Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1219–1224
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Problème de Lehmer et variétés abéliennes CM

María Carrizosa

UMR 7586, Théorie des nombres, Université Pierre-et-Marie-Curie, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 29 août 2008 ; accepté après révision le 10 octobre 2008

Disponible sur Internet le 1er novembre 2008

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous donnons une borne inférieure pour la hauteur canonique d'un point P dans une variété abélienne A/K avec des multiplications complexes en fonction du degré de P sur $K(A_{\mathrm{tors}})$. Cette borne généralise des résultats antérieurs de David, Hindry, Baker, Silverman, Ratazzi et autres et c'est le meilleur résultat connu jusqu'à présent dans la direction de la conjecture de Lehmer relative abélienne. La borne donnée permet aussi de démontrer des cas particuliers de la conjecture de Zilber–Pink. ***Pour citer cet article : M. Carrizosa, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Lehmer problem and CM Abelian varieties. We provide a lower bound of the canonical height of a point P in a CM Abelian variety A/K in terms of the degree of the field generated by P over $K(A_{\mathrm{tors}})$. This bound is a generalization of results by David, Hindry, Baker, Silverman, Ratazzi and others and is the best known result on the way of proving the relative Abelian Lehmer conjecture. Moreover, the given bound allows us to prove some particular cases of the Zilber–Pink conjecture. ***To cite this article: M. Carrizosa, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

The canonical height $h_{\mathcal{L}}$ associated to a symmetric very ample line bundle $\mathcal{L}$ on an Abelian variety A over a number field K has many interesting properties. Among them, we know that $h_{\mathcal{L}}$ defines a positive definite quadratic form on $A(\bar{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. We can naturally ask ourselves if there is a lower bound for the height of point of infinite order depending only on the degree of the field generated by this point over K. The Abelian version of the classical Lehmer conjecture states that there is a real number $c > 0$ such that for every $P \in A(\bar{K})$ that does not belong to any translate by a torsion point of a proper Abelian subvariety of A (i.e. a torsion variety) we have $\hat{h}(P) \geqslant cD^{-1/g}$ where g is the dimension of A and $D = [K(P) : K]$. In the "relative" case, we expect to obtain a similar bound replacing D by the degree of P over $K(A_{\mathrm{tors}})$. The following conjecture is the best possible in this direction:

Adresse e-mail : carrizosa@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.10.004

Conjecture 0.1 *(David). Let A/K an Abelian variety of dimension g over a number field K and $\mathcal{L}$ an ample symmetric line bundle over A. Then, there is a real number $c > 0$ such that for every $P \in A(\bar{K})$ of infinite order over* $\mathrm{End}_{\bar{K}}(A)$ *we have $\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geqslant cD^{-1/g}$ where $D = [K_{\mathrm{tors}}(P) : K_{\mathrm{tors}}]$ and $K_{\mathrm{tors}} = K(A_{\mathrm{tors}})$.*

The relative Lehmer problem was first stated by F. Amoroso and U. Zannier (see [2]) for a point α in the multiplicative torus that is not a root of unity and they found an optimal bound up to epsilon of the form $h(\alpha) \geqslant \frac{c}{D}\left(\frac{\log\log 5D}{\log 2D}\right)^{13}$, where $D = [K^{\mathrm{ab}}(\alpha) : K^{\mathrm{ab}}]$.

The analogous result in the context of elliptic curves was given by Ratazzi (see [6]).

In the higher dimension case there are better invariants to consider than the degree. This was already the case in the classical Lehmer problem for Abelian varieties where S. David and M. Hindry replaced the degree by an "obstruction index".

We would like then to give a relative bound optimal up to epsilon for a point P in an Abelian variety A/K that is not a torsion point using an obstruction index and taking into account the smallest torsion subvariety containing P. To do this we define for a field F/K, a subvariety H/K of A and a point $P \in H(\bar{K})$ the obstruction index over F with respect to H by

$$\omega_F(P, H) = \min\left(\frac{\deg V}{\deg H}\right)^{1/\operatorname{codim}_H V}$$

where V runs over all proper subvarieties of H defined over F containing P. With this definition we can state the main result:

Theorem 0.2. *Let A/K a CM Abelian variety, $\mathcal{L}$ a fourth power of an ample symmetric line bundle over A, H/K an Abelian subvariety of A and $P \in H(\bar{K})$ of infinite order over* $\mathrm{End}_{\bar{K}}(H)$. *Then, there is a real number $c(A, K, \mathcal{L}) > 0$ such that*

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geqslant \frac{c(A, K, \mathcal{L})}{\omega_{K_{\mathrm{tors}}}(P, H)}\left(\frac{\log\log \omega_{K_{\mathrm{tors}}}(P, H)(\deg H)^2}{\log \omega_{K_{\mathrm{tors}}}(P, H)(\deg H)^2}\right)^{\kappa(g_0)}$$

where $g_0 = \dim H$ and $\kappa(g_0) = 2^{2g_0+1} g_0^{2g_0}(g_0+1)!^{2g_0}$.

Moreover, in this last statement and its proof, we can replace the field K_{tors} by K^{ab} without any changes. This gives in the CM case a stronger result because up to extending K, we have the inclusion $K_{\mathrm{tors}} \subset K^{\mathrm{ab}}$.

On the other hand, for the moment it seems difficult to avoid the CM hypothesis. We use it in two different steps of the proof, above all to assure that the Frobenius can be lifted in zero characteristic to an endomorphism. This is always the case in the multiplicative setting but false in general in the Abelian case. We recall the following definition:

Definition 0.3. If A has good reduction on $v \in M_K$, we say that $\alpha \in \mathrm{End}(A)$ is a Frobenius endomorphism on v if $\iota_v(\alpha) = \mathrm{Frob}_v$ where $\iota_v : \mathrm{End}(A) \to \mathrm{End}(\tilde{A}_v)$ and $\tilde{A}_v$ is the reduction of A mod v.

If A has complex multiplication, using Theorem 1, III.13 of [9], we can suppose that A has a Frobenius endomorphism in almost every place.

1. Transcendance

La preuve du Théorème 0.2 est constituée de deux parties. La première suit les étapes d'une preuve de transcendance classique : construction d'une fonction auxiliaire, extrapolation et lemme de zéros. On reprend l'idée de [2] : les auteurs considèrent une extension finie $\mathbb{L} \subseteq K_{\mathrm{tors}}$ et un ensemble $\mathcal{P}$ de premiers totalement décomposés dans K. Ils distinguent ensuite deux cas selon qu'il y a ou non beaucoup de premiers « très » ramifiés dans $\mathbb{L}$. Dans notre cas on dispose d'une suite d'extensions $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{L}_{g_0}$ et de points $P = P_0, \ldots, P_{g_0}$. On différencie les deux cas à l'aide des paramètres suivants : on notera dorénavant $\Delta = \log \omega_{\mathbb{L}}(P, H)(\deg H)^2$ et C_0 une constante assez grande et on pose pour $i, j = 1, \ldots, g_0$

$$N_i^{(j)}=\left[\frac{C_0\Delta}{\log\Delta}\right]^{a_i^{(j)}}\quad\text{et}\quad E_i=\left[\frac{C_0\Delta}{\log\Delta}\right]^{b_i^{(j)}}$$

où $a_i^{(j)}=i.i!\delta\rho_j$, $b_i^{(j)}=i.i!\rho_j$ et $\rho_j=\delta^{2g_0-2j}(g_0+1)$ où $\delta=g_0^2(g_0+1)!+2$. On considère des ensembles d'endomorphismes de Frobenius $\mathcal{P}_i^{(j)}=\{\alpha_p,\ N_i^{(j)}/2\leqslant p\leqslant N_i^{(j)}\}$ avec $p\in\mathcal{P}$ où l'on a choisi une fois pour toutes pour chaque premier $p\in\mathcal{P}$ une seule place v de K au-dessus de p et un endomorphisme de Frobenius (s'il existe).

On dira qu'au cran j on est dans le cas peu ramifié si pour tout $i=1,\dots,g_0$, plus de la moitié des endomorphismes de Frobenius de $\mathcal{P}_i^{(j)}$ correspondent à des premiers p tels que l'indice de ramification e_p de p dans $\mathbb{L}_j$ satisfait $e_p\leqslant E_i^{(j)}$. Sinon, on dira qu'on est dans le cas très ramifié et on fixera le plus petit indice $r(j)$ tel que $\mathcal{P}_{r(j)}^{(j)}$ a beaucoup de grande ramification.

1.1. Cas peu ramifié

Dans ce cas on suit l'approche de [2] et [5] : pour j donné, construction d'une fonction auxiliaire nulle au point P_{j-1} et tous ses conjugués sur $\mathbb{L}_j$ à un ordre élevé à l'aide d'un lemme de Siegel absolu, extrapolation en des transformés par des endomorphismes de Frobenius et lemme de Zéros. La propriété métrique clé pour l'extrapolation est la suivante (voir [2] lemme 3.1) : pour tout $p\in\mathcal{P}$ il existe un élément $\phi_p\in\mathrm{Gal}(\mathbb{L}_j/K)$ tel que $|\gamma^p-\phi_p\gamma|_w\leqslant p^{-1/e_p}$ pour tout $\gamma\in\mathcal{O}_{\mathbb{L}_j}$ et $w|v$. On définit maintenant les paramètres :

$$L^{(j)}=\left[(\deg H)^2\omega_{\mathbb{L}_{j-1}}(P_{j-1},H)\frac{C_0^{b^{(j)}+2}\Delta^{b^{(j)}+g_0}}{(\log\Delta)^{b^{(j)}}}\right]\quad\text{et}\quad T^{(j)}=\left[(\deg H)^4\omega_{\mathbb{L}_{j-1}}(P_{j-1},H)\frac{C_0^2}{\log(C_0)^{2g_0+1}}\right]$$

où $b^{(j)}=((g_0+1)!-1)\rho_j$. La partie « transcendance » du cas peu ramifié est résumée dans la proposition qui suit :

Proposition 1.1. *Soit Q un point de $H(\bar K)$ tel que $\hat h(Q)<\frac{1}{\omega_{\mathbb{L}_{j-1}}(Q,H)}\big(\frac{\log\Delta}{C_0\Delta}\big)^{2(b^{(j)}+g_0+1)+[(g_0+1)!-1]\rho_j\delta}$, d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne propre de H. Il existe un entier k, $1\leqslant k\leqslant g_0$, un point $Q_1=\tau_{k+1}\alpha_{k+1}\circ\cdots\circ\tau_{g_0}\alpha_{g_0}(Q)$ où $\alpha_i\in\mathcal{P}_i^{(j)}$ et τ_i prolonge ϕ_p (α_i est un endomorphisme au-dessus de p) et une sous-variété V propre de H définie sur $\mathbb{L}_{j-1}$ contenant le point Q_1 de dimension d et dont le degré satisfait $\deg V\leqslant c_1\frac{((L^{(j)})^2N_1^{(j)}\cdots N_{k+1}^{(j)})^{g_0-d}\deg(H)\log N_k^{(j)}}{(T^{(j)})^{g_0-d}N_k^{(j)}}$. De plus, V est définie incomplètement par des formes de degré $\leqslant c_2(L^{(j)})^2N_1^{(j)}\cdots N_{k+1}^{(j)}$ le long de $T_{H(\mathbb{C})}$ avec multiplicité au moins $\frac{T^{(j)}}{g_0+1}$.*

1.2. Cas très ramifié

Dans ce cas, on suit l'approche de [1] en utilisant des déterminants d'interpolation et la propriété métrique de [2] (lemme 3.2). L'idée est la suivante : soit p très ramifié dans $\mathbb{L}_{j-1}$ et m minimal tel que $\mathbb{L}_{j-1}\subseteq\mathbb{Q}_p(\zeta_m)$. Alors il existe un sous-groupe G_p de $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}_{j-1}/K)$ tel que $|G_p|\geqslant\min(e_p,p)$ et pour tout $\gamma\in\mathcal{O}_{\mathbb{L}_{j-1}}$, $w|p$ et $\sigma\in G_p$ on a $|\gamma^p-\sigma\gamma^p|_w\leqslant p^{-1}$. On définit les paramètres

$$L_1^{(j)}=\left[(\deg H)^2\omega_{\mathbb{L}_{j-1}}(P_{j-1},H)C_0^2\left(\frac{C_0\Delta}{\log\Delta}\right)^{a_{r(j)}^{(j)}}\right]\quad\text{et}$$

$$T_1^{(j)}=\left[\frac{(\deg H)^4\omega_{\mathbb{L}_{j-1}}(P_{j-1},H)C_0^{a_{r(j)}^{(j)}+2}\Delta^{a_{r(j)}^{(j)}-1}}{(\log\Delta)^{a_{r(j)}^{(j)}}}\right].$$

Soit $\alpha_p\in\mathcal{P}_{r(j)}^{(j)}$ avec p très ramifié. La proposition suivante résume le résultat principal dans le cas très ramifié :

Proposition 1.2. *Soit Q un point de $H(\bar K)$ tel que $\hat h(Q)<\frac{1}{\omega_{\mathbb{L}_{j-1}}(Q,H)}\big(\frac{\log\Delta}{C_0\Delta}\big)^{g_0.g_0!\delta\rho_j+2}$, d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne propre de H. Alors il existe une variété V de dimension d définie sur $\mathbb{L}_j=\mathbb{L}_{j-1}\cap\mathbb{Q}_p(\zeta_{m/p})$*

passant par Q, définie incomplètement par des formes de degré $\leqslant c_3(L_1^{(j)})^2$ *avec multiplicité* $\geqslant T_1^{(j)}$ *telle que* $\deg(\alpha_p(V)) \leqslant c_4(\frac{(L_1^{(j)})^2}{T_1^{(j)} N_{r(j)}^{(j)}})^{g_0-d} \deg(H)$.

1.3. Descente

Contrairement aux cas de dimension 1, on ne peut pas conclure directement et il faut faire une étape de descente après les lemmes de zéros. Celle-ci s'inspire de la descente dans [5] mais en tenant compte des deux cas peu ou très ramifiés. On construit une suite de variétés vérifiant de bonnes conditions d'inclusion et de degré contrôlé par les indices d'obstruction à l'aide d'une utilisation répétée des Propositions 1.1 et 1.2. Pour faire ceci, on fixe les paramètres : $B_i = \big(\frac{C_0\Delta}{\log\Delta}\big)^{\delta\rho_i[(g_0+1)!-1]}$ et des ensembles d'isogénies $\mathfrak{B}_i$ tels que $\beta_i \in \mathfrak{B}_i$ est une composition d'endomorphismes de Frobenius et donc une isogénie admissible (au sens de la définition de [5] paragraphe 2.2 et prop. 2.3) de poids $\leqslant B_i$. On définit ensuite un ensemble $\mathcal{W}$ de triplets $(k, \beta, \mathbf{W})$ où $k \in [0, g_0]$ est un entier, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \mathfrak{B}_1 \times \cdots \times \mathfrak{B}_k$, et $\mathbf{W} = (W_1, \ldots, W_k)$ est un k-uplet de sous-variétés propres de H telles que chaque W_i contient le point $P_i = \beta_i \circ \cdots \circ \beta_1(P)$, $W_{i-1} \subseteq \beta_i^{-1}(W_i)$ pour tout i et $N(\beta_i)$ est premier à $|G_{W_i} : G_{W_i}^{\circ}|$ (la partie discrète du stabilisateur de W_i) pour tout i. De plus, W_i est définie sur un sous-corps $\mathbb{L}_i$ de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}_i$-irréductible et ces sous-corps forment une suite $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{L}_k$. Pour tout $i = 0, \ldots, g_0$, le degré de W_i satisfait

$$\deg(W_i) \leqslant c_5 \omega_{\mathbb{L}_{i-1}}(P_{i-1}, H)^{g_0-d_i} \deg(H)\left(\frac{C_0\Delta}{\log\Delta}\right)^{[g_0(g_0+1)!\delta\rho_{i+1}!+2(g_0+1)!\rho_i\mu(i)](g_0-d_i)}$$

où $d_i = \dim W_i$ et $\mu(i) = 1$ ou 0 selon que l'on est dans le cas peu ou très ramifié respectivement. Le résultat clé de la descente est le suivant :

Proposition 1.3. *Soient P et* $\mathbb{L}$ *tels que* $\hat{h}(P) < \frac{1}{\omega_{\mathbb{L}}(P,H)}\big(\frac{\log\Delta}{C_0\Delta}\big)^{\kappa(g_0)/2}$ *alors il existe* $(k, \beta, \mathbf{W}) \in \mathcal{W}$ *tel que* $\dim W_i = \dim W_{i+1}$ *pour certain i entre* 0 *et* $k-1$.

Maintenant on choisit le plus petit indice i vérifiant la Proposition 1.3 et on compare les degrés des variétés W_i et W_{i+1}. Ceci permet de conclure en général puisque la comparaison entraîne une contradiction en utilisant les indices d'obstruction. Il reste toutefois un cas où l'on ne peut pas conclure directement. On résume alors toutes les informations obtenues dans la proposition suivante :

Proposition 1.4. *Sous les hypothèses du Théorème* 0.2*, il existe une constante* $c > 0$ *telle que l'une des deux assertions suivantes est vraie* :

(i) $\hat{h}(P) \geqslant \frac{c}{\omega_{\mathbb{L}}(P,H)}\big(\frac{\log\Delta}{\Delta}\big)^{\kappa(g_0)/2}$;

(ii) *il existe un point P et une extension* $\mathbb{L} \subseteq K_{\mathrm{tors}}$ *contredisant l'inégalité ci-dessus, une sous-variété abélienne B/K de H des éléments* $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$ *pour* $i = 0, \ldots, g_0$ *et une suite de sous-corps* $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{L}_{g_0}$ *tels que pour un indice i on ait les conditions suivantes* : $\mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i \cap \mathbb{Q}_p(\zeta_{m/p})$ *pour un certain* $p \in \mathcal{P}$, β_{i+1} *est un endomorphisme de Frobenius au-dessus de p,* $\tau\beta_{i+1}(P_i) - \beta_{i+1}(P_i) \in B$ *pour un* $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/\mathbb{L}_{i+1})$ *tel que* $\tau_{|\mathbb{L}_i} \neq \mathrm{Id}$ *et*

$$\deg\left(\bigcup_{\substack{\xi\in\ker(\beta_{i+1})\\ \tau\in\mathrm{Gal}(\bar{K}/\mathbb{L}_{i+1})}} \tau(P_i+\xi)+B\right) \leqslant B_{i+1}^{g_0-d_i}\omega_{\mathbb{L}_i}(P_i, H)^{g_0-d_i}\deg(H)\left(\frac{C_0\Delta}{\log\Delta}\right)^{[g_0(g_0+1)!\delta\rho_{i+2}](g_0-d_i)}$$

où $d_i = \dim B$ *et* $i \leqslant d_i$.

2. Démonstration du théorème principal

La démonstration du théorème principal repose sur la Proposition 1.4 et une version plus faible du Théorème 0.2 où on remplace l'indice d'obstruction par le degré. Il s'agit du théorème suivant :

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses du Théorème* 0.2*, il existe une constante* $c = c(A, K, \mathcal{L}) > 0$ *telle que pour toute extension finie* $\mathbb{L} \subseteq K_{\mathrm{tors}}$ *de K on a* $\hat{h}(P) \geqslant c\big(\frac{\deg H}{D}\big)^{1/g_0}\big(\frac{\log\log D\deg H}{\log D\deg H}\big)^{\kappa(g_0)/2}$ *où* $D = [\mathbb{L}(P) : \mathbb{L}]$.

On commence par montrer qu'on peut effectuer une série de réductions pour prouver ce théorème. Il s'agit des lemmes suivants :

Lemme 2.2. *Pour démontrer le Théorème* 2.1 *on peut supposer que* $\mathbb{L}$ *et* P *satisfont les propriétés suivantes* :

(i) $K \subseteq \mathbb{L} \subseteq K(P)$;
(ii) $[\mathbb{L}(P):\mathbb{L}] = D$;
(iii) $\forall F \subseteq K_{\mathrm{tors}}$, $\forall T \in H_{\mathrm{tors}}$, $[F(P+T):F] \geqslant D$;
(iv) $\forall T \in H_{\mathrm{tors}}$ *tel que* $K(P+T) \subseteq K(P)$ *on a* $K(P+T) = K(P)$;
(v) $\mathbb{L}$ *est de conducteur minimal parmi tous les sous-corps* F *de* K_{tors} *tels qu'il existe* $T \in H_{\mathrm{tors}}$, $[F(P+T):F] = D$.

Le Lemme 2.2 dans le cas torique correspond aux réductions effectuées au paragraphe 2 de [2].

On a aussi besoin de l'équivalent du lemme 2.1 de [2] et du lemme 3.3 de [6]. Plusieurs complications apparaissent du fait que l'on travaille en dimension quelconque. Pour les surmonter, on utilisera par exemple le fait que $K(H[p])/K$ est de degré premier à p. Le résultat que l'on obtient est le suivant :

Lemme 2.3. *Soit* $p \in \mathcal{P}$, $v|p$ *une place de* K *de bonne réduction ordinaire pour* H *et* α_p *un endomorphisme de Frobenius associé à* v. *Pour démontrer le Théorème* 2.1 *on peut supposer pour toute extension* E *telle que* $K \subseteq E \subseteq \mathbb{L}$ *que l'on a soit* $E(\alpha_p(P)) = E(P)$, *soit* $p | [E(P) : E(\alpha_p(P))]$.

Les deux lemmes donnés combinés au lemme 3.2 de [3] permettent de donner le résultat principal de réduction :

Lemme 2.4. *Soit* $p \in \mathcal{P}$, $v|p$ *une place de* K *de bonne réduction ordinaire pour* H *et* α_p *un endomorphisme de Frobenius associé à* v. *Pour démontrer le Théorème* 2.1 *on peut supposer que, pour tout prolongement* $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *de* $\sigma \in G_p \setminus \{\mathrm{Id}\}$, *on a* $\tau(\alpha_p(P)) \neq \alpha_p(P)$.

La démonstration du Théorème 2.1 se fait par récurrence sur la dimension de H. Lorsque $\dim H = 0$, le Lemme 2.4 montre que le deuxième cas de la Proposition 1.4 ne peut pas se produire et on conclut. Dans le cas général, on montre que si le deuxième cas de 1.4 se présente, ou bien $B \neq 0$ et on utilise l'hypothèse de récurrence, ou bien $B = 0$ et il existe α_p un endomorphisme de Frobenius et un élément $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/\mathbb{L}_1)$ tel que $\tau(\alpha_p(P)) = \alpha_p(P)$ ce qui contredit le Lemme 2.4.

Pour finir, la preuve du Théorème 0.2 est très similaire à celle du Théorème 2.1. Si le deuxième cas de la Proposition 1.4 se présente, en utilisant le Théorème 2.1 on montre que $B = 0$. La Proposition 1.4 nous donne dans ce contexte une borne supérieure du degré D en fonction de l'indice d'obstruction et on conlut en utilisant de nouveau le Théorème 2.1.

3. Application à la conjecture de Zilber–Pink

Les premiers cas de la conjecture de Zilber–Pink ont été suggérés par Bombieri, Masser et Zannier dans [4]. Plus tard, des généralisations ont été données indépendamment par Zilber pour des variétés semi-abéliennes et Pink pour les variétés de Shimura mixtes. Dans le cadre des variétés abéliennes on peut l'énoncer ainsi :

Conjecture 3.1. *Soient* A *une variété abélienne définie sur un corps* K *de caractéristique* 0 *et* X *une sous-variété fermée et intègre qui n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique propre de* A. *Alors l'ensemble* $X(K) \cap \bigcup_{\operatorname{codim} G \geqslant \dim X + 1} G(K)$, *où l'union porte sur tous les sous-groupes algébriques de* A *vérifiant la condition de dimension, n'est pas dense dans* X.

Dans [7] et [8] G. Rémond montre que cette conjecture est vraie sous l'hypothèse plus forte que X est géométriquement non dégénérée et que A vérifie la Conjecture 0.1. Dans sa preuve on voit que même un résultat « à epsilon près » suffit pour conclure. En utilisant le Théorème 0.2 on a le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Soient* A *une variété abélienne CM définie sur un corps de nombres* K, X *une sous-variété fermée et intègre de* A *géométriquement non dégénérée et* Γ *un sous-groupe de rang fini de* $A(K)$. *Alors l'ensemble* $X(K) \cap$

$(\Gamma + \bigcup_{\operatorname{codim} G \geqslant \dim X+1} G(K))$ *n'est pas dense dans* X (*où l'union porte sur tous les sous-groupes algébriques de* A *vérifiant la condition de dimension*).

D'après le corollaire 1.1 de [7] et le Théorème 0.2 on a en particulier le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *Soit* A/K *une variété abélienne CM et* C *une courbe transverse sur* A. *Alors l'ensemble* $C(K) \cap \bigcup_{\operatorname{codim} G \geqslant 2} G(K)$ *est fini, où l'union porte sur tous les sous-groupes algébriques de* A *vérifiant la condition de dimension.*

Références

[1] F. Amoroso, Bogomolov on tori revisited, Prépublication, 2007.
[2] F. Amoroso, U. Zannier, A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions, Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci. 29 (4) (2000) 711–727.
[3] M.H. Baker, Lower bounds for the canonical height on elliptic curves over abelian extensions, Int. Math. Res. Not. 29 (2003) 1571–1589.
[4] E. Bombieri, D. Masser, U. Zannier, Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups, Int. Math. Res. Not. 20 (1999) 1119–1140.
[5] S. David, M. Hindry, Minoration de la hauteur de Néron–Tate sur les variétés abéliennes de type CM, J. Reine Angew. Math. 529 (2000) 1–74.
[6] N. Ratazzi, Théorème de Dobrowolski–Laurent pour les extensions abéliennes sur une courbe elliptique à multiplication complexe, Int. Math. Res. Not. 58 (2004) 3121–3152.
[7] G. Rémond, Intersections de sous-groupes et de sous-variétés I, Math. Ann. 333 (2005) 525–548.
[8] G. Rémond, Intersections de sous-groupes et de sous-variétés II, J. Inst. Math. Jussieu 6 (2007) 317–348.
[9] G. Shimura, Y. Taniyama, Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory, Publ. Math. Soc. Japan (1961).