



Logique/Combinatoire

Ordres indécomposables critiques

Imed Zaguia

Department of Mathematics & Statistics, Sultan Qaboos University, P.O. Box 36, Al-Khoud 123 Muscat, Sultanate of Oman

Reçu le 24 décembre 2004 ; accepté après révision le 29 janvier 2008

Disponible sur Internet le 7 mars 2008

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Un ordre indécomposable sur au moins quatre sommets est *critique* si toutes ses extensions immédiates sont décomposables. Nous montrons qu'il y a exactement 12 ordres indécomposables critiques finis et de hauteur au plus trois. Nous donnons une liste infinie d'ordres indécomposables critiques ayant une hauteur, largeur et dimension arbitrairement grandes. Nous montrons aussi qu'un ordre d'intervalles indécomposable, sur au moins quatre sommets et éventuellement une infinité, est critique si et seulement si il est de largeur deux. **Pour citer cet article :** *I. Zaguia, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Critically prime orders. An order on at least four vertices is *critically prime* if it is prime and has no prime upper cover. We prove that there are only twelve finite prime orders of height at most three which do not have a prime upper cover. Moreover, we provide examples of prime orders of arbitrarily width, height and dimension which do not have a prime upper cover. We also prove that a prime interval order, on at least four vertices, but possibly infinitely many, has no prime upper cover if and only if it has width two. **To cite this article:** *I. Zaguia, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

This Note is about *critically prime orders*, introduced in our thesis [9] as prime orders, on at least four vertices, for which the addition of a new comparability destroys the primality. We essentially prove that these orders are 2-dimensional in the case where they have height at most three. This result is related to a conjecture on perpendicular orders [8,9]. This is also an instance of the study of the behavior of order properties with respect to the addition of new comparabilities. See [1,6,7] for another instance.

An *order* on a set V is a binary relation on V , identified to a subset \mathcal{P} of $V \times V$, which is reflexive, antisymmetric and transitive. The pair $P := (V, \mathcal{P})$ is an *ordered set*. Let $x, y \in V$; we denote by $x \leq y$ the fact that $(x, y) \in \mathcal{P}$ and by $x < y$ the fact that $x \leq y$ & $x \neq y$. We say that y *covers* x or that x is *covered* by y , and we denote by $x \prec y$, if $x < y$ and there is no element $z \in V$ such that $x < z < y$. Also, we say that x and y are *comparable*, and we denote by $x \sim y$, if $x \leq y$ or $y \leq x$; otherwise we say that x and y are *incomparable*. We denote by $inc(\mathcal{P})$ the set of incomparable pairs

Adresse e-mail : imed_zaguia@hotmail.com.

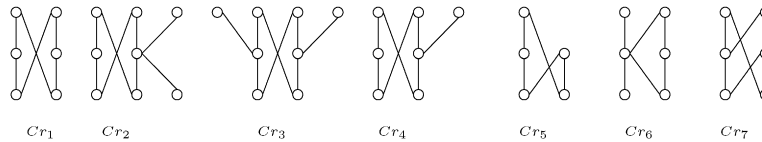


Fig. 1. Ordres indécomposables critiques d'hauteur trois (à la dualité).

Fig. 1. Critically prime orders of height three (up to duality).

of \mathcal{P} . An ordered pair (a, b) of $inc(\mathcal{P})$ is said to be *critical* if $a < x$ whenever $b < x$ and $y < b$ whenever $y < a$ for all x and y . The set of critical pairs of \mathcal{P} is denoted by $crit(\mathcal{P})$. The set $\mathcal{O}(V)$ of orders on V being ordered by inclusion, we recall that for every $(x, y) \in inc(\mathcal{P})$, there is a least order, denoted by $\mathcal{P} \vee \{(x, y)\}$, containing $\mathcal{P} \cup \{(x, y)\}$. This least order is equal to $\mathcal{P} \cup \{(x, y)\}$ if and only if $(x, y) \in crit(\mathcal{P})$. In fact, an order \mathcal{Q} covers the order \mathcal{P} in $\mathcal{O}(V)$ if and only if $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \vee \{(x, y)\}$ where $(x, y) \in crit(\mathcal{P})$ [2]. Let A be a subset of V . We recall that A is a *chain*, respectively an *antichain*, of \mathcal{P} if two distinct elements of A are necessarily comparable, respectively incomparable. The *width* of \mathcal{P} is the least upper bound of the lengths of its antichains. The set A is *autonomous* for \mathcal{P} if for all $v \notin A$ and for all $(a, a') \in A^2$

$$(v < a \Rightarrow v < a') \text{ and } (a < v \Rightarrow a' < v). \tag{1}$$

Clearly, the empty set, the singletons and the whole set V are autonomous and are said to be *trivial*. Call an order *prime* if $|V| \geq 4$ and all its autonomous sets are trivial. The notion of an autonomous set for general relational structures was introduced by Fraïssé [5] who used the term “interval” rather than autonomous set. A subset $\{a, b, c, d\}$ of V is an N of \mathcal{P} if $a < b > c < d$ and there are no further comparabilities between these elements; we denote by \mathcal{N} the resulting order. An order \mathcal{P} is N -free if it has no N as a subset. It is well known that every order \mathcal{P} can be embedded into an N -free order \mathcal{Q} ; moreover, if \mathcal{P} is prime, then some \mathcal{Q} is prime. The following result provides an example of a large class of non critically prime orders.

Theorem 0.1. *Every finite prime N -free order (on at least four vertices) has a prime upper cover.*

Let \mathcal{W} be the order on a set $\{a, b, c, d, e\}$ such that $c > a < d > b < e$ and let \mathcal{M} be the dual of \mathcal{W} . Notice that both \mathcal{W} and \mathcal{M} are critically prime.

Theorem 0.2. *Suppose \mathcal{P} is a finite critically prime. If \mathcal{P} has height 2 (bipartite), then \mathcal{P} is isomorphic to \mathcal{N} , to \mathcal{W} or to \mathcal{M} ; if \mathcal{P} has height 3, then \mathcal{P} is isomorphic to one of the orders depicted in Fig. 1.*

Theorem 0.3.

- (i) *There are examples of critically prime orders of any dimension.*
- (ii) *There are examples of critically prime orders of any height and width.*

An order \mathcal{P} is an *interval order* if $\mathcal{P} := (V, \mathcal{P})$ is isomorphic to a subset \mathcal{J} of the set $Int(C)$ of non-empty intervals of a chain C , ordered as follows: if $I, J \in Int(C)$, then $I < J$ if $x < y$ for every $x \in I$ and every $y \in J$ (see [4]). A symmetric graph $G = (V, E)$ is a *caterpillar* if the graph obtained by removing from $V(G)$ the vertices of degree one is a path (possibly infinite and, if it is finite, possibly empty or reduced to one vertex). A *comb* is a caterpillar such that every vertex is adjacent to at most one vertex of degree 1. Incidentally, a path on three vertices is not a comb.

Theorem 0.4. *Let \mathcal{P} be an interval order, $|V| \geq 4$ but not necessarily finite. The following are equivalent:*

- (i) *\mathcal{P} is critically prime;*
- (ii) *\mathcal{P} is prime and has width two;*
- (iii) *The incomparability graph of \mathcal{P} is prime and acyclic;*
- (vi) *The incomparability graph of \mathcal{P} is a comb.*

1. Introduction

Nous considérons des ordres indécomposables qui deviennent décomposables dès qu'on leur ajoute une nouvelle comparabilité. Excluant les ordres totaux sur trois sommets ou moins, nous les appelons *critiques* [9]. Nous prouvons essentiellement que les ordres critiques de hauteur au plus trois sont de dimension 2 ; un résultat qui est en rapport avec une conjecture [8,9] sur les ordres perpendiculaires. Notre étude s'inscrit dans le cadre plus général de l'étude du comportement de propriétés d'ordres vis-à-vis de l'adjonction de comparabilités (pour un autre exemple, voir [1,6,7]).

Un *ordre* sur un ensemble V est une relation binaire sur V , identifiée à une partie \mathcal{P} de $V \times V$, qui est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. Le couple $P = (V, \mathcal{P})$ est un *ensemble ordonné*. Dans toute la suite, la lettre P désignera l'ensemble ordonné associé à un ordre \mathcal{P} . Soient $x, y \in V$. On note $x \leq y$ au lieu de $(x, y) \in \mathcal{P}$. On note $x < y$ lorsque $x \leq y$ & $x \neq y$. On dit que y *couvre* x ou que x est *couvert* par y , et on note $x < y$, si $x < y$ et il n'y a aucun élément z tel que $x < z < y$. On note $x \sim y$ le fait que $x \leq y$ ou $y \leq x$ et on dit que x et y sont *comparables* ; sinon, on dit qu'ils sont *incomparables*, ce qu'on note $x \not\sim y$; on désigne par $inc(\mathcal{P})$ l'ensemble des couples (x, y) formés d'éléments incomparables de \mathcal{P} . On dit que le couple (x, y) est *critique* si $(x, y) \in inc(\mathcal{P})$, $x' < x$ implique $x' < y$ et $y < y'$ implique $x < y'$ pour tout $(x', y') \in V^2$; on désigne par $crit(\mathcal{P})$ l'ensemble des couples critiques de \mathcal{P} . L'ensemble $\mathcal{O}(V)$ des ordres sur V étant ordonné par inclusion, on rappelle que si $(x, y) \notin \mathcal{P}$ il existe un plus petit ordre, noté $\mathcal{P} \vee \{(x, y)\}$, contenant $\mathcal{P} \cup \{(x, y)\}$; ce plus petit ordre est égal à $\mathcal{P} \cup \{(x, y)\}$ si et seulement si $(x, y) \in crit(\mathcal{P})$. En fait, un ordre \mathcal{Q} couvre l'ordre \mathcal{P} dans l'ensemble ordonné $\mathcal{O}(V)$ si et seulement si $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \vee \{(x, y)\}$ avec $(x, y) \in crit(\mathcal{P})$ [2].

Une partie A de V est une *chaîne*, resp. une *antichaîne* de \mathcal{P} si deux éléments distincts de A sont forcément comparables, resp. incomparables dans \mathcal{P} . La *hauteur* d'un ordre fini \mathcal{P} est le nombre d'éléments dans une chaîne de taille maximum. La *largeur* de \mathcal{P} est le cardinal maximal de ses antichaînes. La partie A est un *autonome* de \mathcal{P} si pour tout $v \notin A$ et pour tout $(a, a') \in A^2$

$$(v < a \Rightarrow v < a') \text{ et } (a < v \Rightarrow a' < v). \quad (2)$$

L'ensemble vide, les singletons et V sont des autonomes dits *triviaux*. Par exemple, si \mathcal{P} est un ordre total, ses autonomes sont les intervalles. La notion d'ensemble autonome a été généralisée aux structures relationnelles par Fraïssé [5] qui utilisa le terme « intervalle » au lieu d'autonome. L'ordre \mathcal{P} est *indécomposable* si tous ses ensembles autonomes sont triviaux. L'ordre \mathcal{P} est *critique* s'il a au moins quatre sommets, est indécomposable et ses couvertures sont toutes décomposables. Un exemple est l'ordre \mathcal{N} sur $\{a, b, c, d\}$ tel que $a < c > b < d$ soient les seules comparabilités.

Le lemme suivant donne quelques propriétés des couples critiques et des ensembles autonomes dans un ensemble ordonné critique :

Lemme 1.1. *Soit \mathcal{P} un ordre indécomposable et soit $(a, b) \in crit(\mathcal{P})$. Si $\mathcal{P} \vee \{(a, b)\}$ est décomposable, alors les propositions suivantes sont vraies :*

- (i) *Si A est un autonome non trivial pour $\mathcal{P} \vee \{(a, b)\}$, alors $a \in A$ ou $b \in A$ et $\{a, b\} \not\subset A$.*
- (ii) *$\mathcal{P} \vee \{(a, b)\}$ a au plus deux autonomes maximaux pour l'inclusion.*
- (iii) *Deux autonomes maximaux pour l'inclusion de $\mathcal{P} \vee \{(a, b)\}$ sont disjoints ;*
Si A est un autonome non trivial pour $\mathcal{P} \vee \{(a, b)\}$ et si $b \in A$ alors :
- (iv) *L'élément b est minimal dans A .*
- (v) *Tout élément x de $A \setminus \{b\}$ est tel que $a < x$.*
- (vi) *Si b est comparable ou incomparable à tous les éléments de $A \setminus \{b\}$, alors $|A| = 2$.*

Soit \mathcal{P} un ordre sur un ensemble V , un N de \mathcal{P} est une partie à quatre éléments $\{a, b, c, d\}$ de V telle que $a < c > b < d$ et et il n'y a pas d'autres comparabilités entre ces éléments (ainsi l'ordre induit sur une telle partie est un \mathcal{N}). L'ordre \mathcal{P} est *sans N* si on ne peut trouver de N dans \mathcal{P} . Notons que tout ensemble ordonné $P := (V, \mathcal{P})$ se plonge dans un ensemble ordonné $P' := (V', \mathcal{P}')$ tel que \mathcal{P}' soit sans N . De plus, si \mathcal{P} est indécomposable alors on peut choisir \mathcal{P}' indécomposable. Le résultat suivant donne un exemple d'une large classe d'ordres qui ne sont pas critiques :

Théorème 1.2. *Un ordre fini, indécomposable et sans N , ne peut être critique.*

Soit \mathcal{W} l'ordre défini sur l'ensemble $\{a, b, c, d, e\}$ en posant $c > a < d > b < e$ et soit \mathcal{M} l'ordre dual de \mathcal{W} . Il est à noter que \mathcal{W} et \mathcal{M} sont critiques.

Théorème 1.3. *Suppose \mathcal{P} est fini et critique. Si \mathcal{P} est de hauteur 2 (biparti) il est isomorphe à \mathcal{N} , \mathcal{W} ou à \mathcal{M} . Si \mathcal{P} est de hauteur 3 il est isomorphe à l'un des ordres décrits dans la Fig. 1.*

Théorème 1.4.

- (i) *Il y a des exemples d'ordres finis et critiques ayant une dimension arbitrairement grande.*
- (ii) *Il y a des exemples d'ordres finis et critiques ayant une largeur et une hauteur arbitrairement grande.*

L'ordre \mathcal{P} est un *ordre d'intervalles* si $P := (V, \mathcal{P})$ est isomorphe à une partie \mathcal{J} de l'ensemble $Int(C)$ des intervalles non-vides d'une chaîne C , munie de l'ordre suivant : pour $I, J \in Int(C)$, $I < J$ si $x < y$ pour tout $x \in I$, tout $y \in J$ (voir [4]). Un graphe (non dirigé) $G := (V, \mathcal{E})$ est une *chenille* s'il est connexe et si le graphe obtenu en enlevant de V les sommets de degré 1 est un chemin (éventuellement infini et s'il est fini éventuellement vide ou réduit à un sommet). Un *peigne* est une chenille dans laquelle chaque sommet est lié à au plus un sommet de degré 1.

Théorème 1.5. *Soit \mathcal{P} un ordre d'intervalles sur un ensemble V , $|V| \geq 4$, non nécessairement fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *\mathcal{P} est critique ;*
- (ii) *\mathcal{P} est indécomposable de largeur deux ;*
- (iii) *Le graphe d'incomparabilité de \mathcal{P} est indécomposable et acyclique ;*
- (iv) *Le graphe d'incomparabilité de \mathcal{P} est un peigne.*

La preuve du Théorème 1.3 nécessite plusieurs lemmes que nous énonçons ci-après :

Lemme 1.6. *Soit \mathcal{P} un ordre, non nécessairement fini. Si $(a, b) \in crit(\mathcal{P})$ et $(b, c) \in crit(\mathcal{P})$, alors soit $a \leq c$ soit $(a, c) \in crit(\mathcal{P})$. Si \mathcal{P} est critique, alors $a < c$.*

Preuve. Soient a, b, c tels que $\{(a, b), (b, c)\} \subseteq crit(\mathcal{P})$ et $a \not\leq c$. Puisque $(a, b) \in crit(\mathcal{P})$ et $c \not\leq b$, alors $c \not\leq a$. Donc, $a \not\leq c$. Soit $x < a$. Comme $(a, b) \in crit(\mathcal{P})$, alors $x < b$. Comme $(b, c) \in crit(\mathcal{P})$, alors $x < c$. De même, on montre que si $c < y$, alors $a < y$. Par conséquent, $(a, c) \in crit(\mathcal{P})$. Supposons maintenant que \mathcal{P} est critique. Donc \mathcal{P} est indécomposable. Par conséquent (c, b) et (b, c) ne peuvent être à la fois critique. Comme $\{(a, b), (b, c)\} \subseteq crit(\mathcal{P})$, alors $a \neq c$. Supposons que $a \not\leq c$. Soit A un autonome non trivial de $\mathcal{P} \vee \{(a, b)\}$. Puisque $c \not\leq a$ et $c \not\leq b$, alors $c \notin A$. Soit $a' \in A - \{a, b\}$. Nous considérons deux cas.

Cas 1 : $a \in A$.

Alors $a' < b$. Puisque $(b, c) \in crit(\mathcal{P})$ et $c \notin A$, alors $a' < c$. Par conséquent, $a < c$ ce qui est en contradiction avec le fait que $(a, c) \in crit(\mathcal{P})$.

Cas 2 : $b \in A$

Dans ce cas on a nécessairement $a < a'$. Soit B un autonome non trivial de $\mathcal{P} \vee \{(b, c)\}$. Comme $a \not\leq b$ et $a \not\leq c$, alors $a \notin B$. Soit $b' \in B - \{b, c\}$. Nous considérons deux cas.

Cas 2.1 : $c \in B$

Alors, $b < b'$. Puisque $a \not\leq b'$, alors $b' \notin A$. Par conséquent, $a < a' < b'$ et $a < c$ ce qui est en contradiction avec le fait que $(a, c) \in crit(\mathcal{P})$.

Cas 2.2 : $b \in B$

Dans ce cas $b' < c$ et $b' \notin A$. Soit C un autonome non trivial de $\mathcal{P} \vee \{(a, c)\}$ et soit $c' \in C - \{a, c\}$. Nous considérons deux cas.

Cas 2.2.1 : $c \in C$

Puisque a est incomparable avec tous les éléments de B , alors $C \cap B = \emptyset$. Puisque $b' < c$, alors $b < c$.

Cas 2.2.2 : $a \in C$

Puisque c est incomparable à tous les éléments de A , alors $C \cap A = \emptyset$. Donc, $c' < a'$. Par conséquent, $c' < b$ ce qui entraîne $a < b$. Nous obtenons une contradiction puisque $a \not\prec b$.

Notre supposition que $a \not\prec c$ est donc fautive. Par conséquent, $a < c$. \square

Lemme 1.7. *Si $(a, b) \in \text{crit}(\mathcal{P})$ et $(c, b) \in \text{crit}(\mathcal{P})$, alors $a = c$ ou a incomparable à c . Si \mathcal{P} est fini et critique, soit A , respectivement C , un autonome non trivial de $\mathcal{P} \vee \{(a, b)\}$, respectivement de $\mathcal{P} \vee \{(c, b)\}$. Alors, $a \in A$, $c \in C$ et $A \cap C = \emptyset$.*

Si \mathcal{P} est un ordre sur V , nous désignons par $\text{Max}(\mathcal{P})$ l'ensemble des éléments de V qui sont maximaux pour l'ordre \mathcal{P} .

Lemme 1.8. *Soit \mathcal{P} un ordre fini et critique. Supposons que $|\text{Max}(\mathcal{P})| \geq 3$ et qu'il existe $a, b \in \text{Max}(\mathcal{P})$ tels que $(a, b) \in \text{crit}(\mathcal{P})$. Si A est autonome non trivial de $\mathcal{P} \vee \{(a, b)\}$, alors $A \cap \text{Max}(A) = \{a\}$ et A est une chaîne à deux éléments. De plus, s'il existe $c \in \text{Max}(P)$ distinct de a et de b tel que $(c, b) \in \text{crit}(P)$, alors \mathcal{P} est isomorphe à \mathcal{W} .*

Pour prouver l'implication (i) \Rightarrow (ii) du Théorème 1.5, on utilisera une *représentation canonique* d'un ordre d'intervalles par une famille d'intervalles \mathcal{J} d'une chaîne C où $C := AM_{\leq}(P)$ l'ensemble des antichaînes maximales de P ordonné en posant pour $A, B \in AM(P)$: $A \leq B$ si pour tout $x \in A$ il existe $y \in B$ tel que $x \leq y$ et $\mathcal{J} := \{C(x) : x \in P\}$ où $C(x) := \{X \in C : x \in X\}$ pour $x \in P$. On montrera que les intervalles de la famille \mathcal{J} ont au plus 3 éléments et que si l'intersection de deux d'entre eux est dans \mathcal{J} , l'un des deux est réduit à un singleton.

Revenons maintenant à la notion d'ordres perpendiculaires mentionnée tout au début de cette note. Une application f de V dans V est un *endomorphisme* de \mathcal{P} si $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$ pour tout $x, y \in V$. Deux ordres sur V sont dits *perpendiculaires* si les applications constantes et l'identité sont les seuls endomorphismes communs à ces deux ordres. L'origine de cette notion, introduite par J. Demetrovics, M. Miyakawa, I.G. Rosenberg, D.A. Simovici et I. Stojmenović [3], vient de la théorie des clones, cadre abstrait pour l'étude des circuits logiques. I. Rival et N. Zaguia [8] ont montré que tout ordre indécomposable de dimension deux admettait un perpendiculaire et conjecturé que en fait tout ordre indécomposable admet un ordre perpendiculaire. Nous avons légèrement étendu leur résultat [9].

Théorème 1.9. *Tout ordre indécomposable qui, augmenté d'une seule comparabilité, donne un ordre indécomposable et de dimension deux, a un perpendiculaire.*

Nous avons proposé l'approche suivante pour la résolution de la conjecture. Partant d'un ordre indécomposable \mathcal{P} sur V , construire une chaîne $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_k$ dans $\mathcal{O}(V)$ de longueur k minimale telle que : $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ sont tous indécomposables, \mathcal{P}_{i+1} est une couverture de \mathcal{P}_i pour tout $i \neq k$, et \mathcal{P}_k est de dimension deux. D'après [8], \mathcal{P}_k admet un perpendiculaire \mathcal{R} . Étendre la preuve du Théorème 1.9 en montrant que \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires. Nous ne pouvons encore rien dire de cette étape.

Remerciements

Je tiens à remercier Maurice Pouzet pour ses commentaires sur une version préliminaire de cette note, particulièrement sur l'extension de la preuve du Théorème 1.5 aux ordres d'intervalles infinis.

Références

- [1] R.A. Brualdi, H.C. Jung, W.T. Trotter, On the poset of all posets on a n elements set, *Discrete Appl. Math.* 50 (1994) 11–123.
- [2] R.A. Dean, G. Keller, Natural partial orders, *Canad. J. Math.* 20 (1968) 535–554.
- [3] J. Demetrovics, M. Miyakawa, I.G. Rosenberg, D.A. Simovici, I. Stojmenović, Intersections of isotone clones on a finite set, in: *Proc. 20th Internat. Symp. Multiple valued Logic*, Charlotte, NC, 1990, pp. 248–253.
- [4] P.C. Fishburn, *Interval Orders and Interval Graphs*, John Wiley & Sons, 1985.
- [5] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in: *Orders, description and roles*, M. Pouzet, D. Richard (Eds.), *Annals of Discrete Mathematics* 23 (1984) 343–358.

- [6] M. Pouzet, I. Rival, Structural arithmetic of the extension lattice of an order, Technical report TR-91-11, University of Ottawa.
- [7] M. Pouzet, K. Reuter, I. Rival, N. Zaguia, A generalized permutahedron, *Algebra Universalis* 34 (1995) 496–509.
- [8] I. Rival, N. Zaguia, Perpendicular orders, *Discrete Math.* 137 (1995) 303–313.
- [9] I. Zaguia, Ordres perpendiculaires, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, Nr. 215-97, 1997.