Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1067–1072

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Contrôle optimal/Équations aux dérivées partielles

Contrôlabilité et observabilité unilatérales de systèmes hyperboliques quasi-linéaires

Tatsien Li [a], Bopeng Rao [b], Zhiqiang Wang [a]

[a] *School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China*

[b] *Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis-Pasteur de Strasbourg, 67084 Strasbourg, France*

Reçu le 24 juillet 2008 ; accepté le 13 août 2008

Disponible sur Internet le 2 octobre 2008

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

La théorie de la contrôlabilité exacte et de l'observabilité exacte unilatérales pour les systèmes hyperboliques quasi-linéaires du premier ordre exige que les variables inconnues vérifient certaines conditions de couplage à l'extrémité non contrôlée ou non-observée. Dans cette Note, par un exemple significatif, nous montrons que la contrôlabilité exacte et l'observabilité exacte unilatérales sont encore réalisables lorsque les variables inconnues sont découplées dans les conditions aux limites, mais convenablement couplées dans le système quasi-linéaire hyperbolique lui-même. ***Pour citer cet article : T. Li et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

One-side exact controllability and observability for quasilinear hyperbolic systems. The known theory on the one-side exact boundary controllability and the one-side exact boundary observability for first-order quasilinear hyperbolic systems requires that the unknown variables should be suitably coupled in the boundary conditions at the non-control or non-observation side. In this Note we illustrate, with an inspiring example, that the one-side exact boundary controllability and the one-side exact boundary observability can still be realized by means of a suitable coupling among the unknown variables in the quasilinear hyperbolic system itself. ***To cite this article: T. Li et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

The theory on the one-side exact boundary controllability and the one-side exact boundary observability for first-order quasilinear hyperbolic systems requires that the unknown variables should be suitably coupled in the boundary conditions at the non-control or non-observation side (see [1,2,5] and [9]). If this condition is not satisfied, the existing theory does not allow to directly obtain the one-side exact boundary controllability or the one-side exact boundary observability even in the linear case.

Adresses e-mail : dqli@fudan.edu.cn (T. Li), rao@math.u-strasbg.fr (B. Rao), wzq@fudan.edu.cn (Z. Wang).

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.09.004

Let us consider the following quasilinear hyperbolic system

$$\begin{cases} r_t + \lambda(r,s) r_x = f(r,s), \\ s_t + \mu(r,s) s_x = g(r,s), \end{cases} \tag{1}$$

where λ, μ, f and g are smooth functions such that

$$\lambda(0,0) < 0 < \mu(0,0), \qquad f(0,0) = g(0,0) = 0, \tag{2}$$

with the initial and final data

$$t = 0: \quad (r,s) = \big(r_0(x), s_0(x)\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{3}$$

$$t = T: \quad (r,s) = \big(r_T(x), s_T(x)\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \tag{4}$$

The boundary conditions are given by

$$x = 0: \quad s = H(t), \tag{5}$$

$$x = L: \quad r = \overline{H}(t), \tag{6}$$

in which the unknown variables r and s are decoupled. However, the one-side local exact boundary controllability as well as the one-side local exact boundary observability can be realized once $T > 0$ is large enough and the variables r and s are suitably coupled in the system (1). More precisely we have the following results:

Theorem 1 *(One-side control at $x = L$). Suppose that $\lambda, f \in C^1$, $\mu, g \in C^2$ and* (2) *holds. Suppose furthermore that*

$$g_r(0,0) \neq 0 \tag{7}$$

and

$$T > L\left(\frac{1}{|\lambda(0,0)|} + \frac{1}{\mu(0,0)}\right). \tag{8}$$

For any given boundary function H, initial data (r_0, s_0) and final data (r_T, s_T), if the norms $\|H\|_{C^2[0,T]}$, $\|(r_0, s_0)\|_{C^1[0,L]\times C^2[0,L]}$ and $\|(r_T, s_T)\|_{C^1[0,L]\times C^2[0,L]}$ are sufficiently small, and the conditions of C^2-compatibility are satisfied at the points $(t,x) = (0,0)$ and $(T,0)$ respectively, then there exists a boundary control $\overline{H}$ at $x = L$ with small $C^1[0,T]$ norm, such that the forward mixed initial-boundary value problem (1), (3) *and* (5)–(6) *admits a unique semi-global $C^1 \times C^2$ solution $(r,s) = (r(t,x), s(t,x))$ on the domain $R(T) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant L\}$ with small $C^1 \times C^2$ norm, which satisfies exactly the final condition* (4).

Theorem 2 *(One-side observation at $x = L$). Under the assumptions of Theorem* 1*, for any given boundary functions $(H, \overline{H})$ and initial data (r_0, s_0), if $\|(H, \overline{H})\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}$ and $\|(r_0, s_0)\|_{C^1[0,L]\times C^2[0,L]}$ are sufficiently small, and the conditions of C^2-compatibility and that of C^1-compatibility are satisfied at the points $(t,x) = (0,0)$ and $(0,L)$ respectively, then the initial data (r_0, s_0) can be uniquely determined by means of the boundary observed value $s = \bar{s}(t)$ at $x = L$ and the given boundary functions $(H, \overline{H})$ on the interval* $[0,T]$*. Moreover, there exist a positive constant C such that the following observability estimate holds*:

$$\big\|(r_0, s_0)\big\|_{C^1[0,L]\times C^2[0,L]} \leqslant C\big(\|\bar{s}\|_{C^2[0,T]} + \big\|(H, \overline{H})\big\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}\big). \tag{9}$$

Remark 1. Suppose that $\lambda, f \in C^2$, $\mu, g \in C^1$. Instead of (7), suppose that

$$f_s(0,0) \neq 0. \tag{10}$$

Then the one-side local exact boundary controllability and the one-side local exact boundary observability can be realized by a suitable control H at $x = 0$ or by observing the value $r = \bar{r}(t)$ at $x = 0$, respectively.

Remark 2. Comparing Theorems 1 and 2, we can easily find that with assumptions (2) and (7)–(8), we can realize not only the one-side exact boundary controllability by one control acting on $x = L$, but also the one-side exact boundary observability by one observation taken at $x = L$. Meanwhile, the requirement on the exact controllability time coincides with that on the exact observability time, which are all sharp, and both the number of control and the number of observed value are equal to 1. This shows that, as in [1,2] and [5,6], there is still an implicit duality between controllability and observability in this exceptional case.

In fact, the condition (7) allows us to transform the second equation of (1) into the form

$$r = R(s, s_x, s_t) \tag{11}$$

in a neighbourhood of $(r, s, s_x) = (0, 0, 0)$, where $R \in C^2$ with $R(0, 0, 0) = 0$. Then substituting (11) into the first equation of (1), we get

$$s_{tt} + (\lambda + \mu)s_{tx} + \lambda\mu s_{xx} = F, \tag{12}$$

where F is a C^1 function with $F(0, 0, 0) = 0$.

In view of the first condition of (2), the discriminant

$$\Delta = (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu = (\mu - \lambda)^2 \tag{13}$$

is positive in a neighbourhood of $(s, s_x, s_t) = (0, 0, 0)$, and then (12) is a second-order quasilinear hyperbolic equation with two characteristics

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda < 0, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mu > 0. \tag{14}$$

Therefore, we can realize the one-side exact controllability and the one-side exact observability for the second-order quasilinear hyperbolic equation (12) by using the constructive method in [3] and [7,8].

1. Introduction et résultats principaux

Considérons le système hyperbolique quasi-linéaire suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u)\frac{\partial u}{\partial x} = F(u), \tag{15}$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ est une fonction vectorielle inconnue des variables (t, x), $A(u)$ est une matrice $n \times n$ dont les coefficients $a_{ij}(u)$ sont des fonctions régulières de la variable u et $F(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))^T$ est une fonction vectorielle régulière de la variable u telle que $F(0) = 0$. Pour simplifier l'exposé, nous supposons que $n = 2m$ et que la matrice $A(u)$ admet m valeurs propres négatives et m valeurs propres positives :

$$\lambda_r(u) < 0 < \lambda_s(u), \quad 1 \leqslant r \leqslant m,\ m + 1 \leqslant r \leqslant n. \tag{16}$$

Supposons de plus que la matrice $A(u)$ admette n vecteurs propres à gauche $l_i(u)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ linéairement indépendants. Avec les variables diagonales $v_i = l_i(u)u$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, les conditions aux limites sont données par

$$x = 0: \quad v_s = G_s(t, v_1, \dots, v_m) + H_s(t) \quad (s = m + 1, \dots, n), \tag{17}$$

$$x = L: \quad v_r = G_r(t, v_{m+1}, \dots, v_n) + H_r(t) \quad (r = 1, \dots, m), \tag{18}$$

où G_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des fonctions régulières telles que $G_i(t, 0, \dots, 0) \equiv 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Les conditons initiales et finales sont données par

$$t = 0: \quad u = \phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{19}$$

$$t = T: \quad u = \Phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \tag{20}$$

Dans [1,2,5] et [10], nous avons établi la contrôlabilité exacte locale et l'observabilité exacte locale du système (15) par des contrôles ou des observations à l'extrémité $x = L$ respectivement. Supposons que, dans un voisinage de $u = 0$, les conditions aux limites (17) à l'extrémité non-contrôlée (ou non-observée) $x = 0$ puissent s'écrire sous la forme équivalente :

$$x = 0: \quad v_r = \overline{G}_r(t, v_{m+1}, \dots, v_n) + \overline{H}_r(t) \quad (r = 1, \dots, m). \tag{21}$$

Alors il existe un temps $T > 0$ assez grand tel qu'on puisse réaliser la contrôlabilité exacte locale du système (15) par l'action de contrôles H_r $(r = 1, \dots, m)$ à l'extrémité $x = L$ d'une part, et d'autre part l'observabilité exacte locale par des observations $v_s = \bar{v}_s(t)$ $(s = m+1, \dots, n)$ à l'extrémité $x = L$.

En effet, la condition (21) garantit l'existence et l'unicité d'une solution C^1 semi-globale du problème rétrograde associé au système (15), qui est une généralisation de la « condition du groupe » dans le cas linéaire [9]. Cette condition indique que, pour réaliser la contrôlabilité exacte locale par l'action de contrôles à l'extrémité $x = L$, ou l'observabilité exacte locale par des observations à l'extrémité $x = L$, les variables diagonales v_r $(r = 1, \dots, m)$ correspondant aux valeurs propres négatives doivent être exprimées par celles v_s $(s = m+1, \dots, n)$ correspondant aux valeurs propres positives.

De la même façon, on peut réaliser la contrôlabilité exacte par l'action de contrôles à l'extrémité $x = 0$ ou l'observabilité exacte locale par des observations à l'extrémité $x = 0$, si dans un voisinage de $u = 0$, les conditions aux limites (18) à l'extrémité $x = L$ peuvent s'écrire sous la forme équivalente :

$$x = L\colon \quad v_s = \overline{G}_s(t, v_1, \dots, v_m) + \overline{H}_s(t) \quad (s = m+1, \dots, n). \tag{22}$$

En revanche, si le couplage frontière ne satisfait ni (21) à l'extrémité $x = 0$ ni (22) à l'extrémité $x = L$, la méthode constructive de [1,2] et [5] ne permet pas d'obtenir directement la contrôlabilité exacte unilatérale ou l'observabilité exacte unilatérale du système (15).

L'objectif de cette Note est d'illustrer, par un exemple significatif, la contrôlabilité exacte unilatérale et l'observabilité exacte unilatérale, lorsque les variables $(u_1, \dots, u_n)$ sont convenablement couplées dans le système hyperbolique (15) lui-même. Pour cela, considérons le système quasi-linéaire hyperbolique suivant

$$\begin{cases} r_t + \lambda(r, s) r_x = f(r, s), \\ s_t + \mu(r, s) s_x = g(r, s), \end{cases} \tag{23}$$

où λ, μ, f et g sont des fonctions régulières vérifiant

$$\lambda(0, 0) < 0 < \mu(0, 0), \qquad f(0, 0) = g(0, 0) = 0. \tag{24}$$

Les conditions aux limites sont données par

$$x = 0\colon \quad s = H(t), \tag{25}$$

$$x = L\colon \quad r = \overline{H}(t) \tag{26}$$

dans lesquelles les variables r et s sont découplées. Néanmoins, pour toutes données initiales et finales :

$$t = 0\colon \quad (r, s) = \big(r_0(x), s_0(x)\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{27}$$

$$t = T\colon \quad (r, s) = \big(r_T(x), s_T(x)\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{28}$$

nous pouvons réaliser la contrôlabilité exacte locale et l'observabilité exacte locale du système (23) par un contrôle unilatéral ou une observation unilatérale, pourvu que $T > 0$ soit suffisamment grand et que la fonction $f(r, s)$ vérifie

$$f_s(0, 0) \neq 0 \tag{29}$$

ou la fonction $g(r, s)$ vérifie

$$g_r(0, 0) \neq 0. \tag{30}$$

Théorème 1. *Soient* $\lambda, f \in C^1, \mu, g \in C^2$ *des fonctions données. Supposons que les conditions* (24) *et* (30) *soient satisfaites, et soit* T *tel que*

$$T > L\left(\frac{1}{|\lambda(0, 0)|} + \frac{1}{\mu(0, 0)}\right). \tag{31}$$

Pour toute donnée initiale (r_0, s_0)*, toute donnée finale* (r_T, s_T) *et toute fonction* H*, si les normes*

$$\big\|(r_0, s_0)\big\|_{C^1[0,L] \times C^2[0,L]}, \quad \big\|(r_T, s_T)\big\|_{C^1[0,L] \times C^2[0,L]} \quad et \quad \|H\|_{C^2[0,T]}$$

sont suffisamment petites, et les conditions de C^2*-compatibilité sont satisfaites aux points* $(t, x) = (0, 0)$ *et* $(T, 0)$ *respectivement, alors il existe un contrôle frontière* $\overline{H}$ *avec une norme* $C^1[0, T]$ *petite, appliqué à l'extrémité*

$x = 0$, tel que le problème progressif (23) et (25)–(27) admette une unique solution $C^1 \times C^2$ semi-globale $(r, s) = (r(t, x), s(t, x))$ dans le domaine $R(T) = \{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant L\}$ avec une norme $C^1 \times C^2$ petite, qui satisfait exactement la condition finale (28). De plus, l'estimation (31) sur la durée T de la contrôlabilité exacte unilatérale est optimale.

Théorème 2. *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 1, pour toute donnée initiale (r_0, s_0) et toutes fonctions H et $\overline{H}$, si $\|(r_0, s_0)\|_{C^1[0,L]\times C^2[0,L]}$ et $\|(H, \overline{H})\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}$ sont suffisamment petites, et les conditions de C^2- et C^1-compatibilité sont satisfaites aux points $(t, x) = (0, 0)$ et $(0, L)$ respectivement, alors la donnée initiale (r_0, s_0) peut être déterminée uniquement par la valeur observée de $s = \bar{s}(t)$ à l'extrémité $x = L$ et les fonctions H, $\overline{H}$ dans l'intervalle $[0, T]$. De plus, il existe une constante positive C telle que*

$$\big\|(r_0, s_0)\big\|_{C^1[0,L]\times C^2[0,L]} \leqslant C\big(\|\bar{s}\|_{C^2[0,T]} + \big\|(H, \overline{H})\big\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}\big). \tag{32}$$

Remarque 1. Supposons que $\lambda, f \in C^2, \mu, g \in C^1$, et que l'on remplace (30) par (29). Alors on peut réaliser la contrôlabilité exacte unilatérale par l'action d'un contrôle H à l'extrémité $x = 0$, ou l'observabilité exacte unilatérale par l'observation $r = \bar{r}(t)$ à l'extrémité $x = 0$.

Remarque 2. En comparant les Théorème 1 et Théorème 2, on trouve facilement que sous les hypothèses (24) et (30)–(31), nous pouvons réaliser non seulement la contrôlabilité exacte unilatérale par l'action d'un contrôle $\overline{H}$ à l'extrémité $x = L$, mais aussi l'observabilité exacte unilatérale par l'observation $s = \bar{s}(t)$ à l'extrémité $x = L$. De plus, le temps de la contrôlabilité exacte coincide avec celui de l'observabilité exacte, et le nombre du contrôle et celui de l'observation sont le même. Ceci montre, comme dans [1,2] and [5,6], qu'il existe encore une dualité implicite entre la contrôlabilité et l'observabilité dans cet exemple particulier.

2. Démonstrations des Théorèmes 1 et 2

Dans ce paragraphe, nous donnons les étapes essentielles des démonstrations des Théorèmes 1 et 2.

D'abord, par (30) et la deuxième condition dans (24), nous pouvons réécrire, dans un voisinage de $(r, s, s_x) = (0, 0, 0)$, la seconde équation de (23) sous la forme équivalente :

$$r = R(s, s_x, s_t), \tag{33}$$

où R est une fonction de classe C^2 avec $R(0, 0, 0) = 0$. Substituant (33) dans la première équation de (23), un calcul direct permet d'obtenir une équation du second ordre portant sur la variable s :

$$s_{tt} + (\lambda + \mu)s_{tx} + \lambda\mu s_{xx} = F, \tag{34}$$

où

$$F = F(s, s_x, s_t) =: (g_s - \mu_s s_x)(s_t + \lambda s_x) + f(g_r - \mu_r s_x). \tag{35}$$

Il est clair que la fonction F est de classe C^1 et qu'elle vérifie $F(0, 0, 0) = 0$. De plus, grâce à la première condition de (24), le discriminant de (34) est strictement positif :

$$\Delta = (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu = (\lambda - \mu)^2 > 0. \tag{36}$$

Donc dans un voisinage de $(s, s_x, s_t) = (0, 0, 0)$, l'équation quasi-linéaire du second ordre (34) est de type hyperbolique, dont les deux caractéristiques sont données par

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda < 0, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mu > 0. \tag{37}$$

C'est le point-clef pour la contrôlabilité exacte unilatérale et l'observabilité exacte unilatérale.

Ensuite, en utilisant la seconde équation de (23), les conditions initiales (27) sont transformées en

$$t = 0: \quad \begin{cases} s = \phi(x) =: s_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ s_t = \psi(x) =: g(r_0(x), s_0(x)) - \mu(r_0(x), s_0(x))s_0'(x), & 0 \leqslant x \leqslant L, \end{cases} \tag{38}$$

et les conditions finales (28) sont transformées en

$$t=T:\quad \begin{cases} s=\Phi(x)=:s_T(x), & 0\leqslant x\leqslant L,\\ s_t=\Psi(x)=:g(r_T(x),s_T(x))-\mu(r_T(x),s_T(x))s_T'(x), & 0\leqslant x\leqslant L. \end{cases} \tag{39}$$

Il est clair que

$$(\phi,\psi)\in C^2[0,L]\times C^1[0,L]\quad \text{et}\quad (\Phi,\Psi)\in C^2[0,L]\times C^1[0,L],$$

et que les normes $\|(\phi,\psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]}$ et $\|(\Phi,\Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]}$ sont assez petites pourvu que les normes $\|(r_0,s_0)\|_{C^1[0,L]\times C^2[0,L]}$ et $\|(r_T,s_T)\|_{C^1[0,L]\times C^2[0,L]}$ soient assez petites.

Enfin, par la relation (33), nous tranformons les conditions aux limites (25)–(26) en

$$x=0:\quad s=H(t), \tag{40}$$

$$x=L:\quad R(s,s_x,s_t)=\overline{H}(t). \tag{41}$$

Ainsi, nous avons transformé la contrôlabilité exacte unilatérale pour le système hyperbolique quasi-linéaire du premier ordre (23) avec (25)–(28) en la contrôlabilité exacte unilatérale pour l'équation hyperbolique quasi-linéaire du second ordre (34) avec (38)–(41), et l'observabilité exacte unilatérale pour le système hyperbolique quasi-linéaire du premier ordre (23) avec (25)–(27) en l'observabilité exacte unilatérale pour l'équation hyperbolique quasi-linéaire du second ordre (34) avec (38) et (40)–(41).

Pour le problème de la contrôlabilité exacte, la donnée initiale (ϕ,ψ) et la donnée finale (Φ,Ψ) satisfont les conditions de C^2-compatibilité aux points $(t,x)=(0,0)$ et $(T,0)$ respectivement. En utilisant la méthode de [4,7,8] et [10,11], nous pouvons établir la théorie correspondante de solution C^2 semi-globale de l'équation hyperbolique quasi-linéaire du second ordre (34). Puis par la méthode constructive de [7,8], nous montrons qu'il existe un contrôle $\overline{H}$ avec une norme $C^1[0,T]$ petite et appliqué à l'extrémité $x=L$ tel que le problème (34), (38) et (40)–(41) admette une unique solution C^2-semi-globale $s=s(t,x)$ dans le domaine $R(T)=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant x\leqslant L\}$ avec une norme C^2 petite, qui satisfait exactement la condition finale (39).

De la même façon, pour le problème de l'observabilité exacte, la donnée initiale (ϕ,ψ) satisfait les conditions de C^2-compatibilité aux points $(t,x)=(0,0)$ et $(0,L)$ respectivement. Nous pouvons montrer comme dans [3] que le problème (34), (38) et (40)–(41) admet une unique solution C^2 semi-globale $s=s(t,x)$ dans le domaine $R(T)=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant x\leqslant L\}$ avec une norme C^2 petite. De plus, la donnée initiale (ϕ,ψ) peut être déterminée uniquement par les valeurs observées $s=\bar{s}(t)$ à l'éxtrémité $x=L$, et les fonctions $(H,\overline{H})$ dans l'intervalle $[0,T]$. On peut obtenir également une inéqualité d'observabilité sur $\|(\phi,\psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]}$, qui implique l'inéqualité d'observabilité (32).

Références

[1] T. Li, Observabilité exacte frontière pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris., Ser. I 342 (2006) 937–942.
[2] T. Li, Exact boundary observability for quasilinear hyperbolic systems, ESAIM: COCV, DOI: 10.1051/COCV:2008007.
[3] T. Li, Exact boundary observability for quasilinear wave equations, Math. Meth. Appl. Sci. 29 (2006) 1543–1553.
[4] T. Li, Y. Jin, Semi-global C^1 solution to the mixed initial-boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems, Chin. Ann. Math., Ser. B 22 (2001) 325–336.
[5] T. Li, B. Rao, Local exact boundary controllability for a class of quasilinear hyperbolic systems, Chin. Ann. Math., Ser. B 23 (2002) 209–218.
[6] T. Li, B. Rao, Exact boundary controllability for quasilinear hyperbolic systems, SIAM J. Control Optim. 41 (2003) 1748–1755.
[7] T. Li, L. Yu, Contrôlabilité exacte frontière pour les équations des ondes quasi-linéaires unidimensionnelles, C. R. Acad. Sci. Paris., Ser. I 337 (2003) 271–276.
[8] T. Li, L. Yu, Exact boundary controllability for 1-D quasilinear wave equations, SIAM J. Control. Optim. 45 (2006) 1074–1083.
[9] D.L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations, Recent progress and open questions, SIAM Rev. 20 (1978) 639–739.
[10] Z. Wang, Exact controllability for nonautonomous first order quasilinear hyperbolic systems, Chin. Ann. Math., Ser. B 27 (2006) 643–656.
[11] L. Yu, Semi-global C^1 solutions for a general class of quasilinear hyperbolic systems, Chin. Ann. Math., Ser. A 25 (2004) 549–560 (in Chinese).