Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 743–746
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse complexe/Physique mathématique

Entre analyse complexe et superanalyse

Pierre Bonneau, Anne Cumenge

Équipe Emile-Picard, Institut de mathématiques, Université Paul-Sabatier, 31062 Toulouse cedex 9, France

Reçu le 16 janvier 2009 ; accepté le 17 avril 2009

Disponible sur Internet le 9 mai 2009

Présenté par Jean-Pierre Ramis

Résumé

Dans le cadre de la superanalyse, nous obtenons une théorie des fonctions voisine de l'analyse complexe dès lors que nous imposons aux superalgèbres réelles considérées une condition (A) qui généralise en dimension supérieure à deux la relation $1 + i^2 = 0$ de $\mathbb{C}$. La condition (A) permet l'obtention d'une formule de représentation intégrale pour les fonctions superdifférentiables. Nous donnons entre autres un théorème de super-différentiabilité séparée et un théorème de prolongement de type Hartogs–Bochner pour les fonctions superdifférentiables. ***Pour citer cet article : P. Bonneau, A. Cumenge, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Midway between complex analysis and superanalysis. In the framework of superanalysis we get a functions theory close to complex analysis, under a suitable condition (A) on the real superalgebras in consideration (this condition is a generalization of the classical relation $1 + i^2 = 0$ in $\mathbb{C}$). Under the condition (A), we get an integral representation formula for the superdifferentiable functions. We give a result of Hartogs type of separated superdifferentiability and a continuation theorem of Hartogs–Bochner type for the superdifferentiable functions. ***To cite this article: P. Bonneau, A. Cumenge, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction et notations

Conformément à [2], nous noterons Λ une superalgèbre commutative (en abrégé CSA), c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$, somme directe de deux sous-espaces vectoriels Λ_0 et Λ_1, et muni d'une structure d'algèbre associative unitaire telle que Λ_0 est une sous-algèbre de Λ, le produit de deux éléments de Λ_1 est dans Λ_0, le produit d'un élément de Λ_0 par un élément de Λ_1 est dans Λ_1, un élément de Λ_0 commute avec tout élément de Λ alors que deux éléments de Λ_1 anti-commutent. Nous définissons le Λ_1-annihilateur comme étant ${}^{\perp}\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda\colon\ \lambda\Lambda_1 = 0\}$. Toutes les CSA considérées ici seront de dimensions finies. Nous noterons $(e_0, e_1, \ldots, e_p)$ une base de Λ_0 (e_0 est l'élément unité de Λ), $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q) = (e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_{p+q})$ une base de Λ_1, et définissons les coefficients de structure (d'algèbre) Γ de Λ par $e_i e_j = \sum_{k=0}^{p+q} \Gamma_{i,j}^k e_k$ pour $i, j = 0, 1, \ldots, p+q$.

On appelle superespace sur la CSA Λ tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ où $n, m \in \mathbb{N}$.

Adresses e-mail : pierre.bonneau@math.univ-toulouse.fr (P. Bonneau), anne.cumenge@math.univ-toulouse.fr (A. Cumenge).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.04.019

Définition 1.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$; une application F de U dans Λ est superdifférentiable à droite (S-différentiable en abrégé) en $x \in U$ s'il existe des éléments $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ de Λ, $j = 1, \ldots, n+m$ tels que, pour tout $h \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ tel que $x + h \in U$, on ait $F(x+h) = F(x) + \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) h_j + o(h)$ avec $\lim_{\|h\| \mapsto 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$ où $\|.\|$ est une norme sur l'espace $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$.

Nous soulignons que $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)$ sont définis de façon unique tandis que $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}}(x)$ le sont seulement modulo ${}^\perp\Lambda_1$.

La condition de S-différentiabilité de F traduit que F est Fréchet différentiable avec une différentielle définie par des opérateurs de multiplication par des éléments de Λ.

Les deux hypothèses suivantes (A_0) et (A_1) interviendront de manière naturelle dans la recherche d'un noyau reproduisant pour les fonctions S-différentiables :

(A_0) il existe une base $(e_0 = 1, e_1, \ldots, e_p)$ de Λ_0 vérifiant $\sum_{k=0}^p e_k^2 = 0$;

(A_1) il existe une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ de Λ_1 et une suite finie $s_1 = 1 < s_2 < \cdots < s_r < s_{r+1} = q+1$ telles que, pour tout $j = 1, \ldots, q$, il existe $a_j \in \Lambda_0$ vérifiant $\varepsilon_j = a_j \varepsilon_{s_k}$ si $s_k \leqslant j < s_{k+1}$, avec $a_{s_1} = \cdots = a_{s_r} = e_0$ et $\sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j^2 = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, r$.

On écrit un élément x de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$: $x = (y, \theta) = (y_1, \ldots, y_n, \theta_1, \ldots, \theta_m)$, où $y_i = \sum_{j=0}^p y_i^j e_j$ et $\theta_k = \sum_{l=1}^q \theta_k^l \varepsilon_l$.

Définition 1.2. L'opérateur de Cauchy–Riemann d'' sur $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ est défini par :

$$d'' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \mathrm{d}y_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y_i^j} - e_j \frac{\partial}{\partial y_i^0} \right) + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{i=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \mathrm{d}\theta_l^i \left(\frac{\partial}{\partial \theta_l^i} - a_i \frac{\partial}{\partial \theta_l^{s_k}} \right).$$

Dans le cas le plus simple, lorsque $m = 0$ et $n = 1$, nous avons cherché à définir sur Λ_0 un opérateur d'' de type Cauchy–Riemann dont le noyau coïncide, dans sa partie constituée de 0-formes, avec les fonctions S-différentiables. Contrairement à ce qui se passe en analyse complexe, nous n'avons pas, faute de conjugaison, de moyen canonique de choisir d'' ; la définition que nous avons retenue ne correspond pas au choix effectué dans $\mathbb{C}$ pour $\bar\partial$, mais nous avons bien $\ker d'' = \ker \bar\partial$ dans ce cas.

Remarque. Si F est S-différentiable sur U ouvert alors $d''F = 0$ sur U avec équivalence si $U \subset \Lambda_0^n$.

Définition 1.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$; une application F de U dans Λ est quasiment S-différentiable (ou qS-différentiable) sur U si elle est Fréchet-différentiable sur U et vérifie $d''F = 0$.

Exemples. (1) Si $m = 0$ et $\Lambda_0 = \mathbb{C}$, la superanalyse est l'analyse complexe ; f est S-différentiable si et seulement f est $\mathbb{C}$-analytique, donc très régulière.

(2) Si $m = 0$ et $n = 1$ avec $\Lambda_0 = \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$ où $e_0 = 1$ et $e_1^2 = e_0$, la superanalyse est l'analyse hyperbolique ; dans ce cas, il se peut qu'une fonction S-différentiable ne soit pas plus régulière que C^1 au sens de Fréchet.

(3) Soit A une algèbre de Clifford réelle de dimension 2^k dont les générateurs $e_1, \ldots, e_k$ vérifient $e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$; A peut s'écrire comme une superalgèbre $A = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ avec $\Lambda_0 = \mathrm{Vect}\{e_I; |I| \text{ pair}\}$, $\Lambda_1 = \mathrm{Vect}\{e_I; |I| \text{ impair}\}$, où $e_\emptyset = 1$, et si $I = (i_1, \ldots, i_\nu)$, $e_I = e_{i_1} \ldots e_{i_\nu}$.

La condition (A_0) est vérifiée dans l'exemple 1 et, lorsque $k \equiv 2$ modulo 4, dans l'exemple 3. Elle ne l'est pas dans le second (ce serait d'ailleurs en contradiction avec la Proposition 3.1 du paragraphe suivant).

Dans toute la suite, nous supposerons satisfaites les deux hypothèses (A_0) *et* (A_1).

2. Représentation intégrale de formes et fonctions

Théorème 2.1. *L'opérateur de Cauchy–Riemann* d'' *dans* $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ *admet une solution fondamentale* Ω *donnée par* :

$$\Omega = \frac{c(n,m,p,q)}{\|x\|^{n(p+1)+qm}}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{(p+1)(i-1)+j}\big(y_i^j e_0 + y_i^0 e_j\big)\,\mathrm{d}y_1^0\cdots\widehat{\mathrm{d}y_i^j}\cdots\mathrm{d}y_n^p\,\mathrm{d}\theta_1^1\cdots\mathrm{d}\theta_m^q$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=s_k+1}^{s_{k+1}-1}(-1)^{n(p+1)+i-1}\big(\theta_l^i e_0 + \theta_l^{s_k} a_i\big)\,\mathrm{d}y_1^0\cdots\mathrm{d}y_n^p\,\mathrm{d}\theta_1^1\cdots\widehat{\mathrm{d}\theta_l^i}\cdots\mathrm{d}\theta_m^q\Bigg] \tag{1}$$

où $c(n,m,p,q) = -((n(p+1)+qm)\,\mathrm{Vol}(B(0,1)))^{-1}$.

Schéma de preuve. Dans le cas où $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0$, nous n'avons pas de conjugaison comme dans $\mathbb{C}$, et pas non plus l'intégrité de $\Lambda_0 \neq \mathbb{C}$; nous cherchons alors une solution fondamentale de l'opérateur d'' de la forme $\Omega(x) = \frac{A(x)}{\|x\|^{p+1}}$ où $A(x)$ est une p-forme à coefficients polynômes homogènes de degré 1. Nous sommes alors conduits, de façon naturelle, à imposer la condition (A_0) à Λ_0 afin d'obtenir une solution fondamentale explicite de l'opérateur d''. Le cas Λ_0^m est seulement plus technique.

Si $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_1$, n'ayant pas, dans Λ_1, d'élément unité (ni de conjugaison comme dans le cas des quaternions) nous sommes amenés, pour définir un opérateur de Cauchy–Riemann contenant, dans son noyau, les fonctions S-différentiables, à particulariser certains éléments et sommes conduits à la condition (A_1). Un calcul direct fournit alors une solution fondamentale dans Λ_1, puis dans Λ_1^m, et enfin dans $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$.

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ borné à frontière lisse et Ψ: $\overline{D}\times\overline{D}\to\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ définie par $\Psi(x',x) = x'-x$. Définissons $K(x',x) = \Psi^*\Omega$. Le noyau K vérifie, si l'on pose $d'' = d''_{x'} + d''_x$: $d''K(x',x) = d''\Psi^*\Omega = \Psi^* d''\Omega = \Psi^*[0] = [\Delta]$ où $[\Delta]$ désigne le courant d'intégration sur la diagonale.

Nous obtenons alors classiquement (cf. [1] par exemple) :

Corollaire 2.2. *Si f est une forme* (*ou une fonction*) *continue sur* $\overline{D}$ *et de classe* C^1 *dans D, alors pour tout* $x\in D$, *nous avons* :

$$f(x) = \int_{\partial D} f(x')K(x',x) - \int_D d''f(x')K(x',x) + d''_x\int_D f(x')K(x',x). \tag{2}$$

Dans la formule (2) le dernier terme est nul si f est une fonction, les deux derniers le sont si f est une fonction qS-différentiable.

Il découle de la représentation intégrale obtenue pour les fonctions S-différentiables des propriétés voisines de celles des fonctions holomorphes, propriétés que nous précisons dans les deux derniers paragraphes.

3. Propriétés d'analyticité des fonctions S-différentiables

Proposition 3.1. *Si* $f : D\subset\Lambda_0^n\times\Lambda_1^m\to\Lambda$ *est qS-différentiable sur D, alors elle est harmonique sur D, donc* $\mathbb{R}$*-analytique sur D.*

Notations. Si $1\leqslant j\leqslant m$ et $\theta_j = \sum_1^q \theta_j^i\varepsilon_i : Z(\theta_j) := \sum_{i=1}^q a_i\theta_j^i$ et $\pi_k(\theta_j) := \sum_{i=s_k}^{s_{k+1}-1}\theta_j^i\varepsilon_i$, $\forall k = 1,\dots,r$.

Une fonction qS-différentiable f est analytique réelle en les variables $(y_1^0,\dots,y_1^p,\dots,y_n^0,\dots,y_n^p,\theta_1^1,\dots,\theta_1^q,$ $\dots,\theta_m^1,\dots,\theta_m^q)$, mais possède en fait une propriété d'analyticité bien plus forte :

Proposition 3.2. *Soit* $f : D\subset\Lambda_0^n\times\Lambda_1^m\to\Lambda$ *une fonction qS-différentiable sur D. Pour tout* $(b,\beta) = (b_1,\dots,b_n,\beta_1,$ $\dots,\beta_m)\in D$, *il existe* $R>0$ *et des scalaires* $A_{I,J}\in\Lambda$ *où I et* $J = (J_1,\dots,J_r)$ *sont des multi-indices dans* $\mathbb{N}^n$ *et* $\mathbb{N}^{mr}$ *respectivement, tels que pour* $\|y_j - b_j\| < R$, $j = 1,\dots,n$; $\|\theta_j-\beta_j\| < R$, $j = 1,\dots,m$

$$f(y,\theta) = \sum_{I,J_1,\dots,J_r} A_{I,J}(y-b)^I\big(Z_1(\theta-\beta)\big)^{J_1}\cdots\big(Z_r(\theta-\beta)\big)^{J_r}$$

avec absolue convergence de la série.

Nous avons noté $(y-b)^I = (y_1-b_1)^{i_1}\cdots(y_n-b_n)^{i_n}$ si $I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n$, $Z_k(\theta-\beta)=(Z(\pi_k(\theta_1-\beta_1)),\ldots,Z(\pi_k(\theta_m-\beta_m)))$ et $Z_k(\theta-\beta)^{J_k}=Z(\pi_k(\theta_1-\beta_1))^{j_1^k}\ldots Z(\pi_k(\theta_m-\beta_m))^{j_m^k}$ si $J_k=(j_1^k,\ldots,j_m^k)\in\mathbb{N}^m$.

4. Deux théorèmes de type Hartogs

Une fonction f séparément holomorphe par rapport à chaque variable z_j de $\mathbb{C}^n$, $j=1,\ldots,n$, sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ est holomorphe sur Ω sans autre hypothèse de régularité globale sur f mais ce théorème de Hartogs n'est plus valable pour les fonctions $\mathbb{R}$-analytiques.

Lorsque les coefficients Γ_{ij}^k vérifient une condition $(\mathcal{P})$ de positivité, nous obtenons un résultat de type Hartogs de S-différentiabilité séparée.

Définition 4.1. Une CSA Λ_0 vérifie la condition de positivité $(\mathcal{P})$ si, pour tous $X, Y\in\mathbb{R}^{p+q+1}$, on a $(\sum_0^{p+q}(X_j)^2)\times\sum_{\substack{j=0,\ldots,p+q\\ k=0,\ldots,p}}(\sum_{m=0}^{p+q}Y_m\Gamma_{mk}^j)^2-2\sum_{k=0}^p(\sum_j X_j\sum_m Y_m\Gamma_{mk}^j)^2\geqslant 0$.

Théorème 4.2. *On suppose que la CSA Λ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ et toujours la condition* (A_0). *Alors une fonction f définie sur un domaine D de Λ_0^n à valeurs dans Λ séparément S-différentiable en les variables $y_1,\ldots,y_n$ est de classe C^1 au sens de Fréchet sur D et par suite est S-différentiable en tout point $y=(y_1,\ldots,y_n)$ de D.*

Remarque. Nous utilisons la sous-harmonicité de $\log\|f\|$, qui découle de la condition $(\mathcal{P})$, pour en déduire la continuité de la fonction f. Or cette propriété de continuité ne dépend pas de la norme choisie, ni de la métrique retenue pour définir le laplacien. Nous pouvons ainsi remplacer la condition $(\mathcal{P})$ par la condition suffisante $(\mathbb{P})$ suivante : il existe une base (e'_k) de Λ_0 vérifiant $\sum_{k=0}^p(e'_k)^2=0$, et une base (e''_α) de Λ telles que, pour tout $X=\sum_{\alpha=0}^{p+q}X_\alpha e_\alpha$ et Y de Λ, $\|X\|^2\sum_{k,\alpha}(\langle e'_kY, e''_\alpha\rangle)^2-2\sum_k(\sum_\alpha\langle e'_kY, e''_\alpha\rangle X_\alpha)^2\geqslant 0$.

Théorème 4.3. *Sous les conditions* (A_0) *et* (A_1), *si $\partial\Omega$ est le bord connexe d'un domaine Ω borné de $\Lambda_0^n\times\Lambda_1^m$ (avec $n+m>1$) et f une fonction qS-différentiable au voisinage de $\partial\Omega$, alors f se prolonge en une fonction qS-différentiable sur Ω.*

Références

[1] R. Harvey, J. Polking, Fundamental solutions in complex analysis, Parts 1 and 2, Duke Math. J. 46 (1978) 253–340.
[2] A. Khrennikov, Superanalysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.