

Analyse complexe

Régularité de l'opérateur $\bar{\partial}$ et théorème de Siu sur la non-existence d'hypersurfaces Levi-plates dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$

Andrei Iordan^a, Fanny Matthey^b

^a UPMC Université Paris 06, Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586 du CNRS, case 247, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

^b UPMC Université Paris 06, Institut de mathématiques de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 30 mai 2007 ; accepté après révision le 28 février 2008

Disponible sur Internet le 2 avril 2008

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

On donne une variante de la preuve du théorème de Y.-T. Siu sur la non-existence d'hypersurface réelle Levi-plate de classe Sobolev W^s , $s > \frac{9}{2}$, dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$. **Pour citer cet article :** A. Iordan, F. Matthey, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Regularity of the $\bar{\partial}$ operator and Siu's theorem about the non-existence of Levi-flat hypersurfaces in the complex projective space $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$. We give a variant of the proof of Y.-T. Siu's theorem concerning the non-existence of Levi-flat real hypersurface of Sobolev class W^s , $s > \frac{9}{2}$, in $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$. **To cite this article :** A. Iordan, F. Matthey, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

A real hypersurface in $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ is called Levi-flat if it is foliated by complex manifolds of dimension $n - 1$. We say that a Lipschitz Levi-flat real hypersurface M in $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ is of Sobolev class W^s if M is locally the graph of a function belonging to the Sobolev space W^s .

A domain $\Omega \subset \mathbb{C}\mathbb{P}_n$ is pseudoconcave if $\mathbb{C}\mathbb{P}_n \setminus \bar{\Omega}$ is pseudoconvex. A Levi-flat hypersurface M of class C^1 in $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ divides $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ into two components [17], and $\mathbb{C}\mathbb{P}_n \setminus M = \Omega_+ \cup \Omega_-$, where Ω_+ and Ω_- are both pseudoconvex and pseudoconcave domains.

Y.-T. Siu proved in [16] that there exists no smooth Levi-flat real hypersurfaces in $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$, and more generally, in irreducible compact Hermitian symmetric n -dimensional manifolds whose bisectional curvature is $(n - 2)$ -nondegenerate, which is an answer to a question raised by D. Cerveau in [5]. The main tool in Siu's proof relies on

Adresses e-mail : iordan@math.jussieu.fr (A. Iordan), matthey@math.jussieu.fr (F. Matthey).

the study of the regularity properties of the $\bar{\partial}$ operator. The case of the non-existence of real-analytic Levi-flat hypersurface in $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$, was proved by A. Lins-Neto in [12]. Recently, M. Brunella generalized this theorem in [1] to the case of real-analytic submanifold of a compact Kähler manifold with positive curvature.

Some assumptions on regularity are indispensable in this problem. Indeed, if $M = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} \{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}_2 \mid z_1 = e^{i\theta} z_0\}$, then $\mathbb{C}\mathbb{P}_2 \setminus M$ is a disjoint union of pseudoconvex domains (see paragraph 12 in [7]). However, M is not Lipschitz at the point $[0, 0, 1]$.

The most difficult case of this problem is for $n = 2$. A proof of the non-existence of real-analytic hypersurfaces in $\mathbb{C}\mathbb{P}_2$ was given in [15], but it seems that the techniques developed there do not work (see the remark “added in proof” at the end of [13]). The authors were kindly informed by M. Brunella that there is a difficulty of functional analysis in [17]. And the proofs of [2,10] and [14], which depend highly on [17], are therefore affected. The proofs for the smooth case from [3] contain some gaps (see the paragraph 5 of [4] which contains also a discussion on the case $n = 2$ based on results of [7]).

In this Note we are involved only with the case $n \geq 3$. By using Y.-T. Siu’s ideas and techniques [16,17] and G. Henkin and A. Jordan’s methods for the study of the $\bar{\partial}$ operator in the pseudoconcave domains [7], we obtain an improvement of the regularity in Siu’s theorem [16]:

Theorem. *There exists no Levi-flat real hypersurface of class Sobolev W^s in $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ for $s > \frac{9}{2}$, $n \geq 3$.*

A proof of the non-existence of Lipschitz Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ for $n \geq 3$ was published in [4]. In Lemma 4.1 of [4], the Chern curvature of a metric on the extension of a topologically trivial bundle is considered. Moreover, since the proof of this lemma depends on results proved in [3], it would be necessary to have more precisions about the arguments used there.

Our intention in this Note is to give a simpler proof of Siu’s theorem in the case of $\mathbb{C}\mathbb{P}_3$ (which implies the result for $n \geq 3$) with an improvement of regularity, and an overview of the problem.

1. Une hypersurface réelle dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ est dite Levi-plate si elle est feuilletée par des variétés complexes de dimension $n - 1$. On dit qu’une hypersurface réelle Lipschitz Levi-plate M dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ est de classe Sobolev W^s , si M est localement le graphe d’une fonction de classe Sobolev W^s .

Y.-T. Siu a démontré dans [16] qu’il n’existe pas d’hypersurfaces réelles Levi-plates lisses dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$, ce qui est une réponse à une question posée par D. Cerveau dans [5]. L’outil principal pour la démonstration du théorème de Siu est l’étude des propriétés de régularité des solutions de l’équation $\bar{\partial}$. Le cas de la non-existence d’hypersurface Levi-plate réelle-analytique dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, $n \geq 3$, a été prouvé par A. Lins-Neto dans [12]. M. Brunella a récemment généralisé ce théorème dans [1] au cas d’une sous-variété analytique-réelle d’une variété kählérienne compacte de courbure positive.

Pour ce problème de non-existence, le cas le plus difficile à traiter est le cas $n = 2$. Une preuve de la non-existence d’hypersurface réelle-analytique dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_2$ a été donnée dans [15], mais il semble que les techniques utilisées ne marchent pas (voir la remarque « added in proof » à la fin de [13]). Les auteurs ont été informés par M. Brunella qu’il y avait une difficulté d’analyse fonctionnelle dans [17]. Et les preuves de [2,10,14] qui dépendent fortement de [17], sont par conséquent affectées. Les preuves dans le cas lisse de [3] contiennent des imprécisions (voir le paragraphe 5 de [4] qui contient aussi une discussion concernant le cas $n = 2$ fondée sur les résultats de [7]).

Dans cette Note, on ne s’intéresse qu’au cas $n \geq 3$. En utilisant les idées et les techniques de Y.-T. Siu [16,17] ainsi que les méthodes de G. Henkin et A. Jordan de [7] sur l’opérateur $\bar{\partial}$ dans les domaines pseudoconcaves, on obtient une amélioration de la régularité dans le théorème de Siu [16] :

Théorème 1. *Il n’existe pas d’hypersurface réelle Levi-plate de classe W^s dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ pour $s > \frac{9}{2}$, $n \geq 3$.*

Une preuve de non-existence d’hypersurface Lipschitz Levi-plate dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ pour $n \geq 3$ a été publiée dans [4]. Dans le Lemme 4.1 de [4], il est question de courbure de Chern d’une métrique sur l’extension d’un fibré topologiquement trivial. De plus, puisque la preuve de ce lemme dépend de résultats établis dans [3], il serait nécessaire d’avoir quelques précisions concernant les arguments utilisés.

L’objet de cette Note est donc de donner une preuve plus simple du théorème de Y.-T. Siu dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_3$ (ce qui impliquera le résultat pour $n \geq 3$), tout en améliorant la régularité, et de donner une vue d’ensemble du problème.

2. On reprend les notations et les définitions de [7] :

Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ et E un fibré vectoriel holomorphe hermitien au-dessus de Ω . Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $W_{p,q}^s(\Omega; E)$ l'ensemble des (p, q) -formes sur Ω à coefficients dans l'espace de Sobolev $W^s(\Omega)$ muni de la norme $\| \cdot \|_s$ et à valeurs dans le fibré E , et on note $AW_{p,q}^s(\Omega; E)$ l'ensemble des (p, q) -formes dans $W_{p,q}^s(\Omega; E)$ qui sont $\bar{\partial}$ -fermées.

Soit Ω_+ un domaine pseudoconvexe dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ et $r(z)$ la distance de $z \in \Omega$ à $b\Omega$ induite par la métrique de Fubini–Study. Un théorème de A. Takeuchi [18] assure l'existence d'une constante strictement positive \mathcal{K}_n telle que $i\bar{\partial}(-\log r) \geq \mathcal{K}_n \omega$ où ω est la forme de Kähler associée à la métrique de Fubini–Study.

Si δ est une fonction C^∞ positive sur Ω_+ , on note $L_{p,q}^2(\Omega_+; \delta^{-s}; E)$, $s \in \mathbb{R}$, l'ensemble des (p, q) -formes f sur Ω_+ à valeurs dans E telles que $\delta^{-s} f$ soit de carré intégrable sur Ω_+ . On dit que $f \in L_{p,q}^2(\Omega_+; \delta^{-s}; E)$ vérifie la condition des moments à l'ordre s si $\int_{\Omega_+} f \wedge h = 0$ pour toute $h \in L_{n-p,n-q}^2(\Omega_+; \delta^s; E^*)$ $\bar{\partial}$ -fermée.

Toute $f \in L_{p,q}^2(\Omega_+; \delta^{-s-1}; E)$ $\bar{\partial}$ -fermée, $1 \leq q \leq n-1$, vérifie la condition des moments à l'ordre s .

Soit Ω_- un domaine pseudoconcave de $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$. Une forme $f \in AW_{p,q}^s(\Omega_-; E)$, $s \geq 1$, satisfait la condition des moments à l'ordre s sur Ω_- s'il existe une extension $\tilde{f} \in W_{p,q}^s(\mathbb{C}\mathbb{P}_n; E)$ de f telle que $\bar{\partial} \tilde{f}$ satisfait la condition des moments à l'ordre $s-1$ dans le domaine pseudoconvexe $\Omega_+ = \mathbb{C}\mathbb{P}_n \setminus \overline{\Omega_-}$.

Le théorème suivant est une généralisation au cas s non entier du Théorème 8.7 de [7] :

Théorème 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}\mathbb{P}_n$ un domaine pseudoconcave à bord Lipschitz dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$. Soient $s \in \mathbb{R}$, $s' \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $1 \leq s' < s$, $s' - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ et $2(s-1)\mathcal{K}_n - m > 0$. Alors pour toute $f \in AW_{0,q}^s(\Omega; \mathcal{O}(m))$, $1 \leq q \leq n-2$, il existe $u \in W_{0,q-1}^{s'}(\Omega; \mathcal{O}(m))$ tel que $\bar{\partial}u = f$ et $\|u\|_{s'} \leq C\|f\|_s$ où C est une constante indépendante de f . La même propriété est vraie pour $q = n-1$ lorsque $f \in W_{0,n-1}^s(\Omega; \mathcal{O}(m))$ vérifie la condition des moments à l'ordre s .

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant, qui est une extension du lemme 6.5 établi dans [7] :

Lemme 1. Soit Ω un domaine à bord Lipschitz d'une variété X compacte kählérienne de dimension n et E un fibré vectoriel sur X holomorphe hermitien. Soit $v \in L_{p,q}^2(X; E)$, $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $v = 0$ sur $X \setminus \overline{\Omega}$ et $v \in L_{p,q}^2(X; d^{-s+1}; E)$ où d est la distance géodésique au bord $b\Omega$ et $s > 0$. On désigne par G l'opérateur de Green sur X et par $\bar{\partial}^*$ l'opérateur L^2 -adjoint de $\bar{\partial}$. Alors pour tout $0 \leq s' < s$:

$\bar{\partial}^* Gv \in W_{p,q-1}^{s'}(X \setminus \overline{\Omega}; E)$ et $\|\bar{\partial}^* Gv\|_{s', X \setminus \overline{\Omega}} \leq C \cdot N_{-s+1, \Omega}(v)$, C étant une constante indépendante de v .

Preuve. Pour tout $x \in X \setminus \overline{\Omega}$, $y \in \Omega$, et puisque $d(y) \leq d(x, y)$, on a :

$$\nabla_x^j \bar{\partial}^* Gv(x) \leq \int_{\Omega} \nabla_x^j [\bar{\partial}^* G(x, y)] d^{s-1}(x, y) \wedge v(y) d^{-s+1}(y) dy$$

où ∇_x^j est la dérivation covariante d'ordre j par rapport à x .

L'opérateur de Green G a une singularité d'ordre $2n-2$ sur la diagonale donc $\nabla_x^{j+1} G(x, y) d^{s-1}(y)$ a une singularité d'ordre $2n-s+j$ sur la diagonale pour tout $0 \leq j \leq k$ où $s = k + \alpha$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$.

L'extension triviale de $v d^{-s+1}$ à X appartient à $L_{(p,q)}^2(X; E)$ et il s'en suit que $\nabla_x^j \bar{\partial}^* Gv \in L_{(p,q)}^2(X \setminus \overline{\Omega}; E)$ pour tout $0 \leq j \leq k$, i.e. $\bar{\partial}^* Gv \in W_{(p,q-1)}^k(X \setminus \overline{\Omega}; E)$.

Soit $s' = k + \theta$ tel que $0 < \theta < \alpha$:

$$d^{1-\theta}(x) \nabla_x^{k+1} \bar{\partial}^* Gv(x) = d^{1-\theta}(x) \int_{\Omega} \nabla_x^{k+1} [\bar{\partial}^* G(x, y)] d^{s-1}(y) \wedge v(y) d^{-s+1}(y) dy$$

$\nabla_x^{k+2} G(x, y) d^{1-\theta}(x) d^{s-1}(y)$ a une singularité d'ordre $2n + \theta - \alpha < 2n$ sur la diagonale donc $\nabla_x^{k+1} \bar{\partial}^* Gv$ appartient à $L_{p,q-1}^2(X \setminus \overline{\Omega}; d^{1-\theta}; E)$. Puisque le Laplacien et $\bar{\partial}^*$ commutent, la forme $\bar{\partial}^* Gv$ est harmonique sur $X \setminus \overline{\Omega}$. Il résulte (voir par exemple [11]) que $\bar{\partial}^* Gv \in W_{p,q-1}^{s'}(X \setminus \overline{\Omega}; E)$ et que

$$\|\bar{\partial}^* Gv\|_{s', X \setminus \overline{\Omega}} \leq C \cdot \|d^{1-\theta} |\nabla^{k+1} \bar{\partial}^* Gv| + |\nabla^k \bar{\partial}^* Gv| + |\bar{\partial}^* Gv|\|_{0, X \setminus \overline{\Omega}} \leq C_{s,s'} \cdot N_{-s+1, \Omega}(v)$$

où C et $C_{s,s'}$ sont des constantes indépendantes de v . \square

Preuve du Théorème 2. Le Lemme 1 ci-dessus implique que tous les arguments utilisés dans la démonstration du théorème 8.7 de [7] sont valables pour des espaces de Sobolev d’ordres non entiers.

La démonstration du Théorème 2 ci-dessus est donc exactement la même que celle théorème 8.7 de [7]. \square

Lemme 2. Soient X une variété compacte kählérienne lisse de dimension n et M une hypersurface réelle de X de classe W^s avec $s > n + 1$. Alors la forme de courbure du fibré normal complexe $N_{M,X}^{1,0}$ est W^{s-2} - d -exacte au sens des distributions.

Preuve. Soit $\rho \in W^s(X) \subset C^1(X)$ une fonction réelle telle que $M = \{z \in X \mid \rho(z) = 0\}$ et dont la différentielle $d\rho$ ne s’annule jamais sur M . La forme de courbure Θ du fibré normal complexe $N_{M,X}^{1,0}$ est de classe W^{s-3} sur M .

On peut approcher M par des hypersurfaces réelles M_n de classe C^∞ à l’aide d’une suite régularisante : $M_n = \{\rho_n = 0\}$ où $\|\rho_n - \rho\|_s \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Soit h la métrique hermitienne associée à la forme de Kähler de X . On note Θ_j la forme de courbure du fibré normal complexe $N_{M_j,X}^{1,0}$ de M_n pour la métrique induite par la métrique h sur le fibré tangent T_X .

Les $N_{M_j,X}^{1,0}$ sont triviaux donc les 2-formes Θ_j sont d -exactes sur M_j : $\Theta_j = du_j$ sur M_j , où u_j est la forme de connexion induite par h sur $N_{M_j,X}^{1,0}$. Θ_j et u_j ont des coefficients de classe C^∞ .

On calcule explicitement les u_j : la connexion de Chern de T_X est $\nabla = d + A$, où A , forme de connexion de ∇ , est une matrice de 1-formes donnée par $A = \bar{H}^{-1}(\partial\bar{H})$ avec H la matrice hermitienne représentant la métrique h .

Soit (z_1, \dots, z_n) un système de coordonnées dans un ouvert U . On considère le nouveau repère

$$e' = \left(\frac{\partial\rho_\ell}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial\rho_\ell}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_n}, \dots, \frac{\partial\rho_\ell}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} - \frac{\partial\rho_\ell}{\partial z_{n-1}} \frac{\partial}{\partial z_n}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho_\ell}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right)$$

dont les $n - 1$ premiers éléments sont dans le fibré tangent complexe $T_{M_\ell}^{1,0}$ de M_ℓ et le dernier leur est orthogonal. La forme de connexion A' de ∇ relativement au repère e' est donnée par la transformation de jauge :

$$A' = dG.G^{-1} + G.A.G^{-1} \tag{*}$$

où $G = (G_{ij})$ est la matrice inversible définie par $e'_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}$.

La matrice A' se décompose suivant le scindage $T_X^{1,0}|_{M_\ell} = T_{M_\ell}^{1,0} \oplus N_{M_\ell,X}^{1,0}$: le coefficient A'_{nn} représente donc la forme de connexion induite sur le sous-fibré $N_{M_\ell,X}^{1,0}$. La forme de connexion u_ℓ est donc la restriction de la 1-forme A'_{nn} à M_ℓ .

On recouvre M par un nombre fini de boules $\{B_i\}_{1 \leq i \leq p}$. On dispose d’un prolongement $v_{j,i} = W_{j,i}(u_j)$ de classe C^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$, de u_j à B_i , où $W_{j,i}$ est l’opérateur continu de prolongement de Whitney de $C^k(M_j) \rightarrow C^k(B_i)$, avec les estimations suivantes (voir par exemple [19], chap. IV) :

$$\|v_{j,i}\|_{C^k(B_i)} \leq \Lambda_i \|u_j\|_{C^k(M_j)}$$

où Λ_i est une constante (indépendante de j) ne dépendant que du rayon de B_i .

Grâce à une partition de l’unité $\{\chi_i\}_{1 \leq i \leq p}$ subordonnée au recouvrement $\{B_i\}_{1 \leq i \leq p}$, on a une extension v_j de u_j dans un voisinage de M . Enfin, par multiplication de chaque prolongement v_j par une seule et même fonction plateau dont le support est contenu dans le recouvrement $\bigcup_{i=1}^p B_i$ de M , on obtient une suite $(\tilde{u}_j)_j$ de 1-formes sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ vérifiant les inégalités :

$$\|\tilde{u}_j\|_{C^k(X)} \leq C \|u_j\|_{C^k(M_j)}$$

où $C = \text{Max}\{\Lambda_i, i \in \{1, \dots, p\}\}$ est une constante (indépendante de j).

La suite $(\tilde{u}_j)_j$ est une suite bornée de $W^{s-2}(X)$ – les u_j ne dépendant que des $D\rho_j, D^2\rho_j$ et $\frac{1}{|\partial\rho_j|}$ d’après (*) et $(\rho_j)_j$ converge vers ρ dans W^s – on peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente dans $W^{s-2}(X)$,

de limite faible notée u . La forme de courbure Θ est donc définie et W^{s-2} -d-exacte dans le sens suivant : pour toute $\varphi \in C_{n-1, n-2}^\infty(X)$ à support compact

$$\int_M u \wedge d\varphi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{M_k} u_k \wedge d\varphi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{M_k} du_k \wedge \varphi = \int_M \Theta \wedge \varphi. \quad \square$$

Preuve du Théorème 1. Supposons qu’il existe une hypersurface réelle Levi-plate M dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ de classe W^s , $s > n + 1$. Il existe une fonction réelle ρ définie sur $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$, de classe Sobolev $W^s(\mathbb{C}\mathbb{P}_n)$, telle que $M = \{z \in \mathbb{C}\mathbb{P}_n \mid \rho(z) = 0\}$ et dont la différentielle $d\rho$ ne s’annule jamais sur M . On munit $T_{\mathbb{C}\mathbb{P}_n}$ de la métrique de Fubini–Study ω_{FS} . On considère la suite exacte courte du fibré normal

$$0 \rightarrow T_M^{1,0} \rightarrow T_{\mathbb{C}\mathbb{P}_n|_M}^{1,0} \rightarrow N_{M, \mathbb{C}\mathbb{P}_n}^{1,0} \rightarrow 0$$

où $N_{M, \mathbb{C}\mathbb{P}_n}^{1,0}$ désigne le fibré complexe normal au feuilletage de M .

On a le scindage $T_{\mathbb{C}\mathbb{P}_n|_M}^{1,0} = T_M^{1,0} \oplus N_{M, \mathbb{C}\mathbb{P}_n}^{1,0}$: on identifie $N_{M, \mathbb{C}\mathbb{P}_n}^{1,0}$ au complémentaire orthogonal de $T_M^{1,0}$ dans $T_{\mathbb{C}\mathbb{P}_n|_M}^{1,0}$, on munit les fibrés $T_M^{1,0}$ et $N_{M, \mathbb{C}\mathbb{P}_n}^{1,0}$ de la métrique induite par ω_{FS} . Le lemme précédent assure que la $(1, 1)$ -forme de courbure Θ de ce fibré normal est d-exacte sur M : $\Theta = du$ où $u = u^{1,0} + u^{0,1} \in T_M^{1,0} \oplus T_M^{0,1}$ est une 1-forme dont les coefficients sont dans $W^{s-5/2}(M)$.

On peut supposer que u est réelle. Par considération des types, on déduit que $\bar{\partial}_b u^{0,1} = 0$ sur M .

On a $\mathbb{C}\mathbb{P}_n \setminus M = \Omega_1 \cup \Omega_2$ où Ω_1 et Ω_2 sont des domaines à la fois pseudoconvexes et pseudoconcaves.

D’après la formule de Plemelj (voir Théorème 5.1 de [8]), il existe des formes $\beta_j \in AW_{0,1}^{s-5/2}(\Omega_j)$, $j \in \{1, 2\}$, telles que $u^{0,1}$ s’écrive sur M comme $u^{0,1} = \beta_{1|M} - \beta_{2|M}$.

On applique le Théorème 2 à β_j sur Ω_j , $j \in \{1, 2\}$. Il existe donc des fonctions $\gamma_j \in W^{s'-5/2}(\Omega_j)$ telles que $\beta_j = \bar{\partial}\gamma_j$ on Ω_j , $j \in \{1, 2\}$, avec $[s] < s' < s$ où $[s]$ désigne la partie entière de s . Par conséquent on peut résoudre $u^{0,1} = \bar{\partial}_b \gamma$ où la fonction $\gamma \in W^{s'-3}(M)$, et il en résulte que $\Theta = 2i\partial_b \bar{\partial}_b \text{Im } \gamma$ sur M .

D’autre part, soit $z = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = (z', z_n)$ des coordonnées holomorphes locales sur un ouvert U de $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ au voisinage d’un point de M telles que (z_1, \dots, z_{n-1}, t) soient des coordonnées locales sur M .

Pour t fixé, on note L_t la feuille de $M \cap U$ passant par (z', t) . Puisque β_j et γ_j sont dans $W^{s'-5/2}(\Omega_j)$, on a pour tout t : $\beta_j|_{L_t}$ et $\gamma_j|_{L_t}$ sont dans $W^{s'-7/2}(L_t)$ et $\bar{\partial}\gamma_j = \bar{\partial}_{z'}\gamma_j = \beta_j|_{L_t}$ sur L_t . Cela implique que $\frac{\partial\beta_j}{\partial t} = \bar{\partial}\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}$. Par conséquent, comme $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ appartient à $W^{s'-4}(M)$, on a aussi pour $s' - 4 > \frac{1}{2}$: $\frac{\partial\Theta}{\partial t} = 2i\partial\bar{\partial}\text{Im}\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ sur L_t pour tout t .

En utilisant une section générique, il suffit de prouver le théorème pour $n = 3$.

A partir de maintenant, on suppose qu’il existe une hypersurface M réelle Levi-plate de classe $W^{9/2+\varepsilon}$ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}_3$, où $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Pour tout point p de M , il existe un voisinage \tilde{V} de p et des coordonnées z_1, z_2, z_3 dans \tilde{V} telles que la fonction ρ soit C^∞ en $z' = (z_1, z_2)$ et de classe C^1 en z_3 : M est localement feuilletée par une famille de variétés complexes $L_t = \{z_3 = \varphi(z_1, z_2, t), z' \in V \in \mathbb{C}^2, 0 \leq |t| < \mu\}$.

On vient de voir que $\Theta = 2i\partial_b \bar{\partial}_b \text{Im } \gamma$ et que $\frac{\partial\Theta}{\partial t} = 2i\partial_b \bar{\partial}_b \text{Im}\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ sur M où $\gamma \in W^{3/2+\varepsilon'}(M)$ avec $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

La fonction γ est lisse sur chaque feuille L_t et est en fait continue sur M . En effet, soit p_0 un point de M de coordonnées $(z'_0, t_0) \in V \times]-\mu, \mu[$. On a :

$$\begin{aligned} |\gamma(z', t) - \gamma(z'_0, t_0)| &\leq |\gamma(z', t) - \gamma(z'_0, t)| + |\gamma(z'_0, t) - \gamma(z'_0, t_0)| \\ &\leq \sup_{z' \in V_{z'_0}} \left| \frac{\partial\gamma}{\partial z'}(z', t) \right| \|z' - z'_0\| + \sup_{t \in]-\mu, \mu[} \left| \frac{\partial\gamma}{\partial t}(z'_0, t) \right| |t - t_0| \\ &\leq \sup_{z' \in V_{z'_0}} \left| \frac{\partial\gamma}{\partial z'}(z', t) \right| \|z' - z'_0\| + \sup_{t \in]-\mu, \mu[} \left(\sup_{z' \in V_{z'_0}} \left| \frac{\partial\gamma}{\partial t}(z', t) \right| \right) |t - t_0| \\ &\leq C_1 \left(\left\| \frac{\partial\gamma}{\partial z'}(\cdot, t) \right\|_{2+\varepsilon, \Omega_t} \|z' - z'_0\| + \sup_{t \in]-\mu, \mu[} \left(\left\| \frac{\partial\gamma}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{2+\varepsilon, \Omega_t} \right) |t - t_0| \right) \end{aligned} \quad (**)$$

d’après le lemme de Sobolev, C_1 étant une constante indépendante de t .

Puisque $\partial_z' \bar{\partial}_z'$ est un opérateur uniformément elliptique d'ordre 2, on a les estimations suivantes (voir par exemple [9]) :

$$\|\gamma(\cdot, t)\|_{3+\varepsilon, \Omega_t} \leq C_2 (\|\Theta\|_{1+\varepsilon, \Omega_t} + \|\gamma\|_{0, \Omega_t}), \quad \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{2+\varepsilon, \Omega_t} \leq C_3 \left(\left\| \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right\|_{\varepsilon, \Omega_t} + \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_t} \right)$$

où Ω_t est un voisinage de z'_0 dans L_t suffisamment petit et C_2, C_3 sont des constantes indépendantes de t . Comme $\Theta \in W^{3/2+\varepsilon}(M)$ et $\gamma \in W^{3/2+\varepsilon'}(M)$, d'après le théorème de la trace de Sobolev, on a :

$$\|\gamma(\cdot, t)\|_{3+\varepsilon, \Omega_t} \leq C_4 (\|\Theta\|_{\frac{3}{2}+\varepsilon, M} + \|\gamma\|_{\frac{1}{2}, M}), \quad \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{2+\varepsilon, \Omega_t} \leq C_5 \left(\left\| \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon, M} + \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{\frac{1}{2}, M} \right)$$

où C_4 et C_5 sont des constantes indépendantes de t .

Finalement $\|\gamma(\cdot, t)\|_{3+\varepsilon, \Omega_t}$ et $\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{2+\varepsilon, \Omega_t}$ sont majorées par des constantes indépendantes de t , ce qui entraîne avec (***) la continuité de γ .

Puisque la courbure $ic(T_{\mathbb{C}P_n})$ est positive et que la courbure augmente sur le fibré quotient, on déduit que la courbure Θ est strictement positive en chaque point de M le long des directions complexes tangentes aux feuilles de M . On obtient une contradiction avec le principe du maximum faible (voir par exemple [6]) aux points des feuilles du feuilletage de M où la fonction $\text{Im } \gamma$ atteint son maximum. \square

Remarque. La preuve de la non-existence pour le cas lisse W^s , $s > 5$, est plus simple puisque la d-exactitude de la forme de courbure Θ est immédiate – le Lemme 2 n'étant plus nécessaire.

La difficulté de généraliser cette preuve dans le cas $n = 2$ est due à la vérification de la condition des moments pour les (0, 1)-formes.

Références

- [1] M. Brunella, On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle, preprint, arXiv: 0706.1546.
- [2] M. Brunella, Siu's theorem on the nonexistence of Levi-flat hypersurfaces in the complex projective plane, preprint, 2005.
- [3] J. Cao, M.-C. Shaw, L. Wang, Estimates for the $\bar{\partial}$ -Neumann problem and nonexistence of Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{C}P_n$, *Math. Z.* 248 (2004) 183–221. Erratum, *Math. Z.* 248 (2004) 223–225.
- [4] J. Cao, M.-C. Shaw, The $\bar{\partial}$ -Cauchy problem and the nonexistence of Lipschitz Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{C}P_n$, $n \geq 3$, *Math. Z.* 256 (1) (2007) 175–192.
- [5] D. Cerveau, Minimaux des feuilletages algébriques de $\mathbb{C}P_n$, *Ann. Inst. Fourier* 43 (1993) 1535–1543.
- [6] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1983.
- [7] G. Henkin, A. Iordan, Regularity of $\bar{\partial}$ on pseudoconcave compacts and applications, *Asian J. Math.* 4 (2000) 855–884. Erratum, *Asian J. Math.* 7 (2003) 147–148.
- [8] G. Henkin, P. Polyakov, Homotopy formulas for $\bar{\partial}$ -operator on $\mathbb{C}P_n$ and the Radon–Penrose transform, *Math. USSR Izv.* 28 (3) (1987) 555–587.
- [9] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.
- [10] A. Iordan, On the non-existence of smooth Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{C}P_n$, in: *Proceedings of the Memorial Conference of K. Oka's Centennial birthday on Complex Analysis in Several Variables*, Kyoto, Nara, 2001, in: *Advanced Studies in Pures Mathematics*, vol. 42, 2004, pp. 123–126.
- [11] D. Jerison, C.E. Kenig, The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains, *J. Funct. Anal.* 130 (1995) 161–219.
- [12] A. Lins-Neto, A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations, *Ann. Inst. Fourier* 49 (1999) 1369–1385.
- [13] K. Matsumoto, T. Ohsawa, On the real analytic Levi flat hypersurfaces in complex tori of dimension two, *Ann. Inst. Fourier* 52 (5) (2002) 1525–1532.
- [14] F. Matthey, Non-existence of Lipschitz-regular Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{C}P_2$, preprint, 2006.
- [15] T. Ohsawa, Nonexistence of real analytic Levi flat hypersurfaces in \mathbb{P}^2 , *Nagoya Math. J.* 158 (2000) 95–98.
- [16] Y.T. Siu, Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension ≥ 3 , *Ann. of Math.* 151 (2000) 1217–1243.
- [17] Y.T. Siu, Regularity for weakly pseudoconvex domains in compact Hermitian symmetric spaces with respect to invariant metrics, *Ann. of Math.* 156 (2002) 595–621.
- [18] A. Takeuchi, Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, *J. Math. Soc. Japan* 16 (1964) 159–181.
- [19] J.-C. Tougeron, *Ideaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, 1972.