biinvariantes à supports compacts sur G telle que pour toute fonction $f \in L^2(X)$, nous avons la formule [7] :

$$f(x) = (f \times \varphi_{0,N})(x) + \int_0^1 \left(f \times \varphi_t^N \times \varphi_t^N\right)(x)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

La transformée de Fourier sphérique d'une fonction f de classe C^∞ à support compact et K-biinvariante sur G est la fonction définie sur $\mathfrak{a}^\star_\mathbb{C}$ par

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g)\varphi_{-\lambda}(g)\,\mathrm{d}g, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^\star_\mathbb{C},$$

où φ_λ représente la fonction sphérique sur G. Si nous désignons par $|W|$ l'ordre du groupe de Weyl W et par $c(\lambda)$ la fonction de Harish-Chandra [1], alors la formule de Plancherel pour la transformée sphérique prend la forme suivante :

$$\int_G \left|f(g)\right|^2 \mathrm{d}g = \frac{1}{|W|}\int_{\mathfrak{a}^\star} \left|\hat{f}(\lambda)\right|^2 \left|c(\lambda)\right|^{-2} \mathrm{d}\lambda.$$

Si f est intégrable sur G telle que sa transformée sphérique soit dans l'espace $L^1(\mathfrak{a}^\star, \frac{|c(\lambda)|^{-2}}{|W|}\,\mathrm{d}\lambda)$, alors la formule d'inversion s'écrit :

$$f(g) = \frac{1}{|W|}\int_{\mathfrak{a}^\star} \varphi_\lambda(g)\hat{f}(\lambda)\left|c(\lambda)\right|^{-2} \mathrm{d}\lambda.$$

Nous définissons l'opérateur $U(t)$ par :

$$\left[\widehat{U(t)f}\right](\lambda) = e^{\sqrt{-1}\phi(\lambda)t}\hat{f}(\lambda), \quad t \in \mathbb{R},$$

où f est soit une distribution tempérée soit une fonction C^∞ sur X, et ϕ est la fonction définie sur $\mathfrak{a}^\star$ par :

$$\phi(\lambda) = \left(\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2\right)^{1/2}.$$

En particulier, la solution du problème de Cauchy $(*)$ se présente au sens des distributions tempérées sous la forme :

$$u(x,t)=\frac{U(t)+U(-t)}{2}u_0(x)+\frac{U(t)-U(-t)}{2\sqrt{-1}(-\Delta)^{1/2}}u_1(x),\quad x\in X \text{ et } t\in\mathbb{R}.$$

La preuve détaillée des résultats que nous présentons sera plubliée ultérieurement.

2. Estimées de dispersion

Notons par $L^p(G)_{K\times K}$ l'espace des fonctions K-biinvariantes dans $L^p(G)$ et par $L^1(\mathfrak{a}^\star,|c(\lambda)|^{-2}\,\mathrm{d}\lambda)^W$ l'espace des fonctions dans $L^1(\mathfrak{a}^\star,|c(\lambda)|^{-2}\,\mathrm{d}\lambda)$ qui sont W-invariantes.

Lemme. *Soit f une fonction dans l'espace $L^1(G)_{K\times K}$ telle que sa transformée sphérique $\hat f\in L^1(\mathfrak{a}^\star,|c(\lambda)|^{-2}\,\mathrm{d}\lambda)^W$. On suppose de plus que $\hat f$ est à support compact dans $\mathfrak{a}^\star$. Soit $\alpha=\dim(\mathfrak{a})\geqslant 1$. Alors $U(t)f\in L^\infty(X)$ et pour tout réel $\varepsilon>1$, il existe deux constantes $c=c(\varepsilon)>0$ et $T=T(\varepsilon)>1$ telles que :*

$$\|U(t)f\|_{L^\infty(X)}\leqslant c|t|^{-\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{L^1(X)}$$

pour tout réel t tel que $|t|\geqslant T$.

Pour la preuve de ce résultat, nous procédons comme suit :

- à l'aide de la formule d'inversion, nous montrons que $U(t)f$ est le produit de convolution de $U(t)h$ avec f, où h est une fonction K-biinvariante sur G telle que sa transformée sphérique $\hat h$ soit dans la classe de Schwartz sur $\mathfrak{a}^\star$, vaut 1 sur le support de $\hat f$, et pour tout voisinage compact V de 0 dans $\mathfrak{a}^\star$, il existe une semi-norme $\mathcal{N}$ sur $C_0^\infty(V)$ tel que $\sup_{g\in G}\mathcal{N}(\hat h(\lambda)\varphi_\lambda(g))<\infty$,
- nous appliquons le théorème de la phase stationnaire avec paramètres [9] qui donne un développement asymptotique de $U(t)h$ lorsque $t\to\infty$ pour obtenir que : $\|U(t)h\|_{L^\infty(X)}\leqslant c|t|^{-\frac{\alpha}{2}}$,
- la conlusion repose alors sur les propriétés de la fonction sphérique [1].

Une conséquence immédiate du lemme est l'inégalité suivante :

$$\|U(t)f\|_{B_p^{s,q}(X)}\leqslant c.|t|^{-\frac{\alpha}{2}(1/p'-1/p)}\|f\|_{B_{p'}^{s+m,q}(X)}\tag{C}$$

avec $2N>\max(|s|,|s+m|)$, $s\in\mathbb{R}$, $m\geqslant 1$, $1\leqslant p'\leqslant 2\leqslant p\leqslant+\infty$ et $|t|>T$.

En combinant le lemme et l'inégalité (C), nous obtenons les propriétés de dispersion suivantes pour les solutions du problème de Cauchy $(*)$:

Théorème 1. *Soient N un entier naturel et m un réel supérieur ou égal à 1 tel que $N>m/2$. Soient $\alpha=\dim(\mathfrak{a})\geqslant 1$ et u une solution de l'équation des ondes sur X. Soient p et p' deux réels conjugués tel que $1\leqslant p'\leqslant 2\leqslant p\leqslant+\infty$. Alors pour tout réel $\varepsilon>1$, il existe deux constantes $c=c(\varepsilon)>0$ et $T=T(\varepsilon)>1$ telles que si u_0 et $(-\Delta)^{-1/2}u_1$ appartiennent à l'espace de Besov $B_{p'}^{m,1}(X)$, on a :*

$$\|u(t,.)\|_{L^p(X)}\leqslant c.|t|^{-\frac{\alpha}{2}(1/p'-1/p)}\big(\|u_0\|_{B_{p'}^{m,1}(X)}+\|(-\Delta)^{-1/2}u_1\|_{B_{p'}^{m,1}(X)}\big),$$

pour tout réel t tel que $|t|\geqslant T$.

3. Estimées de Strichartz

Théorème 2. *Soient N un entier naturel et un réel m supérieur ou égal à 1 tel que $N>m/4$. Soient $\alpha=\dim(\mathfrak{a})>2$ et I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Soit u une solution de l'équation des ondes sur X et, soient p et r deux réels tels que $\frac{2}{r}=\alpha(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$ et $2<p<\frac{2\alpha}{\alpha-2}$. Alors pour tout réel $\varepsilon>1$, il existe $c=c(r,\varepsilon)$ une constante positive, tel que si u_0 et u_1 sont dans $L^2(X)$, on a :*

$$\|u\|_{L^r(I,B_p^{-\frac{m}{2},2}(X))}\leqslant c\left(\|u_0\|_{L^2(X)}+\frac{1}{|W|^{1/2}\|\rho\|}\|u_1\|_{L^2(X)}\right).$$

La démonstration repose principalement sur l'utilisation de l'inégalité (C) et d'un argument standard de dualité [4].

Remerciements

Nous adressons nos vifs remerciements à N. Lohoué et S. Mehdi pour avoir suggéré le problème et pour leurs nombreux conseils.

Références

[1] J.-Ph. Anker, The spherical Fourier transform of rapidly decreasing functions. A simple proof of a characterization due to Harish-Chandra, Helgason, Trombi and Varadarajin, J. Funct. Anal. 96 (2) (1991) 331–349.
[2] H. Bahouri, P. Gerard, C.-J. Xu, Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg, J. Anal. Math. 82 (2000) 93–118.
[3] M. Beals, Time decay of L^p norms for solutions of wave equation on exterior domains, in: F. Colombini, N. Lerner (Eds.), Geometrical Optics and Related Topics, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 32, pp. 59–77.
[4] G. Ginibre, G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, J. Funct. Anal. 133 (1995) 50–86.
[5] N. Lohoué, L^p estimates of solutions of wave equations on Riemannian manifolds, Lie groups and applications, in: Harmonic Analysis and Number Theory, Montreal, PQ, 1996, in: CMS Conf. Proc., vol. 21, AMS, Providence, RI, 1997, pp. 103–126.
[6] V. Pierfelice, Weighted Strichartz estimates for the Schrödinger and wave equations on Damek–Ricci spaces, Math. Z. 260 (2) (2008) 377–392.
[7] L. Skrzypczak, Besov spaces on symmetric manifolds. The atomic decomposition, Studia Math. 124 (3) (1997) 215–238.
[8] D. Tataru, Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for the semilinear wave equation, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2) (2001) 795–807.
[9] V.S. Varadarajan, The method of stationary phase and applications to geometry and analysis on Lie groups, in: Algebraic and Analytic Methods in Representation Theory (Sonderborg, 1994), in: Perspect. Math., vol. 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997, pp. 167–242.