Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 419–423
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Statistique

Produits tensoriels de processus ARMA fonctionnels

Denis Bosq

L.S.T.A., Université Pierre-et-Marie-Curie, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 24 octobre 2008 ; accepté après révision le 24 janvier 2009

Disponible sur Internet le 28 février 2009

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

On étudie la structure des produits tensoriels de processus stationnaires à valeurs dans un espace de Hilbert H. L'une des motivations est l'estimation de l'autocovariance d'un tel processus à l'aide de l'autocovariance empirique. Pour simplifier on se limite aux processus autorégressifs (*ARH*) et moyennes mobiles (*MAH*) d'ordre un, standards, et dont l'innovation est une différence de martingale. Les processus obtenus sont alors du type $ARMA\mathcal{S}$, éventuellement non-standard, où $\mathcal{S}$ est l'espace des opérateurs de Hilbert–Schmidt sur H. On s'intéresse aussi au cas réel, on donne des exemples et on fournit des critères assurant que le processus obtenu est standard. ***Pour citer cet article : D. Bosq, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Tensorial products of functional *ARMA* processes. We study the structure of tensorial products of H-valued stationary processes, where H is a Hilbert space. One of the motivations is autocovariance estimation by using the empirical autocovariance. For convenience we focus on autoregressive (*ARH*) and moving average (*MAH*) standard processes with innovations that are martingale increments. The obtained model is $ARMA\mathcal{S}$ processes (possibly non-standard), where $\mathcal{S}$ denotes the space of Hilbert–Schmidt operators on H. We also deal with the real case, we give some examples and we provide criteria for standardness of the tensorial products. ***To cite this article: D. Bosq, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Let H be a separable real Hilbert space and let $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ be a stationary sequence of H-valued random variables. In this Note we exhibit the structure of processes of the form $(X_{n-k} \otimes X_n, n \in \mathbb{Z})$ $(k \geqslant 0)$. The study of these processes is useful for estimation of the autocovariance of X by using the empirical autocovariance. For convenience we focus on the two following models:

$$X_n = \rho(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (ARH(1))$$

and

$$X_n = \varepsilon_n + \ell(\varepsilon_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (MAH(1))$$

Adresse e-mail : denis.bosq@upmc.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.01.031

where ρ and ℓ are continuous linear operators on H, and (ε_n) is the innovation of X and a martingale difference.

If X is $ARH(1)$ it is shown that $Y^{(k)} = (X_{n-k} \otimes X_n - \mathbb{E}(X_{n-k} \otimes X_n),\ n \in \mathbb{Z})$ is an $ARMA\mathcal{S}(1,k)$ process, where $\mathcal{S}$ is the space of Hilbert–Schmidt operators on H. If X is $MAH(1)$ it turns to be a $MA\mathcal{S}(1)$. In the two situations the obtained model is possibly non-standard (cf. [3]). In some particular cases it is proved that $Y^{(k)}$ is standard. If, for example, X is a gaussian $MAH(1)$ such that ℓ and C_{ε_0} (the autocovariance operator of ε_0) have the same eigenvectors, then $Y^{(0)}$ is standard.

The results apply to the autoregressive representation of the Ornstein–Uhlenbeck process and to the moving average representation of the truncated Ornstein–Uhlenbeck process.

Finally it is possible to derive more precise results in the real case.

1. Notations

H désigne un espace de Hilbert réel séparable, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H, H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, $\mathcal{S}$ l'espace des opérateurs de Hilbert–Schmidt sur H ; ces espaces sont munis de leurs normes usuelles. Les opérateurs de covariance croisée de deux variables aléatoires U et V à valeurs dans H sont notés $C_{U,V}$ et $C_{V,U}$ et on pose $C_U = C_{U,U}$.

On considère une suite stationnaire $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ de variables aléatoires à valeurs dans H, centrées, et on s'intéresse aux processus à valeurs dans $\mathcal{S}$, définis par

$$Y^{(k)} = \big(X_{n-k} \otimes X_n - \mathbb{E}(X_{n-k} \otimes X_n), n \in \mathbb{Z}\big), \quad k \geqslant 0.$$

L'étude de ces processus est utile pour estimer l'autocovariance $(C_{X_0,X_k}, k \geqslant 0)$ de X. En effet, si $C_n^{(k)}$ désigne l'autocovariance empirique associée aux observations $X_0, \dots, X_n$, on a

$$C_n^{(k)} - C_{X_0,X_k} = \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^{n} Y_i^{(k)}, \quad 0 \leqslant k < n.$$

D'autres applications sont des extensions de [6].

Pour simplifier l'exposé on se limite aux cas suivants :

$$ARH(1) \quad X_n = \rho(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

et

$$MAH(1) \quad X_n = \varepsilon_n + \ell(\varepsilon_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

où $\rho \in \mathcal{L}$ et il existe $j_0 \geqslant 1$ tel que $\|\rho^{j_0}\|_{\mathcal{L}} < 1$; ℓ vérifie une condition similaire (cf. [1] et [4]).

En ce qui concerne $\varepsilon = (\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ on définit les tribus $\mathcal{B}_n = \sigma(\varepsilon_i, i \leqslant n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et on fait les hypothèses suivantes :

$$A - \mathbb{E}\|\varepsilon_n\|^4 < \infty, \quad \mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n-1}}\big(\varepsilon_n^{\otimes 3}\big) = 0, \quad C_{\varepsilon_n,\varepsilon_m} = \delta_{n,m} C_{\varepsilon_0},$$
$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n-1}}\big(\varepsilon_n^{\otimes 2}\big) = C_{\varepsilon_0} \neq 0, \quad \mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\varepsilon_n) = 0\,; \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

ε est donc un bruit blanc et une différence de martingale. Un bruit blanc fort tel que $\mathbb{E}\|\varepsilon_n\|^4 < \infty$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_n^{\otimes 3}) = 0$ vérifie A. Il en est de même pour $\varepsilon_n = UV_n$, $n \in \mathbb{Z}$ où $P(U = u_0) = P(U = -u_0) = 1/2$, $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et les (V_n) sont i.i.d. et tels que $\mathbb{E}\|V_n\|^4 < \infty$, $\mathbb{E}(V_n^{\otimes 3}) = 0$, $\mathbb{E}V_n = 0$ et $(V_n) \perp\!\!\!\perp U$ (cet exemple nous a été communiqué par J. Dedecker).

Dans la suite on distingue un processus *standard* d'un processus *non-standard*. En gros, un processus vérifiant (1) (respectivement (2)) est non-standard si ρ (respectivement ℓ) n'est pas continue. Les définitions précises figurent dans [2] et [3].

2. Produits tensoriels de processus *ARH*(1)

Proposition 2.1. *Si X est un $ARH(1)$, $Y^{(0)}$ est un processus $AR\mathcal{S}(1)$ standard :*

$$Y_n^{(0)} = R\big(Y_{n-1}^{(0)}\big) + E_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

où R est définie par

$$R(s) = \rho s \rho^*, \quad s \in \mathcal{S}, \tag{3}$$

ρ^* désignant l'adjoint de ρ, et

$$E_n = (X_{n-1} \otimes \varepsilon_n)\rho^* + \rho(\varepsilon_n \otimes X_{n-1}) + \varepsilon_n \otimes \varepsilon_n - C_{\varepsilon_0},$$

de plus

$$\|R^j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{S},\mathcal{S})} \leqslant \|\rho^j\|^2_{\mathcal{L}(H,H)}, \quad j \geqslant 1.$$

Enfin (E_n) est une différence de martingale par rapport à $(\mathcal{B}_n)$ et c'est l'innovation de $Y^{(0)}$.

La Proposition 2.1 est une extension du Lemme 4.1 p. 96 de [1]. Le résultat s'applique au processus d'Ornstein–Uhlenbeck (cf. [1] p. 76) avec

$$E_n(s,t) = \varepsilon_n(s)\varepsilon_n(t) - \frac{\sigma^2}{2\theta}\big(\mathrm{e}^{-\theta|t-s|} - \mathrm{e}^{-\theta(t+s)}\big) + X_{n-1}(1)\mathrm{e}^{-\theta s}\varepsilon_n(t) + X_{n-1}(1)\mathrm{e}^{-\theta t}\varepsilon_n(s), \quad 0 \leqslant s,\ t \leqslant 1.$$

Proposition 2.2. *Pour $k \geqslant 1$, $Y^{(k)}$ est un $ARMA\mathcal{S}(1,k)$ dont la partie autorégressive est standard :*

$$Y_n^{(k)} - R\big(Y_{n-1}^{(k)}\big) = E_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\big(E_{n-j}^{(k)}\big), \quad n \in \mathbb{Z}$$

où R est donné par (3), $(E_n^{(k)})$ est l'innovation de $(Y_n^{(k)})$ et $\sum_{j=1}^k \lambda_j(E_{n-j}^{(k)})$ est la projection orthogonale dans $L_H^2(P)$ de $Y_n^{(k)} - R(Y_{n-1}^{(k)})$ sur la fermeture de $\{\sum_{j=1}^k \ell_j(E_{n-j}^{(k)}),\ \ell_j \in \mathcal{L},\ 1 \leqslant j \leqslant k\}$.

Notons que les λ_j sont mesurables mais qu'ils n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{L}$.

3. Produits tensoriels de processus *MAH*(1)

Proposition 3.1. *Si X est une $MAH(1)$, $Y^{(k)}$ est une $MA\mathcal{S}(1)$, éventuellement non-standard, pour tout $k \geqslant 0$.*

La proposition suivante montre la stabilité de la structure moyenne mobile :

Proposition 3.2. *Si X est une $MAH(1)$ dont l'innovation ε est un H-bruit blanc fort et si $T : H \mapsto H'$, où H' est un espace de Hilbert réel séparable, est mesurable et telle que $\mathbb{E}\|T(X_n)\|^2_{H'} < \infty$ et $\mathbb{E}T(X_n) = 0$; alors $(T(X_n),\ n \in \mathbb{Z})$ est une $MAH'(1)$ éventuellement non-standard.*

4. Processus *MA𝒮* standards

Nous étudions maintenant des cas particuliers où les moyennes mobiles obtenues précédemment sont standards. D'abord, si H est de dimension finie, les processus obtenus sont évidemment standards. Un autre cas spécial est celui où ℓ est nilpotent :

Proposition 4.1. *S'il existe $p \geqslant 2$ tel que $\ell^p = 0$ et si X est une $MAH(1)$ associée à ℓ, alors $T_n = \ell^{p-2}(X_n) \otimes \ell^{p-2}(X_n) - \mathbb{E}(\ell^{p-2}(X_n) \otimes \ell^{p-2}(X_n))$, $n \in \mathbb{Z}$ est une $MA\mathcal{S}(p-1)$ standard (éventuellement dégénérée) :*

$$T_n = E_n + S(E_{n-1}) + \cdots + S^{p-1}(E_{n-p+1})$$

où $S(s) = \ell s \ell^*,\ s \in \mathcal{S}$. Donc, si $\ell^2 = 0$, $Y_n^{(0)}$ est une $MA\mathcal{S}(1)$ standard.

Voici enfin un cas plus général :

Proposition 4.2. *Si X est un $MAH(1)$ et ε est un bruit blanc gaussien et si*

$$\ell = \sum_{j \geqslant 1} \ell_j e_j \otimes e_j \quad \text{avec } 1 > |\ell_1| > |\ell_2| > \cdots,$$

où (e_j) *est la base orthonormale des vecteurs propres de* C_{ε_0}*, alors* $Y^{(0)}$ *est standard :*

$$Y_n^{(0)} = E_n + L(E_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

où (E_n) *est l'innovation de* $Y^{(0)}$ *et* L *est un opérateur borné défini par*

$$L = \sum_{i,j} L_{i,j}(e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j)$$

avec

$$\frac{L_{i,j}}{1 + L_{i,j}^2} = \frac{\ell_i \ell_j}{(1 + \ell_i^2)(1 + \ell_j^2)}; \quad i \geqslant 1, \ j \geqslant 1.$$

5. Le cas réel

Le cas réel gaussien a été étudié dans [7]. On peut préciser certains résultats dans un cadre général. On pose ici $\rho = corr(X_{n-1}, X_n)$, $R = corr(Y_{n-1}^{(0)}, Y_n^{(0)})$, $\delta_{(4)} = (\mathbb{E}\varepsilon_0^4 - 3\sigma^4)/2\sigma^4$ où $\sigma^2 = \mathbb{E}\varepsilon_0^2$ et $\alpha(\ell) = (1 + \ell^4)/(1 + \ell^2)^2$.

Proposition 5.1. *Si* X *est une* $MA(1)$ *réelle,* $Y^{(0)}$ *est une* $MA(1)$ *:*

$$Y_n^{(0)} = X_n^2 - \mathbb{E}X_n^2 = E_n + LE_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où $|L| < 1$ *et* (E_n) *est l'innovation de* $Y^{(0)}$ *:*

$$E_n = \sum_{j=0}^{\infty} (-L)^j Y_{n-j}^{(0)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

L *vérifie la relation* $L = R(1 + L^2)$*. D'autre part*

$$R = \rho^2 \frac{1 + \delta_{(4)}}{1 + \alpha(\ell)\delta_{(4)}},$$

d'où $0 \leqslant R \leqslant \ell^2/(1 + \ell^4)$*. En particulier, si* $\delta_{(4)} = 0$*, il vient* $R = \rho^2$*.*

6. Remarques

Il est facile d'obtenir des résultats sur la structure de $(X_{n,1} \otimes X_{n,2})$ quand $(X_{n,1})$ et $(X_{n,2})$ sont indépendants. En particulier si $(X_{n,1})$ et $(X_{n,2})$ sont des $ARH(1)$, leur produit tensoriel est un $AR\mathcal{S}(1)$. On a un résultat analogue pour les $MAH(1)$.

Par ailleurs les preuves s'appuient notamment sur les lemmes suivants :

Lemme 6.1. *Si* U *et* V *sont des variables aléatoires réelles de carré intégrable et si* Y *et* Z *sont des vecteurs aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, les conditions* $(U, Y) \perp\!\!\!\perp (V, Z)$*,* $\mathbb{E}(U|Y) = 0$ *(ou* $\mathbb{E}(V|Z) = 0$*) impliquent* $\mathbb{E}(UV|Y, Z) = 0$*.*

Lemme 6.2. *Soit* X *un* H*-processus stationnaire, régulier, d'autocovariance* $(\Gamma_h, h \geqslant 0)$*. Alors* X *est une* $MAH(q)$ *(éventuellement non-standard) si et seulement si* $\Gamma_q \neq 0$ *et* $\Gamma_h = 0$*,* $h > q$*.*

Ce lemme est une extension de la Proposition 3.2.1 pp. 89–90 de [5]. Pour sa preuve voir [4].

Références

[1] D. Bosq, Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications, Lecture Notes in Statistics, vol. 149, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] D. Bosq, Processus linéaires vectoriels et prédiction, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2) (2003) 115–118.

[3] D. Bosq, General linear processes in Hilbert spaces and prediction, J. Statist. Plann. Inference 137 (3) (2007) 879–894.

[4] D. Bosq, D. Blanke, Inference and Prediction in Large Dimensions, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2007.

[5] P.J. Brockwell, R.A. Davis, Time Series: Theory and Methods, second ed., Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1991.
[6] I.-B. Choi, M. Taniguchi, Prediction problems for square-transformed stationary processes, Stat. Inference Stoch. Process. 6 (1) (2003) 43–64.
[7] C.W.J. Granger, P. Newbold, Forecasting transformed series, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 38 (2) (1976) 189–203.