Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 59–61
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Logique

Bi-interprétabilité et structures QFA : étude de groupes résolubles et des anneaux commutatifs

Anatole Khelif

Équipe de logique mathématique, université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

Reçu le 7 janvier 2007 ; accepté après révision le 29 mai 2007

Disponible sur Internet le 12 juillet 2007

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Une structure S de type fini est dite QFA (pour quasi finiment axiomatisable, voir [A. Nies, Separating classes of groups by first order sentences, Internat. J. Algebra Comput. 13 (2003) 287–302]) s'il existe un énoncé du premier ordre satisfait par *S* telle que toute structure de type fini qui la satisfait est isomorphe à *S*. Nous montrons que toute structure bi-interprétable avec l'anneau des entiers est QFA et première. Nous appliquons ce résultat d'une part à certains groupes métabéliens et d'autre part aux anneaux commutatifs. ***Pour citer cet article : A. Khelif, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Bi-interpretability and QFA structures: study of some soluble groups and commutative rings. A finitely generated structure is said to be QFA (for quasi-finitely axiomatizable, see [A. Nies, Separating classes of groups by first order sentences, Internat. J. Algebra Comput. 13 (2003) 287–302]) if there exists a first order sentence satisfied by S such that every finitely generated structure satisfying it is isomorphic to *S*. We prove that every structure which is bi-interprétable with the ring of integers is QFA and prime. We apply this result on the one hand to some metabelian groups and on the other, to commutative rings. ***To cite this article: A. Khelif, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Nous dirons deux structures V et W sont bi-interprétables au sens de Ahlbrandt-Ziegler, s'il y a une interprétation de V dans W et une autre de W dans V telles que leur composition donne une interprétation de V dans elle-même et de W dans elle-même. Pour une définition plus précise voir [2] (cf. p. 222). Une structure est dite première si elle se plonge élémentairement dans tout modèle de sa théorie. Nous montrons que toute structure bi-interprétable avec l'anneau des entiers est QFA et première.

Récemment Nies [4] a démontré que le groupe défini par générateurs et relations $\langle a, b : b^{-1}ab = a_n \rangle$ et que le produit en couronne de Z/pZ par Z sont QFA. La bi-interprétabilité au sens de Ahlbrandt–Ziegler (avec paramètres) telle qu'exposée dans [2] (cf. p.222) nous donne une autre preuve de ces deux résultats et permet de montrer que ces

Adresse e-mail : khelif@logique.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.06.003

deux groupes sont également premiers. L'existence de groupes QFA non premiers est toujours non démontrée. Nous donnerons dans cette note un exemple, le premier à notre connaissance, d'une structure qui est QFA et non première.

Par cette méthode, montrons aussi qu'un groupe métabélien libre de type fini est QFA et premier. Nous généralisons un résultat d'Oger [5] qui dit que sous certaines conditions le produit semi-direct d'un groupe abélien de type fini sans torsion et d'un groupe cyclique est QFA et premier. Dans le cas des anneaux nous obtenons le résultat suivant : un anneau commutatif de type fini est QFA dans la classe des anneaux noethériens, ce qui signifie qu'il existe un énoncé dont il est à isomorphisme près l'unique modèle noethérien, et premier. En particulier un anneau commutatif de type fini est QFA (au sens ordinaire).

Un article de synthèse sur les groupes QFA et questions annexes [4] permettra au lecteur d'avoir une vue plus complète du sujet.

Commençons par un lemme :

Lemme 1. *Soit G un groupe de type fini. Si G et $(Z,+,\times)$ sont bi-interprétables, alors G est QFA et premier.*

Comme $(N,+,.)$ et $(Z,+,\times)$ sont bi-interprétables c'est équivalent avec la bi-interprétabilité avec $(N,+,.)$.

Les preuves des Théorèmes 2, 3, 4 et 5 consistent à montrer que toutes ces structures sont bi-interprétables avec $(Z,+,.)$.

Théorème 2. *Un groupe métabélien libre de type fini est QFA et premier.*

La preuve considère le sous-groupe dérivé comme un module de type fini sur un anneau de polynômes.

Le Théorème 2 améliore un résultat de [6] qui affirme que tout groupe de type fini élémentairement équivalent à un groupe métabélien libre de type fini lui est isomorphe.

Théorème 3. *Soit k un entier naturel strictement positif, soit G le groupe défini par les générateurs a et b et la relation $[a,b]=b^k$. Le groupe G est QFA et premier.*

On utilise la bi-interprétabilité de ce groupe avec l'anneau des entiers, en utilisant une variante naturelle du Lemme 1.

Théorème 4. *Soit n un entier, le produit en couronne de Z/nZ par Z est QFA et premier.*

On montre d'abord le résultat pour n premier. Dans ce cas la preuve de la bi-interprétabilité est ardue. Des arguments plus simples permettent alors d'en déduire que pour tout entier n, le produit en couronne de Z/nZ par Z est bi-interprétable avec $(N,+,\times)$.

Dans [5], Oger démontre le résultat suivant : le produit semi-direct d'un groupe abélien de type fini sans torsion et d'un groupe cyclique est QFA et premier si le polynôme caractéristique d'un générateur du groupe cyclique est irréductible et que ses racines sont toutes de module différent de 1.

Le Théorème 5 qui suit généralise ce résultat :

Théorème 5. *Le produit semi-direct d'un groupe abélien de type fini sans torsion et d'un groupe cyclique est QFA et premier si le polynôme caractéristique d'un générateur du groupe cyclique est irréductible et que ce générateur n'est pas une racine de l'unité* (*le générateur du groupe cyclique en opérant par conjugaison sur le groupe sans torsion induit un endomorphisme de Z-module libre de type fini et donc de Q-espace vectoriel de type fini*).

Le Théorème 6 qui suit montre que la condition de bi-interprétabilité n'est pas nécessaire pour obtenir une structure QFA et première. Un résultat d'André Nies (cf. [3] Section 5) indique que $UT_3(Z)$ est QFA et premier :

Théorème 6. *L'anneau Z et le groupe $UT_3(Z)$ ne sont pas bi-interprétables.*

Cela répond dans un cas particulier à une question de Belegradek [1] à savoir : si A est un anneau, A et le groupe $UT_3(A)$ sont-ils bi-interprétables ?

On utilise le fait qu'il existe « beaucoup » d'automorphismes de $UT_3(Z)$ fixant son centre.

Le Théorème 7 qui suit répond à la question de savoir s'il y a des structures QFA et non premières. La question est toujours ouverte pour les groupes sans structure additionnelle.

Théorème 7. *La structure* $(Z[1/2], +, \leqslant, x \to x/2)$ *est QFA mais pas première.*

L'ordre impose au groupe d'être sans torsion. L'ordre de $Z[1/2]$ est alors un ordre dense. La limite inductive des $1/a_n Z[1/2]$ où a_n est le produit des n premiers nombres premiers est un modèle de la théorie de $(Z[1/2], +, \leqslant, x \to x/2)$ dans lequel $(Z[1/2], +, \leqslant, x \to x/2)$ ne se plonge pas élémentairement.

Remarque. En considérant la structure $(Z[1/2], +, \sup, \inf, x \to x/2)$, on obtient une structure QFA et non première pour un langage fini fonctionnel. La question de savoir si un groupe sans structure additionnelle peut être QFA et non premier est toujours ouverte.

Théorème 8. *Un anneau commutatif de type fini est premier et QFA dans la classe des anneaux noethériens.*

La preuve utilise un résultat de Scanlon [7] qui dit qu'un corps commutatif de type fini est bi-interprétable avec l'anneau des entiers. Pour un anneau commutatif intègre de type fini, on montre cette bi-interprétabilité via le corps des fractions. Cela permet par des arguments d'algèbre commutative de montrer que tout anneau commutatif de type fini est QFA et premier bien qu'on ne sache pas s'il existe des anneaux commutatifs de type fini infinis non bi-interprétables avec l'anneau des entiers. Nous ignorons s'il existe une interprétation uniforme de N dans la classe des anneaux commutatifs de type fini comme pour les corps.

Références

[1] O.V. Belegradek, Model theory of unitriangular groups, in: Amer. Math. Soc. Transl., vol. 195, 1999, pp. 1–116.
[2] W. Hodges, Model Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1993.
[3] A. Nies, Separating classes of groups by first order sentences, Internat. J. Algebra Comput. 13 (2003) 287–302.
[4] A. Nies, Describing groups, Bull. Symb. Logic, à paraître.
[5] F. Oger, Some new examples of quasi-finitely axiomatizable groups which are prime models, Preprint.
[6] N.S. Romanovskii, E.I. Timoshenko, On some elementary properties of soluble groups of derived length 2, Sib. Math. J. 44 (2) (2003) 350–354.
[7] T. Scanlon, Infinite finitely generated fields are biinterpretable with **N**, Preprint.