Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1267–1270
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Modèle de milieu poreux déformable : Existence de solution faible

Soulèye Kane

Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel, 11, rue Emile-Argand, CH-2000 Neuchâtel, Suisse

Reçu le 7 juin 2007 ; accepté après révision le 13 octobre 2008

Disponible sur Internet le 6 novembre 2008

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

On démontre l'existence de solution faible pour un modèle de milieu poreux déformable. Ce modèle est décrit par l'équation $\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta\Gamma(w) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(w) = 0$ sur un domaine Ω borné régulier, avec une condition initiale et de Dirichlet homogène. Les fonctions Γ et λ sont nulles à l'origine de classe C^1 et croissantes. La preuve utilise un résultat de compacité de Dubinskii que nous avons généralisé. ***Pour citer cet article : S. Kane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Swelling porous media model: Existence of a weak solution. The existence of solution for a swelling porous media model is presented. This model is described by the equation $\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta\Gamma(w) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(w) = 0$ on a bounded regular domain Ω, with a initial and homogeneous Dirichlet condition. The functions Γ and λ vanish at the origin and are increasing and C^1. ***To cite this article: S. Kane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Modèle

Soit Ω un domaine borné et assez régulier contenant les trois phases, solide, liquide et gazeuse d'une substance. On note ϕ une phase de Ω et s la phase solide ; ρ^ϕ la masse volumique apparente de la phase ϕ. En utilisant l'expression de la dérivée particulaire pour la phase ϕ et la phase s, on a

$$\frac{D\rho^\phi}{D^s t} - \frac{\rho^\phi}{\rho_d}\frac{D\rho_d}{D^s t} + \mathrm{Grad}\big[\rho^\phi(v^\phi - v^s)\big] : F^{-1} = f_\phi$$

où Grad désigne l'opérateur gradient par rapport à un état de référence qui est fixe, v^ϕ la vitesse par rapport à la phase ϕ, F le tenseur de déformation, ρ_d la densité apparente sèche du sol, voir [7,8]. Donc

$$\rho_d \frac{D(\rho^\phi/\rho_d)}{D^s t} + \mathrm{Grad}\big[\rho^\phi(v^\phi - v^s)\big] : F^{-1} = f_\phi. \tag{1}$$

Adresse e-mail : souleye.kane@unine.ch.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.10.007

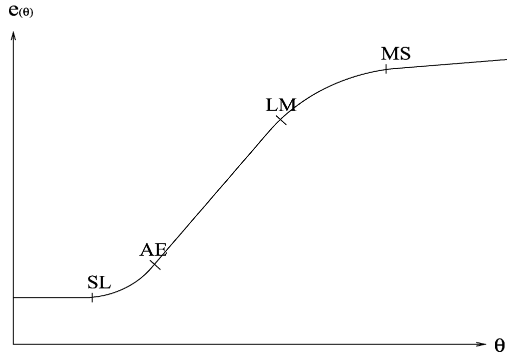

Fig. 1. Courbe de retrait de vertisol et points caractéristiques du modèle de Braudeau (1988).

En posant $v_{\phi/s}$ la vitesse relative de la phase ϕ par rapport à la phase solide, l'équation ci-dessus devient

$$\rho_d \frac{D(\rho^\phi/\rho_d)}{D^s t} + \operatorname{Grad}\bigl[\rho^\phi v_{\phi/s}\bigr] : F^{-1} = f_\phi. \tag{2}$$

Dans notre modèle physique, on a $\rho^\phi = \rho\theta$, ϕ est la phase fluide et $\theta v_{\phi/s} = q_s$ est la vitesse de filtration du fluide par rapport à la phase solide. On a par la loi de Darcy généralisée

$$q = -K(\theta)\operatorname{grad} H(\theta),$$
$$q_s = F^{-1}q = -F^{-1}K(\theta)\bigl(\operatorname{Grad} H(\theta)\bigr)\cdot F^{-1}.$$

Notons $e = \rho_s/\rho_d - 1$, $K_s = F^{-1}K$, $\Theta = \theta\rho_s/\rho_d$. Comme $\rho = 1$ pour l'eau, l'équation d'écoulement pour un milieu poreux déformable devient

$$\frac{1}{1+e}\frac{D\Theta}{D^s t} - \operatorname{Grad}\bigl[K_s(\Theta)\bigl(\operatorname{Grad}\bigl(H(\Theta)\bigr)\bigr)\cdot F^{-1}\bigr] : F^{-1} = f_1 \tag{3}$$

avec $H = h - z + h_p$. La quantité $h(s) = -\frac{1}{\alpha}(s^{-1/m} - 1)^{1/n}$ est le potentiel matriciel donné par Van Genuchten [9] ; α, m, n étant des paramètres. La valeur z désigne le potentiel gravitationnel, h_p le potentiel de surcharge donné en coordonnée matérielle, $K_s(\Theta)$ la conductivité hydraulique relative à la phase solide donnée par Van Genuchten, $e = e(\Theta)$ obtenue avec le modèle de retrait de vertisol de E. Braudeau [1] (voir Fig. 1). Considérons une déformation du type $F = g(\Theta)^{-1}I$, $K_s(\Theta) = k(\Theta)I$ avec $g(\Theta) = (\frac{1+e(\Theta)}{1+e_r})^{-1/3}$, $k(s) = k_s s^L(1 - (1 - s^{L/m})^m)^2$; L étant un paramètre (voir dans [4]). En supposant qu'il n'y a pas de terme source et en posant

$$w = l(\Theta) = \int_0^\Theta \frac{1}{(1+e(s))g(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad \gamma(\Theta) = \int_0^\Theta k(s)g(s)h'(s)\,\mathrm{d}s,$$
$$\Theta = l^{-1}(w), \qquad \Gamma(w) = \gamma\bigl(l^{-1}(w)\bigr), \qquad \lambda(w) = k\bigl(l^{-1}(w)\bigr)g\bigl(l^{-1}(w)\bigr)$$

l'équation (3) donne

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta\Gamma(w) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(w) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \tag{4}$$
$$w(x,t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \tag{5}$$
$$w(x,0) = w_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \tag{6}$$

2. Formulation faible

Pour $p > 2$, on suppose qu'il existe $q \in]0, p-1]$ tel que

$$\Gamma(s) \leqslant s^q, \qquad \lambda(s) \leqslant s^q. \tag{7}$$

Soient N la dimension spatiale et $r = (\frac{p-2}{2})\frac{N}{p} + 2$. Pour $v \in H_0^r(\Omega)$, en multipliant (4) par v et en intégrant sur Ω, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\Gamma(w)\nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \lambda(w)\frac{\partial v}{\partial z}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

Nous obtenons ainsi la formulation faible : Trouver w dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega))$ solution de (8) pour tout $v \in H_0^r(\Omega)$.

3. Résultats

Soit $\beta(t) = \int_0^t \sqrt{\Gamma'(s)}\,\mathrm{d}s$, $M(v)^p = \int_\Omega (\nabla\beta(v))^2\,\mathrm{d}x$, Le théorème suivant est démontré dans [5] :

Théorème 3.1. *Soit $w_0 \in L^2(\Omega)$, alors il existe une fonction w et un réel $p > 2$ tels que*

(i) $w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega))$;
(ii) $\beta(w) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$;
(iii) $\frac{\partial w}{\partial t} \in L^{p'}(0,T;H^{-r}(\Omega))$

et w solution de (8).

Pour la preuve, on utilise un résultat de compacité de Dubinskii [6,2,3] sous des hypothèses plus faibles :

Théorème 3.2. *Soient B, B_1 des espaces de Banach avec $B \subset B_1$ avec injection continue et soit S un sous ensemble de B. Soit $M : S \to \mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $\tilde{S} = \{v \in S; M(v) \leqslant 1\}$ *est relativement compact dans B* ;
(ii) *il existe U voisinage de* 0 *et* ∞ *tel que* $M(\lambda v) \leqslant |\lambda| M(v)$ $\forall \lambda \in U$.

Pour $1 < p_0, p_1 < \infty$, on définit l'ensemble

$$E = \left\{ v;\ v \textit{ localement sommable sur }]0,T[;\ \textit{à valeur dans } B_1; \int_0^T M(v)\,\mathrm{d}t \leqslant C_1 \textit{ et } v' \textit{ est dans un borné de } L^{p_1}(0,T;B_1) \right\}.$$

Alors $E \subset L^{p_0}(0,T;B)$ et est relativement compact dans $L^{p_0}(0,T;B)$.

L' hypothèse (i) du Théorème 3.2 est vérifiée pour notre problème grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.3. *On pose $S = \{v;\ \beta(v) \in H_0^1(\Omega)\}$. Si*

$$M(v)^p = \int_\Omega \big(\nabla\beta(v)\big)^2\,\mathrm{d}x,$$

alors pour $B = L^p(\Omega)$, $\tilde{S} = \{v; M(v) \leqslant 1\}$ est relativement compact dans B.

Pour la vérification de l'hypothèse (ii) du Théorème 3.2, c'est-à-dire si $M(\lambda v) \leqslant |\lambda| M(v)$ pour tout λ dans un voisinage de zéro ou de ∞, on utilise la proposition suivante démontrer dans [5] p. 9 :

Proposition 3.4. *Pour tout $s \in [0,1]$, on a*

$$s^{2L/m+1} \leqslant \big(1 - (1 - s^{L/m})^m\big)^2 (s^{-1/m} - 1)^{-m}.$$

Remarque. Une condition suffisante pour que l'hypothèse (ii) du Théorème 3.2 soit réalisée est $p = 2 + \frac{2L}{m} + L - \frac{1}{m}$. Ce résultat est prouvé dans [5].

Idée de la preuve du Théorème 3.1. La méthode utilisée est celle de Faedo–Galerkin. On considère l'espace V_m engendré par des fonctions propres w_j, $j = 1, \dots, m$, de $-\Delta$ dans $H_0^r(\Omega)$ avec $r = (\frac{p-2}{2})\frac{n}{p} + 2$. On utilise le théorème de Carathéodory pour montrer que le problème (8) admet une solution u_m dans V_m. On montre ensuite que la suite (u_m) de solution sera dans l'espace E où $p_0 = p$, $p_1 = p'$, $B_1 = H_0^{-r}$, $B = L^p(\Omega)$. Le Théorème 3.2 permet de conclure sur la convergence de la suite (u_m) vers la solution u du problème faible (8) voir [5] pp. 42–47. □

Remerciements

Je remercie Olivier Besson pour les discussions fructueuses que nous avons eues et ses conseils pour la rédaction de cet article.

Références

[1] E. Braudeau, Équation généralisée des courbes de retrait d'échantillon de sols structurés, C. R. Acad. Sci., Ser. 2. 307 (1988) 1731–1734.
[2] J.A. Dubinskii, Certaines inégalités intégrales et résolution de systèmes d'équations elliptiques quasi linéaires dégénérées, Mat. Sbornik 64 (106) (1964) 458–480.
[3] J.A. Dubinskii, Convergence faible dans les équations elliptiques paraboliques non linéaires, Mat. Sbornik 67 (109) (1965) 609–642.
[4] P. Garnier, Détermination des caractéristiques hydrodynamiques des sols déformables par la méthode inverse, Thèse, ORSTOM, 1996.
[5] S. Kane, Analyse mathématique et simulation numérique d'écoulement fluide en surface libre et milieu poreux déformable, Thèse, 2005, site: http://doc.rero.ch/search.py?recid=4959&ln=fr.
[6] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des probèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[7] P.A.C. Raats, A. Klute, Transport in soils; The balance of mass, Soil Sci. Soc. Amer. J. 32 (1968).
[8] P.A.C. Raats, A. Klute, Transport in soils; The balance of momentum, Contribution from the corn belt branch, soil and water conservation research division, ARS, USDA, Madison, WI Soil Sci. Soc. Amer. J. (1968).
[9] M.T. Van Genuchten, J.B. Sisson, Estimation of hydraulic conductivity without computing fluxes, in: Proc. Int. Workshop, Indirect Methods for Estimating the Hydraulic Properties of Unsatured Soil., University of California, Riverside, 1992, pp. 665–674.