

Analyse numérique

# Contrôle de l'approximation géométrique d'une interface par une métrique anisotrope

Vincent Ducrot, Pascal Frey

*Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598, Université Pierre et Marie Curie, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*

Reçu le 28 août 2007 ; accepté le 24 septembre 2007

Présenté par Philippe G. Ciarlet

---

## Résumé

Dans cette Note, on présente une méthode pour contrôler l'approximation géométrique d'une variété de codimension 1 correspondant à une isovaleur d'une fonction scalaire  $u$ . On s'appuie sur la construction et l'adaptation d'une triangulation anisotrope à un champ de métrique riemannien tenant compte des propriétés intrinsèques de la variété. Un exemple d'adaptation anisotrope d'une triangulation au voisinage d'une courbe analytique permet de mesurer l'efficacité de cette approche. *Pour citer cet article : V. Ducrot, P. Frey, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Geometric approximation control of interfaces using an anisotropic metric.** In this Note, we propose a general purpose method to control the geometric approximation of a manifold of codimension 1 associated with an isovalue of a scalar function  $u$ . To this end, we rely on the generation and the adaptation of an anisotropic triangulation to a metric tensor field related to the intrinsic properties of the manifold. An example of anisotropic mesh adaptation in the vicinity of an analytical curve is provided to emphasize the efficiency of this approach. *To cite this article: V. Ducrot, P. Frey, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

We consider an implicit function  $u$  defined on a domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), with  $k$ -Lipschitz derivatives ( $k \geq 1$ ) and we denote by  $\Gamma$  the manifold of codimension 1 associated with the isovalue  $u = u_0$ . In this Note, we propose a numerical method for constructing an accurate piecewise linear approximation  $\Gamma_h$  of  $\Gamma$ . Given a triangulation  $\mathcal{T}_h$  of  $\Omega$ , we consider as approximation space of the function  $u$  the space of affine Lagrange finite elements  $\mathbb{P}_1$ . Under these assumptions, Theorem 1.1 provides an upper bound on the approximation error  $\|u - u_h\|$  in terms of the distance between the isovalue  $\Gamma$  and the relevant discretisation  $\Gamma_h$ . In practice, this control can be achieved by defining a suitable metric tensor field (Corollary 2.1) used to adapt the triangulation  $\mathcal{T}_h$ . This tensor field is based on the intrinsic

---

Adresses e-mail : [ducrot@ann.jussieu.fr](mailto:ducrot@ann.jussieu.fr) (V. Ducrot), [frey@ann.jussieu.fr](mailto:frey@ann.jussieu.fr) (P. Frey).

properties of the manifold, i.e., the principal curvatures and directions. Mesh adaptation is based on iterative local modifications [1] in order to generate a unit mesh with respect to this Riemannian metric.

This approach was primarily intended to deal with moving interfaces in multi-domains or multi-fluids simulation using levelsets. The latter proved especially useful for reducing the instabilities as well as to easily handle the topological changes of the interface during the time.

To emphasize the efficiency of this method, we propose a two-dimensional example showing highly anisotropic elements with aspect ratio of order 100 in the vicinity of the pseudo-interface, Fig. 1.

## 0. Introduction

Dans cette Note, on présente une méthode d'approximation géométrique des courbes et des surfaces d'isovaleurs d'une fonction implicite  $u$  suffisamment régulière définie sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). Le contrôle de l'erreur d'approximation permet la construction d'un champ de métriques anisotrope prenant en compte les propriétés intrinsèques de la variété considérée. La majoration obtenue fait intervenir les dérivées d'ordre 1 et 2 de  $u$  et reste valable indépendamment de la dimension. D'un point de vue pratique, la fonction  $u$  est supposée connue de manière discrète aux nœuds d'une triangulation  $T_h$  du domaine  $\Omega$  et on s'intéresse à la discrétisation d'une courbe (surface)  $\Gamma$  d'isovaleur  $u = u_0$  particulière. Le problème revient ainsi à contrôler l'écart entre une approximation affine par morceaux  $\Gamma_h$  de cette isovaleur et  $\Gamma$ . Ceci est possible en définissant un champ de métriques discret qui sert à adapter la triangulation  $T_h$  au voisinage de  $\Gamma$  et permet ainsi de garantir la précision de la reconstruction  $\Gamma_h$ .

On propose d'appliquer cette approche dans les simulations numériques multi-domaines ou multi-fluides au problème du suivi d'interfaces par des méthodes de lignes de niveaux [3]. Celles-ci présentent l'avantage de réduire significativement les instabilités et de gérer de manière naturelle les changements de topologie de ces interfaces au cours du temps. Les techniques désormais classiques d'adaptation de maillage sont basées sur des opérations de modifications locales de la connectivité et de la cardinalité du maillage.

La majoration de l'erreur d'approximation dans une triangulation non structurée quelconque est introduite Section 1. La définition du champ de métriques anisotrope discret utilisé pour adapter la triangulation est donnée Section 2. Enfin, Section 3, un exemple d'adaptation à une ligne d'isovaleur en dimension deux est proposé pour illustrer l'efficacité de cette approche.

## 1. Erreur d'approximation géométrique

Soit  $u$  une fonction implicite définie sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  dont  $Du$  existe et a ses dérivées  $k$ -lipschitz ( $k \geq 1$ ) sur un ouvert ou en d'autres termes que

$$\|Du\| = n \quad \text{avec } n > 0 \in (\mathcal{C}^1 \cup \mathcal{W}^{2,\infty}) \quad (1)$$

et on désigne par  $\Gamma$  la variété de codimension 1 associée à l'isovaleur  $u = u_0$ . En pratique, la régularité de  $u$  est souhaitée uniquement dans un voisinage  $\mathcal{V}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d, d(x, \Gamma) < \varepsilon\}$  de taille  $\varepsilon$  autour de  $\Gamma$ . On s'attache ici à contrôler l'approximation affine par morceaux  $\Gamma_h$  de  $\Gamma$ . Étant donné une triangulation  $T_h$  de  $\Omega$ , on choisit comme espace d'approximation de la fonction  $u$  l'espace des éléments finis affines de Lagrange  $\mathbb{P}_1$  qui permet d'écrire l'approximation  $u_h$  de  $u$  sous la forme :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{np} u_j \phi_j(x), \quad \forall x \in \Omega$$

où  $np$  désigne le nombre de sommets de  $T_h$ , les  $\phi_j$  sont les fonctions de base affines de Lagrange et  $u_j = u(x_j)$  représente la valeur de  $u$  au sommet  $x_j \in T_h$ . Une première estimation en découle.

**Théorème 1.1.** *Sous ces hypothèses, si on désigne par  $\mathcal{E} = \{K \in T_h, K \cap \Gamma \neq \emptyset\}$  et en remarquant que :*

$$\forall x \in \Gamma_h, \exists y \in \Gamma, \quad \|x - y\| \leq \frac{1}{\min_{p \in \mathcal{E}} |Du(p)|} \left| \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j ({}^t(x - x_j)(D^2u(x_j) - D^2u(x))(x - x_j)) \right|$$

où  $\lambda_j$  désigne la coordonnée barycentrique du point  $x$  associée au sommet  $x_j$  de  $K$ , il est possible de majorer la distance de  $\Gamma_h$  à  $\Gamma$  par :

$$\forall x \in \Gamma_h, \quad d(x, \Gamma) \leq \frac{1}{\min_{p \in \mathcal{E}} |Du(p)|} \left| \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j ({}^t(x - x_j)(D^2u(x_j) - D^2u(x))(x - x_j)) \right|. \tag{2}$$

Sans perte de généralité et pour simplifier l'écriture, on peut considérer désormais l'isovaleur  $u = 0$  comme l'isovaleur  $\Gamma$  à laquelle on s'intéresse. La démonstration de ce résultat implique un développement en série de Taylor avec reste intégral dans un simplexe  $K = \{x_j\}_{j=1, d+1}$  contenant un point  $x$  quelconque de  $\Gamma_h$  :

$$u(x) = u(x_j) + \langle Du(x_j), (x - x_j) \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle (x - x_j), D^2u(x_j + t(x - x_j))(x - x_j) \rangle dt$$

d'où en introduisant les coordonnées barycentriques  $\lambda_j$  de  $x$  dans  $K$  et en remarquant que  $\sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j u(x_j) = 0$  :

$$\forall x \in \Gamma_h, \quad u(x) = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j \left( \langle Du(x_j), (x - x_j) \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle (x - x_j), D^2u(x_j + t(x - x_j))(x - x_j) \rangle dt \right).$$

En procédant de même pour  $Du$ , on peut écrire :

$$\forall x \in \Gamma_h, \quad Du(x_j) = Du(x) + \int_0^1 (1-t) D^2u(x + t(x_j - x))(x_j - x) dt$$

ce qui permet d'obtenir l'égalité,  $\forall x \in \Gamma_h$  :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j \left( \int_0^1 (1-t) \langle (x - x_j), D^2u(x_j + t(x - x_j))(x - x_j) \rangle + \langle (x - x_j), D^2u(x + t(x_j - x))(x_j - x) \rangle dt \right)$$

et donc,  $\forall x \in \Gamma_h$  :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j \left( \int_0^1 (1-t) \langle (x - x_j), (D^2u(x_j + t(x - x_j)) - D^2u(x + t(x_j - x)))(x - x_j) \rangle dt \right).$$

Par récurrence, on établit la relation suivante pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j \left( \int_0^{1/2^n} 2^n t \left\langle (x - x_j), \left( D^2u \left( \frac{(2^n - 1)x_j + x}{2^n} + t(x - x_j) \right) - D^2u \left( \frac{(2^n - 1)x + x_j}{2^n} - t(x - x_j) \right) \right) (x - x_j) \right\rangle dt \right)$$

qui permet en passant à la limite d'obtenir l'égalité suivante :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j \langle (x - x_j), (D^2u(x_j) - D^2u(x))(x - x_j) \rangle. \tag{3}$$

Si on définit la ligne intégrale  $\gamma(s)$  passant par un point  $x \in \Gamma_h$  et issue d'un point  $y \in \Gamma$ ,

$$\frac{d}{ds} \gamma(s) = Du(\gamma(s)), \quad \text{donc } u(x) = \int \gamma(s) ds$$

on peut déduire la majoration :

$$\min_{\gamma(s)} |Du| \|x - y\| < |u(x)|.$$

En combinant alors cette relation à l'équation (3), on obtient aisément la relation (2).

## 2. Contrôle de l'approximation géométrique par une métrique anisotrope

Dans nombre de problèmes où les interfaces jouent un rôle prépondérant, celles-ci sont modélisées par une ligne d'isovaleur d'une fonction  $u$ , généralement  $u = 0$ . En pratique, la fonction  $u$  considérée est souvent une fonction distance signée [2], c'est-à-dire une fonction solution de l'équation (1) pour  $n = 1$ . Pour simplifier encore, on se place maintenant en dimension 2 et on considère que pour tout triangle  $K \in \mathcal{T}_h$  seuls trois cas sont possibles :

- (i)  $K \cap \Gamma = \emptyset$ ,
- (ii)  $K \cap \Gamma$  est une arête ou un sommet de  $K$ ,
- (iii)  $\Gamma$  intersecte deux arêtes de  $K$  en deux points distincts.

On peut alors réécrire la relation (2) comme :

$$\forall x \in \Gamma_h, \quad d(x, \Gamma) \leq \sum_{j=1,3} \lambda_j \left( (x - x_j) \cdot Du^\perp(x_j) \right)^2 \Delta u(x_j) - \left( (x - x_j) \cdot Du^\perp(x) \right)^2 \Delta u(x)$$

car, en développant le terme  $D\|Du\|^2$ , on peut montrer aisément que la matrice hessienne de  $u$  se décompose sous la forme :

$$D^2u = R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta u \end{pmatrix} R^t \quad \text{avec } R = (Du \ Du^\perp).$$

Or, en tout point régulier de  $\Omega$ , le terme  $Du$  (resp.  $\Delta u$ ) correspond à la normale (resp. courbure) à l'isoligne passant par ce point. On suppose qu'il n'existe aucun point singulier  $p \in \mathcal{V}_\varepsilon$  et on désigne alors par  $P_\Gamma u(x_j)$  les projetés des sommets  $x_j$  de  $K$  sur  $\Gamma$  selon la normale. Soit  $\Gamma_0$  la restriction de  $\Gamma$  contenant les  $P_\Gamma u(x_j)$  de longueur minimale. On introduit  $\kappa_1 = \max_{\Gamma_0} \kappa$  et  $\kappa_2 = \min_{\Gamma_0} \kappa$  où  $\kappa$  désigne la courbure locale en tout point de  $\Gamma_0$  et on peut alors voir que :

$$\frac{\kappa_2}{1 + \kappa_2|u|} \leq \Delta u \leq \frac{\kappa_1}{1 - \kappa_1|u|}$$

et par conséquent que :

$$\forall x \in \Gamma_h, \quad d(x, \Gamma) \leq \sum_{j=1,3} \lambda_j \left( (x - x_j) \cdot Du^\perp(x_j) \right)^2 \frac{\kappa_1}{1 - \kappa_1|u|} - \left( (x - x_j) \cdot Du^\perp(x) \right)^2 \frac{\kappa_2}{1 + \kappa_2|u|}.$$

Classiquement, dans le cas d'une triangulation anisotrope si on note les directions d'élongations maximale  $h_x$  et minimale  $h_y$ , les tailles de mailles optimales sont telles que :

$$\left( \frac{h_y}{h_x} \right)^2 \approx \frac{\|\partial_{xx}^2 u\|}{\|\partial_{yy}^2 u\|}.$$

Par analogie, on en déduit une seconde estimation :

**Corollaire 2.1.** Soit  $(p, Du(p)^\perp, Du(p))$  le repère de Frénet de l'isovaleur de  $u$  associée au point  $p$ , on note  $h_x = \max_{j=1,3} \max_{p \in K} |(p - x_j) \cdot Du^\perp(p)|$  et  $h_y = \max_{j=1,3} \max_{p \in K} |(p - x_j) \cdot Du(p)|$ . On obtient alors des majorations similaires à celle du Théorème 1.1 :

$$\forall p \in K, \quad |u(p)| < h_y, \quad \text{et} \quad \forall x \in \Gamma_h, \quad d(x, \Gamma) < \frac{h_x^2((\kappa_1 - \kappa_2) + h_y \kappa_1^2)}{1 - (\kappa_2 - \kappa_1)|u| + \kappa_1 \kappa_2 |u|^2} < h_x^2((\kappa_1 - \kappa_2) + h_y \kappa_1^2). \quad (4)$$

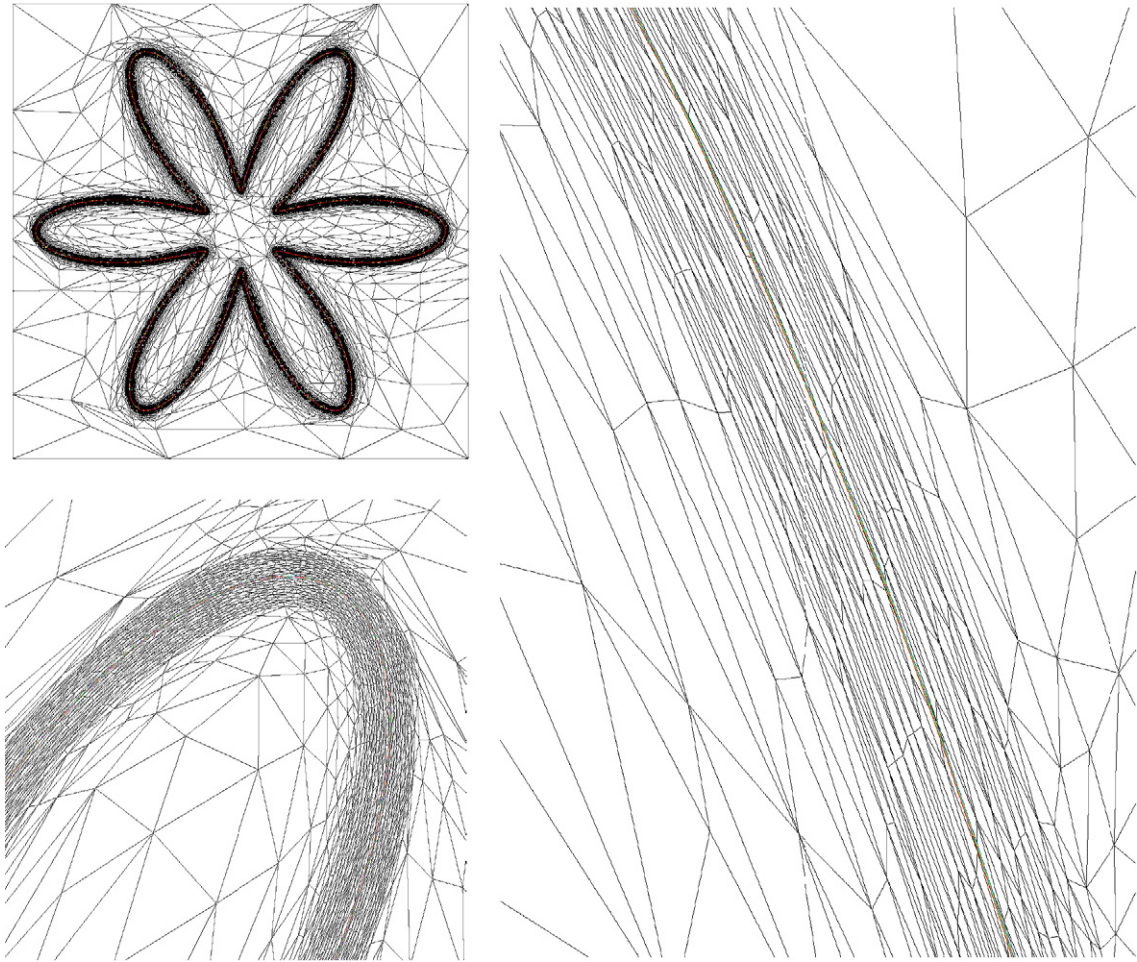


Fig. 1. Un exemple de contrôle anisotrope d'une triangulation au voisinage d'une interface définie par une courbe paramétrée et agrandissement partiel à proximité de celle-ci.

Fig. 1. An example of anisotropic control of a triangulation in the vicinity of an interface defined using a parametric curve and local enlargement close to the curve.

Il n'est pas inutile de rappeler ici le problème auquel on s'intéresse. Etant donnée une triangulation  $T_h$  d'un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ , on cherche à construire une triangulation  $T'_h$  pour laquelle l'erreur d'approximation affine au sens des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  de l'isovaleur  $u = 0$  d'une fonction  $u$  suffisamment régulière est contrôlée. La majoration (4) qui fait intervenir les courbures locales en tout sommet de  $T_h$ , permet alors de définir un tenseur de métrique discret en ces sommets. En effet, il suffit de considérer la matrice symétrique définie positive suivante :

$$\mathcal{M} = R \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & \frac{|\Delta u|}{\varepsilon} \end{pmatrix} R^t \quad \text{avec } R = (Du \ Du^\perp)$$

aux sommets des éléments intersectant l'isovaleur  $u = 0$  et la matrice  $\lambda I_2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , aux autres sommets de  $T_h$  pour garantir que  $\forall x \in \Gamma_h, d(x, \Gamma) < \varepsilon(1 - \kappa_2/\kappa_1) + \varepsilon^2\kappa_1$ .

La triangulation  $T'_h$  cherchée est telle que la mesure des longueurs d'arêtes dans la métrique  $\mathcal{M}$  est proche de 1 (notion de triangulation unité, cf. [1]). Celle-ci est obtenue au moyen d'opérateurs classiques de modification de la topologie et de la géométrie de maillage.

### 3. Exemple de contrôle géométrique

La Fig. 1 présente un exemple de triangulation anisotrope au voisinage d'une interface correspondant à la courbe paramétrée définie sur  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  par :

$$\begin{cases} x(t) = 0.5 + \cos(t)(0.27 + 0.18 \cos(6t)), \\ y(t) = 0.5 + \sin(t)(0.27 + 0.18 \cos(6t)). \end{cases}$$

La triangulation  $\mathcal{T}_h$  obtenue correspond à un pas de maille de l'ordre de  $10^{-3}$  et comporte 11 916 sommets. L'erreur mesurée en norme infinie entre la courbe et sa discrétisation affine par morceaux est de  $1.7 \times 10^{-4}$  pour un écart théorique inférieur à  $5 \times 10^{-4}$ . A titre de comparaison, une triangulation uniforme pour une précision équivalente comporterait de l'ordre de  $10^6$  sommets.

### Références

- [1] P. Frey, P.L. George, Maillages. Application aux éléments finis, Hermes Science, 1999.
- [2] S. Osher, J.A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations, J. Comp. Phys. 79 (1988) 12–49.
- [3] X. Yang, et al., An adaptive coupled level-set/volume-of-fluid interface capturing method for unstructured triangular grids, J. Comp. Phys. 217 (2006) 364–394.