Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 245–248
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Le critère de positivité de Li pour la classe de Selberg

Sami Omar [a], Kamel Mazhouda [b]

[a] *Faculté des sciences de Tunis, département de mathématiques, 2092 campus universitaire El Manar, Tunis 2092, Tunisie*
[b] *Faculté des sciences de Monastir, département de mathématiques, Monastir 5000, Tunisie*

Reçu le 17 juin 2006 ; accepté après révision le 17 juillet 2007

Disponible sur Internet le 21 août 2007

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Considérons la fonction zêta de Riemann complétée $\xi(s) = s(s-1)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ et les coefficients de Li associés $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ définis par

$$\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\left[s^{n-1}\log\xi(s)\right]_{s=1}.$$

Le critère de Li dit que l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si les nombres λ_n sont tous positifs.

Dans cette Note, on généralise le critère de Li à une fonction F de la classe de Selberg, et on obtient une formule explicite pour les coefficients de Li associés à F. ***Pour citer cet article : S. Omar, K. Mazhouda, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

The Li positivity criterion for the Selberg class. Let us consider the xi-function $\xi(s) = s(s-1)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ and the Li coefficients $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ defined by

$$\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\left[s^{n-1}\log\xi(s)\right]_{s=1}.$$

Then, the Li criterion says that the Riemann Hypothesis holds if and only if the coefficients (λ_n) are positive numbers.

In this Note, we generalise the Li criterion for a function F in the Selberg class. Then, we obtain an explicit formula for the Li coefficients associated to F. ***To cite this article: S. Omar, K. Mazhouda, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

1. Introduction et notations

En 1997, X.-J. Li [6] montre que l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si la suite $\lambda_n = \sum[1-(1-\frac{1}{\rho})^n] > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où la somme est prise sur les zéros complexes de la fonction zêta de Riemann. En 1999, E. Bombieri et J. Lagarias [1] généralisent ce résultat en donnant une interprétation arithmétique des nombres λ_n via les formules explicites de Weil. Ils obtiennent ainsi un théorème remarquable sur la localisation des zéros. En

Adresses e-mail : sami.omar@fst.rnu.tn (S. Omar), kamel.mazhouda@fsm.rnu.tn (K. Mazhouda).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.07.008

2004, X.-J. Li [7,8] étend la formule arithmétique de λ_n aux fonctions L de Dirichlet et aux séries L des courbes elliptiques via les formules explicites de Weil. Plus récemment dans [5], J.C. Lagarias donne une expression explicite des coefficients de Li pour les fonctions L de formes automorphes.

Commençons par rappeler la définition de la classe de Selberg introduite en 1989 dans [9] et qui est conjecturalement l'ensemble des fonctions L de formes automorphes. Les propriétés basiques de la classe S peuvent être consultées dans les articles de Conrey–Ghosh [2] et de Kaczorowski–Perelli [4]. De manière analogue à la fonction zêta de Riemann, on conjecture l'Hypothèse de Riemann Généralisée (H R G) à savoir que tous les zéros non-triviaux de F sont situés sur la droite de partie réelle $\frac{1}{2}$. Rappelons que la classe de Selberg S est définie par les axiomes suivants :

(i) (Séries de Dirichlet). Toute fonction F de S est une série de Dirichlet $F(s)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_F(n)n^{-s}$ absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s)=\sigma>1$.
(ii) (Prolongement analytique). Il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $(s-1)^m F(s)$ soit une fonction entière d'ordre fini.
(iii) (Equation fonctionnelle). Toute fonction $F \in S$ satisfait une équation fonctionnelle de type :

$$\phi(s)=\omega\bar{\phi}(1-s),$$

où

$$\phi(s)=Q_F^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s+\mu_j)F(s),$$

avec $Q_F>0$, $\lambda_j>0$, $\mathrm{Re}\,\mu_j \geqslant 0$ et $|\omega|=1$. En particulier, on a $\bar{\phi}(s)=\overline{\phi(\bar{s})}$.
(iv) (Hypothèse de Ramanujan). Pour tout $\epsilon>0$, $a_F(n) \ll n^{\epsilon}$.
(v) (Produit d'Euler). Toute fonction $F \in S$ satisfait

$$\log F(s)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_F(n)n^{-s}, \quad \mathrm{Re}(s)>1,$$

où $b_F(n)=0$ si $n \neq p^m$, $m \geqslant 1$ et $b_F(n) \ll n^{\theta}$ pour un certain $\theta<1/2$.

Dans ce qui suit, on utilisera les notations suivantes : $d_F=2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j$ est le degré de $F(s)$, $m_F \geqslant 0$ est l'ordre polaire en $s=1$ et

$$-\frac{F'}{F}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda_F(n)n^{-s}, \quad \Lambda_F(n)=b_F(n)\log n,\ \mathrm{Re}(s)>1.$$

Dans cette Note, on généralise le critère de Li à une fonction F de la classe de Selberg S. Ensuite, on établit une formule explicite des coefficients de Li définis par

$$\lambda_F(n)=\sum_{\rho}\left[1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right],$$

où la somme est prise sur tous les zéros non-triviaux ρ de $F(s)$.

2. Le critère de Li généralisé

En 1999, Bombieri et Lagarias obtiennent le théorème remarquable suivant :

Théorème 2.1. *(Bombieri–Lagarias [1]) Soit $\mathfrak{R}$ un ensemble de nombres complexes ρ de multiplicité un entier positif et tel que $1 \notin \mathfrak{R}$ et $\sum_{\rho} \frac{1+|\mathrm{Re}(\rho)|}{(1+|\rho|)^2}<\infty$, alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) $\mathrm{Re}\,\rho \leqslant \frac{1}{2}$ *pour tout* $\rho \in \mathfrak{R}$.
(2) $\sum_{\rho} \mathrm{Re}[1-(1-\frac{1}{\rho})^{-n}] \geqslant 0$ *pour* $n=1,2,\ldots$.

Soit F une fonction de la classe de Selberg S. Considérons la fonction complétée de F

$$\xi_F(s) = s^{m_F}(s-1)^{m_F}\phi(s). \tag{1}$$

La fonction $\xi_F(s)$ est entière et vérifie l'équation fonctionnelle $\xi_F(s) = \omega\overline{\xi_F}(1-s)$, où ω est une constante de valeur absolue 1. De plus, par la formule de Stirling, la fonction $\xi_F(s)$ est d'ordre 1. Elle s'écrit donc sous la forme du produit de Hadamard suivant

$$\xi_F(s) = \xi_F(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right), \tag{2}$$

où le produit est pris sur tous les zéros non-triviaux ρ de $F(s)$.

Grâce au théorème 2.1 de Bombieri et Lagarias, on peut énoncer le critère suivant de localisation des zéros non triviaux d'une fonction de la classe de Selberg S :

Corollaire 2.2. *Soit F une fonction vérifiant les propriétés* (i), (ii) *et* (iii). *Tous les zéros non-triviaux de F sont situés sur la ligne* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, *si et seulement si* , $\lambda_F(n) \geqslant 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve du Corollaire 2.2. La fonction $\xi_F\overline{\xi_F}$ est entière, d'ordre 1. Elle ne s'annule pas en $s = 1$ et reste invariante par la transformation $s \mapsto 1-s$. De plus, $\lambda_F(n) = \lambda_F(-n)$, pour tout entier $n \geqslant 1$. En appliquant le Théorème 2.1 aux ensembles $\mathfrak{R}$ et $1-\mathfrak{R}$, où $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des zéros de ξ_F (i.e, les zéros non-triviaux de F), on déduit le Corollaire 2.2.

Le théorème suivant donne une expression explicite des coefficients $\lambda_F(n)$:

Théorème 2.3. *Soit $F(s)$ une fonction de la classe de Selberg S. Alors on a*

$$\begin{aligned}\lambda_F(n) &= m_F + n\left(\log Q_F - \frac{d_F}{2}\gamma\right) - \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}\frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\lim_{X\to+\infty}\left\{\sum_{k\leqslant X}\frac{\Lambda_F(k)}{k}(\log k)^{l-1} - \frac{m_F}{l}(\log X)^l\right\}\\ &\quad + n\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\left(-\frac{1}{\lambda_j+\mu_j} + \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\lambda_j+\mu_j}{l(l+\lambda_j+\mu_j)}\right) - \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda_j)^k\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{l+\lambda_j+\mu_j}\right)^k.\end{aligned} \tag{3}$$

Preuve du Théorème 2.3. À partir de l'égalité (2), on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\xi_F\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\frac{1}{(z-1)^2}\frac{\xi_F'}{\xi_F}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_F(n+1)z^n. \tag{4}$$

Ecrivons

$$\frac{\xi_F'}{\xi_F}(s+1) = \frac{F'}{F}(s+1) + \frac{m_F}{s} + \frac{m_F}{s+1} + \left(\log Q_F + \sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\lambda_j s + \lambda_j + \mu_j)\right). \tag{5}$$

En appliquant le théorème 1 d'Ivić [3] (avec $f(s) = -\frac{F'}{F}(s)$, $A(x) = \psi_F(x) = \sum_{n\leqslant x}\Lambda_F(n) = \sum_{n\leqslant x}b_F(n)\log n$ et $u(x) = m_F x - \psi_F(x)$), on obtient

$$-\frac{F'}{F}(s+1) - \frac{m_F}{s} = \sum_{k=0}^{+\infty}\eta_F(k)s^k, \tag{6}$$

où $\eta_F(k)$ sont les constantes de Stieltjes généralisées pour la fonction F définies par

$$\eta_F(k) = \frac{(-1)^k}{k!}\lim_{X\longrightarrow+\infty}\left\{\sum_{n\leqslant X}\frac{\Lambda_F(n)}{n}(\log n)^k - \frac{m_F}{k+1}(\log X)^{k+1}\right\}. \tag{7}$$

On introduit les coefficients $\tau_F(k)$ comme suit

$$\log Q_F + \sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\lambda_j s + \lambda_j + \mu_j) = \sum_{k=0}^{+\infty}\tau_F(k)s^k. \tag{8}$$

En posant $s+1=\frac{1}{1-z}$ dans (4) et en utilisant les équations (5), (6) et (8), on trouve l'expression

$$\lambda_F(n)=m_F-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\eta_F(k-1)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\tau_F(k-1),\quad \forall n\geqslant 1. \tag{9}$$

On a

$$\tau_F(0)=\log Q_F+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\psi(\lambda_j+\mu_j)=\log Q_F-\frac{d_F}{2}\gamma+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\left(-\frac{1}{\lambda_j+\mu_j}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\lambda_j+\mu_j}{l(l+\lambda_j+\mu_j)}\right),$$

où γ est la constante d'Euler et $\psi=\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est la fonction digamma.

En rappelant la formule

$$\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{z}{l(l+z)},$$

on déduit que pour tout $k\geqslant 1$, on a

$$\tau_F(k)=\sum_{j=1}^{r}(-\lambda_j)^{k+1}\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{l+\lambda_j+\mu_j}\right)^{k+1}. \tag{10}$$

Finalement, en utilisant les équations (9), (7) et (10), on trouve la formule de $\lambda_F(n)$ donnée par (3).

Remarque. Dans le cas de la fonction zêta Riemann, on a $m_\zeta=1,\ Q_\zeta=\pi^{-1/2},\ r=1,\ \lambda_1=1/2$ et $\mu_1=0$. Grâce à l'égalité

$$(-1)^k\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2l+1}\right)^k=(-1)^k\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\zeta(k),$$

on retrouve l'expression λ_ζ établit par Bombieri et Lagarias dans l'article [1] page 282. Dans le cas des fonctions L de Hecke, on a $Q_F=\frac{\sqrt{N}}{2\pi},\ m_F=0,\ \lambda_1=1$ et $\mu_1=\frac{1}{2}$. Dans ce dernier cas, on retrouve l'expression des coefficients de Li établit par X.-J. Li dans son article [7] page 496.

Références

[1] E. Bombieri, J.C. Lagarias, Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis, J. Number Theory 77 (2) (1999) 274–287.
[2] B. Conrey, A. Ghosh, On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees, Duke Math. J. 72 (3) (1993) 673–693.
[3] A. Ivić, On the Laurent coefficients of certain Dirichlet series, Publ. Inst. Math. (Beograd) 53 (67) (1993) 23–36.
[4] J. Kaczorowski, A. Perelli, On the Selberg class: Survey, Acta Math. 182 (1999) 953–992.
[5] J.C. Lagarias, Li coefficients for automorphic L-functions, Ann. Inst. Fourier 56 (2006) 1–52.
[6] X.-J. Li, The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis, J. Number Theory 65 (2) (1997) 325–333.
[7] X.-J. Li, Explicit formulas for Dirichlet and Hecke L-functions, Illinois J. Math. 48 (2) (2004) 491–503.
[8] X.-J. Li, An explicit formula for Hecke L-functions, arXiv: math.NT/0403119v1.
[9] A. Selberg, Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, in: Collected Papers, vol. II, Springer-Verlag, 1991, pp. 47–63.