Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 477–481
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique/Probabilités

# Sur le caractère borné de la cellule de Crofton des mosaïques de géodésiques dans le plan hyperbolique

Sylvain Porret-Blanc

*Unité de mathématiques pures et appliquées, École normale supérieure de Lyon, CNRS UMR 5669, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France*

Reçu le 13 février 2007 ; accepté le 20 février 2007

Disponible sur Internet le 3 avril 2007

Présenté par Jean-Pierre Kahane

**Résumé**

Soit $C_0(\lambda)$ la cellule de Crofton associée à un processus poissonnien stationnaire de géodésiques du plan hyperbolique d'intensité $\lambda$. En étudiant le caractère borné de la cellule de Crofton sous la forme d'un problème de recouvrement du cercle par des arcs aléatoires, nous trouvons que la condition nécessaire et suffisante pour que $C_0(\lambda)$ soit bornée presque-sûrement est que $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$. Nous obtenons de plus d'après des résultats dûs à Stevens, Siegel et Holst et déjà utilisés par Calka dans la cas euclidien, la loi du plus petit rayon du disque centré en 0 et contenant $C_0(\lambda)$ (pour $\lambda > \frac{1}{2}$). ***Pour citer cet article : S. Porret-Blanc, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***



**Abstract**

**Boundedness of Crofton's cell for the homogeneous Poisson process of geodesics in the hyperbolic plane.** Denote by $C_0(\lambda)$ the Crofton cell of an homogeneous Poisson process of geodesics in the hyperbolic plane with intensity $\lambda > 0$. In this Note, we derive from covering properties of the circle by random arcs, that the Crofton cell $C_0(\lambda)$ is almost-surely bounded if and only if $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$. Moreover, some results due to Stevens, Siegel and Holst, which have been already used by Calka in the Euclidean case, allow us to estimate the law of the radius of the smallest disc centered at origin containing $C_0(\lambda)$. ***To cite this article: S. Porret-Blanc, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***



## Abridged English version

Consider a homogeneous Poisson process of geodesics $\mathbf{G}_\lambda$ in the Poincaré disk $\mathbb{D}$ with intensity $\lambda > 0$. This process is composed of the polar geodesics associated to a Poisson point process with intensity measure $\Lambda$ such that $\mathrm{d}\Lambda(\rho,\theta) = 2\lambda(1+\rho^2)(1-\rho^2)^{-2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$. This process determines a random convex polygonal tessellation of $\mathbb{D}$ such that 0 belongs almost-surely to a closed polygon denoted by $C_0(\lambda)$: this particular polygon is called the *Crofton's cell*. We first prove that:

*Adresse e-mail :* sylvain.porret-blanc@umpa.ens-lyon.fr.

1631-073X/\$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.02.018

**Theorem 0.1.** *The Crofton's cell $C_0(\lambda)$ is almost surely bounded for all $\lambda > \frac{1}{2}$.*

This is a corollary of a result by Santaló [10]: the expectation of the Crofton's cell volume $\mathbf{E}[\mathrm{Vol}\, C_0(\lambda)]$ is equal to $2\pi(4\lambda^2-1)^{-1}$ if $\lambda > \frac{1}{2}$ and is equal to $+\infty$ if $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

To have a significant estimate of the size of the Crofton's cell, let us introduce $R_{\mathrm{ext}} \in \mathbb{R}^+$ which is the (hyperbolic) radius of the disc centered at the origin $D_{\mathrm{ext}}$ such that:

$$\begin{cases} C_0(\lambda) \subset D_{\mathrm{ext}}, \\ C_0(\lambda) \cap \partial D_{\mathrm{ext}} \neq \emptyset. \end{cases}$$

We obtain, as Calka in the Euclidean case (see [1]), the exact distribution of $R_{\mathrm{ext}}$: more precisely, if we denote by $P_\mu(n)$ the probability of covering a circle of circumference 1 by $n$ random independent and identically distributed arcs, whose centers are uniformly distributed and whose lengths have common law $\mu$, we have:

$$\mathbf{P}(R_{\mathrm{ext}} \geqslant r) = \exp\bigl(-\lambda\, \mathrm{per}(D_r)\bigr)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(1 - P_\mu(n)\bigr)\frac{(\lambda\, \mathrm{per}(D_r))^n}{n!}\right)$$

where $\mu(\mathrm{d}\ell) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(\ell)\pi\sqrt{1-r^2}\sin(\pi\ell)(1-r^2\cos^2(\pi\ell))^{-3/2}\,\mathrm{d}\ell$ and $\mathrm{per}(D_r)$ denotes the perimeter of the hyperbolic disk of radius $r$ (this is equal to $2\pi\sinh r$). The probabilities $P_\mu(n)$ were explicitely computed by Siegel and Holst [13].

We use the exact computation, due to Stevens [14], and estimations due to Shepp [11] of the probability of covering the circle with arcs of constant length and some results of concentration about the mean of the measure due to Calka to compare $P_\mu(n)$ and $P_{\delta_{\mathbf{E}[\mu]}}(n)$, so that one obtains:

**Theorem 0.2.**

$$\mathbf{P}(R_{\mathrm{ext}} \geqslant r) = \mathrm{O}_{r\to\infty}\bigl(\mathrm{e}^{(1-2\lambda)r}\bigr).$$

The last results are only interesting for values of $\lambda$ which are greater than 1/2 and do not provide any conclusion about the boundedness of $C_0(\lambda)$ for $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$. To answer to this question, we first study random covering of the circle $\partial\mathbb{D}$ of circumference 1 by the union of arcs $U := \bigcup_{(x,y)\in\Phi} ]x-y, x+y[$ where $\Phi$ is a Poisson process on $\partial\mathbb{D} \times [0, 1/4]$. We suppose that its intensity is $\lambda \times \nu$ where $\lambda$ is the Lebesgue measure on $\partial\mathbb{D}$ and $\nu$ any measure on $[0, 1/4]$.

Coverings by subsets defined by a Poisson process have been already studied by Shepp [12] and Kahane [4] on the real line. In this case, the condition ensuring the covering of the line is given by the fact that a given integral converges. We have obtained by similar methods that:

$$\frac{1}{8}\left(\int_0^{1/4}\exp\left(\int_{t/2}^{1/4}(2y-t)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}t\right)^{-1} \leqslant \mathbf{P}\{\partial\mathbb{D} \not\subset U\} \leqslant 2\left(\int_0^{1/4}\exp\left(\int_{t/2}^{1/4}(2y-t)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}t\right)^{-1},$$

and so $\partial\mathbb{D}$ is almost-surely equal to $U$ if and only if $\int_0^{1/4}\exp(\int_{t/2}^{1/4}(2y-t)\,\mathrm{d}\nu(y))\,\mathrm{d}t$ is infinite.

As the Crofton cell is bounded if and only if $\{z\colon |z| = 1\}$ is covered by the arcs whose extremities are the two points at infinity of the geodesics orthogonal to $[0, z]$ and passing through $z$, where $z$ belongs $\mathbf{X}_\lambda$, we can deduce from the estimation of $\mathbf{P}\{\partial\mathbb{D} \not\subset U\}$ that:

**Corollary 0.3.** *$C_0(\lambda)$ is bounded almost-surely if and only if $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$.*

## 1. Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé complet. Soit $\mathbb{D}$ le disque de Poincaré et dist la distance hyperbolique ($\partial\mathbb{D}$ désignera donc le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Notons $\mathbf{X}_\lambda$ un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{D}$ d'intensité $\nu_\lambda$ vérifiant

$$\mathrm{d}\nu_\lambda(\rho,\theta) = \lambda\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(\theta)\mathbf{1}_{[0,1[}(\rho)\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

À tout point $x \in \mathbf{X}_\lambda$ on associe la géodésique $g_x$ de $\mathbb{D}$ telle que $\min_{z\in g_x} \mathrm{dist}(0,z) = \mathrm{dist}(0,x)$ ($x$ est appelé le *point d'appui* de $g_x$). L'ensemble $\mathbf{G}_\lambda = \{g_x\colon\ x \in \mathbf{X}_\lambda\}$ partitionne $\mathbb{D}$ en domaines polygonaux convexes aléatoires constituant la *mosaïque de Poisson hyperbolique*. L'adhérence de la cellule de la mosaïque contenant le point 0 – elle existe presque-sûrement – est notée $C_0(\lambda)$ et se nomme *cellule de Crofton*.

Les premières études de cette mosaïque remontent à 1966 avec les travaux de Santaló [9], où il donne des résultats équivalents à ceux de Miles dans le cas euclidien [5–7] concernant le premier moment des principales caractéristiques géométriques de la cellule de Crofton. Il présente aussi plusieurs définitions de cellules empiriques liées au processus de géodésiques hyperboliques sans toutefois faire le lien avec la cellule de Crofton comme dans le cas euclidien [2,8].

Nous nous intéressons ici au *caractère borné de la cellule de Crofton* $C_0(\lambda)$.

## 2. Caractère borné de $C_0(\lambda)$

### *2.1. Loi du rayon exinscrit en grande intensité*

Dans un premier temps, on déduit de la structure convexe très particulière de la cellule de Crofton (intersection dénombrable de demi-espaces hyperboliques) ainsi que de l'égalité (voir [10]) :

$$\mathbf{E}\big[\mathrm{Vol}\, C_0(\lambda)\big] = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda \leqslant \frac{1}{2}, \\ \dfrac{2\pi}{4\lambda^2 - 1} & \text{si } \lambda > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

que

**Corollaire 2.1.** *Pour tout $\lambda > \frac{1}{2}$, la cellule de Crofton $C_0(\lambda)$ est presque-sûrement bornée.*

Afin d'estimer plus précisément la taille de $C_0(\lambda)$, définissons la variable $R_{\mathrm{ext}}$ comme le rayon (hyperbolique) du plus petit disque $D_{\mathrm{ext}}$ centré en 0 et contenant $C_0(\lambda)$. Cette variable aléatoire est bien définie presque-sûrement de manière unique. Elle a d'abord été introduite par Miles [5–7] et étudiée précisément par Calka [1] dans le cas euclidien.

Comme dans [1], la loi de la variable aléatoire $R_{\mathrm{ext}}$ peut être obtenue à partir de résultats de recouvrement du cercle : si $P_\nu(n)$ désigne la probabilité — qui a été explicitée par Siegel et Holst [13] — que $n$ arcs aléatoires indépendants de longueurs distribuées selon la loi $\nu$ et de centres uniformément distribués recouvrent le cercle de circonférence 1, on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{P}(R_{\mathrm{ext}} \geqslant r) = \exp\big(-\lambda\, \mathrm{per}(D_r)\big)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(1 - P_\mu(n)\big)\frac{(\lambda\, \mathrm{per}(D_r))^n}{n!}\right), \tag{2}$$

où $D_r$ désigne le disque hyperbolique de centre 0 et de rayon $r$, $\mathrm{per}(D_r)$ désigne son perimètre et vaut $2\pi \sinh r$, et enfin

$$\mu(\mathrm{d}\ell) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(\ell)\pi\sqrt{1-r^2}\sin(\pi\ell)\big(1 - r^2\cos^2(\pi\ell)\big)^{-3/2}\,\mathrm{d}\ell.$$

Dans le cas où les longueurs des arcs aléatoires sont constantes (égales à $a$), Stevens [14] a donné la valeur exacte de la probabilité $P_{\delta_a}(n)$. Shepp [11] a ensuite réussi à estimer ces probabilités $P_{\delta_a}(n)$. En utilisant ces estimations et des théorèmes de concentration (autour de l'espérance) de la mesure issus de travaux de Huffer et Shepp [3], nous pouvons comparer $P_\mu(n)$ à $P_{\delta_{\mathbf{E}[\mu]}}(n)$ et minorer $P_\mu(n)$, ce qui nous donne finalement :

**Théorème 2.2.** *Pour tout $r > 0$, on a l'inégalité suivante* :

$$\mathbf{P}(R_{\mathrm{ext}} \geqslant r) \leqslant \mathrm{e}^{-2\pi\lambda\sinh r}\left(1 + 2\mathrm{e}^{2\pi\lambda\sinh r(1-\frac{r}{\pi\sinh r})}\left(2\pi\lambda\sinh r + \frac{1}{1 - r/(\pi\sinh r)}\right)\right),$$

*et donc*

$$\mathbf{P}(R_{\mathrm{ext}} \geqslant r) = \mathrm{O}_{r\to\infty}\big(\mathrm{e}^{(1-2\lambda)r}\big).$$

En faisant tendre $r$ vers l'infini on retrouve bien le fait que si $\lambda > \frac{1}{2}$, la cellule de Crofton $C_0(\lambda)$ est presque-sûrement bornée.

### 2.2. *Faibles intensités et cellules non-bornées*

Le résultat 2.1 prouve donc l'existence de valeurs de $\lambda$ pour lesquelles la cellule de Crofton est bornée presque-sûrement. Contrairement au cas euclidien où un processus poissonnien de droites d'intensité $\lambda$ dans le plan euclidien a la même loi que l'image par l'homothétie de rapport $\lambda$ d'un processus de droites d'intensité 1, le processus de géodésiques dans le plan hyperbolique n'admet pas cette propriété d'homogénéité.

Ainsi, dans le cas où $\lambda$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, il n'y a que très peu de géodésiques constituant la mosaïque, et nous montrons que $C_0(\lambda)$ n'est pas presque-sûrement bornée. Alors que pour estimer la taille du rayon exinscrit de la cellule de Crofton, nous avons fait appel à un théorème de recouvrement du cercle par un nombre fixé d'arcs de cercle, pour montrer que $C_0(\lambda)$ n'est pas presque-sûrement bornée pour $\lambda < \frac{1}{2}$, nous allons nous ramener à un problème de recouvrement du cercle par des arcs issus d'un processus ponctuel de Poisson représentant les centres et les longueurs de ces arcs. Ce type de recouvrement aléatoire a déjà été étudié dans la cadre de recouvrement aléatoire de la droite réel par Shepp [12] et repris de manière plus générale par Kahane dans [4].

Supposons dans un premier temps que nous disposons d'un processus ponctuel poissonnien $\Phi$ défini sur $\partial\mathbb{D} \times [0, \frac{1}{4}]$.

Supposons de plus que la mesure de $\Phi$ s'écrit $\lambda \times \nu$ où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur le tore $\partial\mathbb{D}$ et $\nu$ est une mesure ne chargeant que l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$. On définit alors à partir de $\Phi$ l'ouvert aléatoire $U$ inclus dans $\partial\mathbb{D}$ vérifiant :

$$U = \bigcup_{(x,y)\in\Phi} \left]x - y, x + y\right[$$

où $]x - y, x + y[$ désigne l'arc de cercle de $\partial\mathbb{D}$ de centre le point $x \in \partial\mathbb{D}$ et de longueur $2y$.

Dans ces conditions, nous obtenons l'encadrement :

$$\frac{1}{8}\left(\int_0^{1/4} \exp\left(\int_{t/2}^{1/4} (2y - t)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}t\right)^{-1} \leqslant \mathbf{P}\{\partial\mathbb{D} \not\subset U\} \leqslant 2\left(\int_0^{1/4} \exp\left(\int_{t/2}^{1/4} (2y - t)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}t\right)^{-1}. \tag{3}$$

L'encadrement précédent montre alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\partial\mathbb{D}$ soit recouvert presque-sûrement est que l'intégrale

$$\int_0^{1/4} \exp\left(\int_{t/2}^{1/4} (2y - t)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}t$$

soit infinie.

Finalement, le caractère borné de la cellule de Crofton $C_0$ peut se réécrire comme un problème de recouvrement du type précédent dans le cas où $\mathbf{X}_\lambda \overset{\text{p.s.}}{=} \mathbf{X}_\lambda \cap D_\rho$ ($\rho < 1$). $\Phi$ est alors le processus ponctuel $\{(x_z, y_z/2\pi)\colon z \in \mathbf{X}_\lambda\}$ où $x_z$ (resp. $y_z$) est le centre (resp. le rayon) de l'arc d'extremités les points à l'infini des géodesiques passant par $z$ et orthogonales en ce point au rayon $[0, z]$. La mesure $\nu$ vérifie alors :

$$\nu(\mathrm{d}y) = \lambda(2\pi)^2 \mathbf{1}_{[\frac{\arccos r}{2\pi}, \frac{1}{4}]}(y) \sin^{-2}(2\pi y)\,\mathrm{d}y\ ;$$

un passage à la limite fournit l'équivalence :

**Proposition 2.3.** *La cellule de Crofton $C_0$ est presque-sûrement bornée si et seulement si l'intégrale*

$$\int_0^{1/4} \exp\left(\lambda(2\pi)^2 \int_{t/2}^{1/4} (2y - t) \sin^{-2}(2\pi y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}t$$

*est infinie.*

En étudiant l'intégrale précédente, on retrouve en particulier le résultat énoncé au corollaire 2.1 et on obtient la condition nécessaire et suffisante suivante :

**Corollaire 2.4.** *La cellule de Crofton $C_0(\lambda)$ est presque-sûrement bornée si et seulement si $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$.*

La question du caractère borné de la cellule de Crofton $C_0(\lambda)$ est importante car elle est reliée à la possibilité de définir une cellule de Palm du processus.

## Remerciement

L'auteur remercie Jean-Pierre Kahane pour lui avoir indiqué les références [12] et [4] qui ont permis d'améliorer les résultats et les preuves présentés dans cette Note.

## Références

[1] P. Calka, The distributions of the smallest disks containing the Poisson–Voronoi typical cell and the Crofton cell in the plane, Adv. Appl. Probab. 34 (2002) 702–717.
[2] A. Goldman, Le spectre de certaines mosaïques poissoniennes du plan et l'enveloppe convexe du pont brownien, Probab. Theory Related Fields 105 (1996) 57–83.
[3] F.W. Huffer, L.A. Shepp, On the probability of covering the circle by random arcs, J. Appl. Probab. 24 (1987) 422–429.
[4] J.P. Kahane, Recouvrements aléatoires et théorie du potentiel, Colloq. Math. 60/61 (1990) 387–411.
[5] R.E. Miles, Random polygons determined by random lines in a plane, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 52 (1964) 901–907.
[6] R.E. Miles, Random polygons determined by random lines in a plane. II, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 52 (1964) 1157–1160.
[7] R.E. Miles, The various aggregates of random polygons determined by random lines in a plane, Adv. in Math. 10 (1973) 256–290.
[8] K. Paroux, Quelques théorèmes centraux limites pour les processus Poissoniens de droites dans le plan, Adv. Appl. Probab. 30 (1998) 640–656.
[9] L.A. Santaló, Average values for polygons formed by random lines in the hyperbolic plane, Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A 16 (1966) 29–43.
[10] L.A. Santaló, I. Yañez, Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and hyperbolic planes, J. Appl. Probab. 9 (1972) 140–157.
[11] L.A. Shepp, Covering the circle with random arcs, Israel J. Math. 11 (1972) 328–345.
[12] L.A. Shepp, Covering the line with random intervals, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 23 (1972) 163–170.
[13] A.F. Siegel, L. Holst, Covering the circle with random arcs of random sizes, J. Appl. Probab. 19 (1982) 373–381.
[14] W.L. Stevens, Solution to a geometrical problem in probability, Ann. Eugenics 9 (1939) 315–320.