Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 497–502
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle/Analyse harmonique

Estimations asymptotiques du noyau de la chaleur sur les groupes de Heisenberg

Hong-Quan Li

School of Mathematical Sciences, Fudan University, 220, Handan Road, 200433 Shanghai, P.R. China

Reçu le 8 janvier 2007 ; accepté le 20 février 2007

Disponible sur Internet le 9 avril 2007

Présenté par Michèle Vergne

Résumé

On obtient dans cette Note les estimations asymptotiques du noyau de la chaleur sur les groupes de Heisenberg. Et on donne aussi les estimations optimales des derivées du noyau de la chaleur. ***Pour citer cet article : H.-Q. Li, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Asymptotic estimates for the heat kernel on Heisenberg groups. We get in this Note the asymptotics estimates for the heat kernel on Heisenberg groups. Also, we give sharp estimates for derivatives of the heat kernel. ***To cite this article: H.-Q. Li, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abridged English version

Recall that (see [2]) the Heisenberg group of $2n+1$ real dimensions, $\mathbb{H}_{2n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, is a stratified group with the group law $(z,t)\cdot(z',t') = (z+z', t+t'+2\Im\langle z,z'\rangle)$, where $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z'=(z'_1,\ldots,z'_n)\in\mathbb{C}^n$, $z_j = x_j + y_j\imath$ $(x_j, y_j \in \mathbb{R})$, $\langle z,z'\rangle = \sum_{j=1}^n z_j\cdot\overline{z'_j}$.

Let $\mathrm{X}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j\frac{\partial}{\partial t}$, $\mathrm{Y}_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j\frac{\partial}{\partial t}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ denote the left invariant vector fields on $\mathbb{H}_{2n+1}$, the associated sub-Laplacian is $\Delta = \sum_{j=1}^n(\mathrm{X}_j^2 + \mathrm{Y}_j^2)$.

Let $\nabla = (\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n,\mathrm{Y}_1,\ldots,\mathrm{Y}_n)$ denote the gradient, d the Carnot–Carathéodory distance, and p_h $(h>0)$ the heat kernel (that is, the integral kernel of $\mathrm{e}^{h\Delta}$) on $\mathbb{H}_{2n+1}$. Let $o=(0,0)$ be the origin of $\mathbb{H}_{2n+1}$, $g=(z,t)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ and $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n\|z_j\|^2$. For convenience, we set $d(g)=d(g,o)$, $p_h(g)=p_h(g,o)$ and $p(g)=p_1(g)$. It is well known that p_h has the form (cf. [4,2] or [6]):

$$p_h(z,t) = \frac{1}{2(4\pi h)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\lambda}{4h}\left(t\imath - \|z\|^2\coth\lambda\right)\right)\left(\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\right)^n \mathrm{d}\lambda.$$

Adresses e-mail : hongquan_li@fudan.edu.cn, hong_quanli@yahoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.02.015

We note that $p_h(z,t) = h^{-n-1} p(z/\sqrt{h}, t/h)$ for all $h > 0$, $(z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. We obtain optimal global estimates for p, namely for p_h, as follows:

Theorem 1. *We define, for all* $v, w \geqslant 0$,

$$P(n; v, w) = \mathrm{e}^{-w^2/4}[1 + v \cdot w]^{-1/2}\big[\big(1 + w^2\big)/(1 + v \cdot w)\big]^{n-1}.$$

Then there exists a constant $A_1 \geqslant 1$ *such that*

$$A_1^{-1} P\big(n; \|z\|, d(z,t)\big) \leqslant p(z,t) \leqslant A_1 P\big(n; \|z\|, d(z,t)\big), \quad \forall (z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}. \tag{1}$$

We will find the asymptotic results for p, namely for the heat kernel on $\mathbb{H}_{2n+1}$, in the proof of Theorem 1. Also, we give sharp estimates for derivatives of p, so of p_h as well, as follows:

Theorem 2. *There exists a constant* $A_2 > 0$ *such that* $|\nabla p(g)| \leqslant A_2 d(g) p(g)$ *for all* $g \in \mathbb{H}_{2n+1}$. *In general, let* $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_j \in \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n\}$ *with* $1 \leqslant j \leqslant k \in \mathbb{N}^*$, *then there exists a constant* $C_* > 0$ *such that*:

$$\big|\mathrm{U}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{U}_k^{\alpha_j} p(g)\big| \leqslant C_*\big(1 + d(g)\big)^{|\alpha|} p(g), \quad \forall g \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, \text{ where } |\alpha| = \textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j.$$

Remark 1. By results of [1], we note that Theorems 1 and 2 are valid for general isotropic Heisenberg groups (see, for example, [1] for the definition).

Remark 2. Theorem 1 is not surprising: an estimate of type $p(z,t) \leqslant CP(n; \|z\|, d(z,t))$ was obtained under an equivalent form in Theorem 4.6 of [1]. In particular, for $n = 1$, (1) was implicitly obtained by Hueber et Müller [3] (see also [5] for (1), [2] and [1] for some partial results). The results of Theorem 2 are analogous to the case $\mathbb{R}^n$. Moreover, the estimates (1) and $|\nabla p(g)| \leqslant C d(g) p(g)$ were used in [5] in order to obtain the gradient estimate of heat semi-group on $\mathbb{H}_3$. It is very likely that Theorems 1 and 2 are sufficient to obtain the gradient estimate of heat semi-group on Heisenberg groups (see [5] for the special case $\mathbb{H}_3$). Also, by results of this Note, we could study the asymptotic of Green kernel and the Martin boundary on $\mathbb{H}_{2n+1}$ (see [3] for $\mathbb{H}_3$). They are left to the reader.

Remark 3. In another article, we will give (more interesting) asymptotic estimates for the heat kernel on other "H-type" groups by using some new techniques. Because of the difference of methods, it should be reasonable to distinguish Heisenberg groups with other "H-type" groups.

1. Introduction

Rappelons, voir par exemple [2], que le groupe de Heisenberg de dimension réelle $2n+1$, $\mathbb{H}_{2n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, est un groupe de Lie stratifié pour la loi $(z,t) \cdot (z',t') = (z + z', t + t' + 2\Im\langle z, z'\rangle)$, avec $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z' = (z'_1, \ldots, z'_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_j = x_j + y_j\imath$ $(x_j, y_j \in \mathbb{R})$, $\langle z, z'\rangle = \sum_{j=1}^n z_j \cdot \overline{z'_j}$.

Et le sous-Laplacien sur $\mathbb{H}_{2n+1}$ s'écrit comme $\Delta = \sum_{j=1}^n (\mathrm{X}_j^2 + \mathrm{Y}_j^2)$, où X_j et Y_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ sont les champs de vecteurs invariants à gauche sur $\mathbb{H}_{2n+1}$, définis par $\mathrm{X}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}$, $\mathrm{Y}_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}$.

Notons $\nabla = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ le gradient, d la distance de Carnot–Carathéodory, et p_h $(h > 0)$ le noyau de la chaleur (c'est-à-dire le noyau intégral de $\mathrm{e}^{h\Delta}$) sur $\mathbb{H}_{2n+1}$. On note $o = (0,0)$ l'origine de $\mathbb{H}_{2n+1}$; $g = (z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ désignera un point de $\mathbb{H}_{2n+1}$; et on note $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n \|z_j\|^2$. Par convention, on note $d(g) = d(g,o)$, $p_h(g) = p_h(g,o)$ et $p(g) = p_1(g)$. Par [4,2] ou [6], on a l'expression explicite de p_h comme suit :

$$p_h(z,t) = \frac{1}{2(4\pi h)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\lambda}{4h}\big(t\imath - \|z\|^2 \coth\lambda\big)\right)\left(\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\right)^n \mathrm{d}\lambda.$$

On observe que $p_h(z,t) = h^{-n-1} p(z/\sqrt{h}, t/h)$ pour tout $h > 0$ et tout $(z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. Et on a les estimations optimales de p, donc celles de p_h, comme suit :

Théorème 1. *Définissons*

$$P(n; v, w) = \mathrm{e}^{-w^2/4}[1 + v \cdot w]^{-1/2}\big[\big(1 + w^2\big)/(1 + v \cdot w)\big]^{n-1}, \quad \forall v, w \geqslant 0.$$

Alors il existe une constante $A_1 > 0$ telle que :

$$A_1^{-1} P\big(n; \|z\|, d(z,t)\big) \leqslant p(z,t) \leqslant A_1 P\big(n; \|z\|, d(z,t)\big), \quad \forall (z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

On trouvera les estimations asymtotiques de p, donc celles de p_h, dans la preuve du Théorème 1. Ensuite, on donne les estimations optimales des derivées de p, donc celles de p_h, comme suit :

Théorème 2. *Il existe une constante $A_2 > 0$ telle que $|\nabla p(g)| \leqslant A_2 d(g) p(g)$ pour tout $g \in \mathbb{H}_{2n+1}$. En général, soient $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_j \in \{\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n\}$ avec $1 \leqslant j \leqslant k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe une constante $C_* > 0$ telle que :*

$$\big|\mathrm{U}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{U}_k^{\alpha_j} p(g)\big| \leqslant C_*\big(1 + d(g)\big)^{|\alpha|} p(g), \quad \forall g \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, \text{ où } |\alpha| = \textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j.$$

Remarque 1. Par les résultats de [1], on observe que les Théorèmes 1 et 2 restent valables sur tous les groupes de Heisenberg isotropes (voir par exemple [1] pour la définition).

Remarque 2. Le Théorème 1 n'est pas surprenant : une estimation de type $p(z,t) \leqslant C P(n; \|z\|, d(z,t))$ a été obtenue sous une formule équivalente dans le Theorem 4.6 de [1]. En particulier, pour $n = 1$, l'estimation (2) a été obtenue implicitement par Hueber et Müller [3] (voir aussi [5] pour (2), [2] et [1] pour des résultats partiels). Les résultats du Théorème 2 sont analogues au cas de $\mathbb{R}^n$. De plus, les estimations (2) et $|\nabla p(g)| \leqslant C d(g) p(g)$ ont été utilisées dans [5] pour obtenir l'estimation du gradient du semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{H}_3$. Vraisemblablement les Théorèmes 1 et 2 permettent d'obtenir l'estimation du gradient du semi-groupe de la chaleur sur les groupes de Heisenberg (voir [5] pour le cas spécial $\mathbb{H}_3$). Aussi, les résultats de cette Note permettent d'étudier les estimations asymptotiques du noyau de Green et le bord de Martin sur $\mathbb{H}_{2n+1}$ (voir [3] pour $\mathbb{H}_3$). On laisse ce travail au lecteur.

Remarque 3. Dans un autre article, on donnera les estimations asymptotiques (plus intéressantes) du noyau de la chaleur sur les autres « H-type » groupes en utilisant de nouvelles techniques, et il serait raisonnable de distinguer les groupes de Heisenberg avec les autres « H-type » groupes à cause de la différence des méthodes.

2. Preuve du Théorème 1

Notons $\mu(\varphi) = (2\varphi - \sin 2\varphi)/(2\sin^2\varphi) :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ et μ^{-1} sa fonction réciproque. Pour $z \neq 0$, on a (voir (1.40), (1.30) ainsi que §4. de [1], et on a posé $a = \tau = 1$ et remplacé 2θ par θ dans (1.30))

$$d^2(z,t) = (\theta/\sin\theta)^2 \|z\|^2 \quad \text{avec } \theta = \mu^{-1}\big(t/\|z\|^2\big). \tag{3}$$

Définissons

$$H(a,b) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\right)^n \mathrm{e}^{\lambda(b\imath - a\coth\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda, \quad a, b \geqslant 0.$$

On remarque que

$$p(z,t) = 2^{-1}(4\pi)^{-(n+1)} H\big(\|z\|^2/4, |t|/4\big), \quad (z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}. \tag{4}$$

On va obtenir les estimations asymptotiques de $H(\|z\|^2, |t|)$. Par la continuité de p, donc celle de H, il suffit d'estimer $H(\|z\|^2, |t|)$ lorsque $d(z,t) \to +\infty$ avec $z \neq 0$. Pour ceci, on distingue les deux cas suivants : (1) $d(z,t) \to +\infty$ avec $z \neq 0$ et $\frac{|t|}{\|z\|^2} \leqslant C$; (2) $d(z,t) \to +\infty$ avec $\frac{|t|}{\|z\|^2} \to +\infty$ et $z \neq 0$.

Lemme 1. *Soit $\gamma > 0$. Alors, pour $z \neq 0$ et $|t|/\|z\|^2 < \gamma$, on a*

$$H\big(\|z\|^2, |t|\big) = \mathrm{e}^{-d^2(z,t)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^n \frac{\sin|\theta|}{\sqrt{1 - \theta\cot\theta}} \frac{1}{\|z\|}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big), \quad d(z,t) \to +\infty.$$

Preuve. Il suffit de suivre la preuve du Theorem 2.42 de [1]. □

Lemme 2. *Soient $d(z,t) \to +\infty$, $z \neq 0$ et $|t|/\|z\|^2 \to +\infty$, alors*

$$H\big(\|z\|^2, |t|\big) = 2\pi \mathrm{e}^{-d^2(z,t)} \pi^n \epsilon^{1-n} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2} I_{n-1}\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2\right)\big(1 + \mathrm{o}(1)\big),$$

où I_{n-1} désigne la fonction de Bessel du second genre, et

$$\epsilon = \pi - |\theta| = \sqrt{\pi}\sqrt{\|z\|^2/|t|}\big(1 + 0\big(\sqrt{\|z\|^2/|t|}\big)\big), \quad \textit{pour } |t|/\|z\|^2 \to +\infty. \tag{5}$$

On admet le lemme pour l'instant et on donne *la preuve du Théorème* 1. Il suffit d'utiliser (4), (3), le fait que $d(z/2, t/4) = d(z,t)/2$, les Lemmes 1 et 2, ainsi que les trois faits suivants concernant I_{n-1} (voir par example [7] p. 84 et p. 139) : (1) $I_{n-1}(s) > 0$ pour tout $s > 0$; (2) $I_{n-1}(s) \sim s^{n-1}$ pour $0 < s \leqslant 1$ et (3) $\mathrm{e}^{-s} I_{n-1}(s) = (2\pi s)^{-1/2}(1 + 0(s^{-1}))$ pour $s \to +\infty$.

Preuve du Lemme 2. Notons

$$f\big(\|z\|^2, |t|, \lambda\big) = \lambda\big(|t|\imath - \|z\|^2 \coth\lambda\big), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pour $\lambda = \pi\imath - \xi\imath$, en améliorant le (2.33) de [1], on peut écrire

$$f\big(\|z\|^2, |t|, \pi\imath - \xi\imath\big) = -|t|(\pi - \xi) + \pi\frac{\|z\|^2}{\xi} + G\big(\|z\|^2, \xi\big), \tag{6}$$

où

$$G\big(\|z\|^2, \xi\big) = \|z\|^2\left[\pi\left(\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - \frac{1}{\xi}\right) - \frac{\xi}{\sin\xi}\cos\xi\right].$$

Par une petite modification de (2.35)–(2.37) de [1], on déduit de (6) que pour $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, on a

$$f\big(\|z\|^2, |t|, \pi\imath - \epsilon \mathrm{e}^{\varphi\imath}\imath\big) - f\big(\|z\|^2, |t|, \pi\imath - \epsilon\imath\big) = -\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1 - \cos\varphi) + R\big(\|z\|^2, \epsilon, \varphi\big), \tag{7}$$

avec $f(\|z\|^2, |t|, \pi\imath - \epsilon\imath) = f(\|z\|^2, |t|, |\theta|\imath) = -d^2(z,t)$ (voir §4 de [1]), et

$$R\big(\|z\|^2, \epsilon, \varphi\big) = G\big(\|z\|^2, \epsilon \mathrm{e}^{\varphi\imath}\big) - G\big(\|z\|^2, \epsilon\big) - \left[\frac{\partial}{\partial\epsilon} G\big(\|z\|^2, \epsilon\big)\right]\big(\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\imath} - \epsilon\big). \tag{8}$$

Dans la suite, pour simplifier les notations, on pose

$$F(\lambda) = F\big(\|z\|^2, |t|, n, \lambda\big) = \left(\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\right)^n \exp f\big(\|z\|^2, |t|, \lambda\big), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Or, $F(\lambda)$ est analytique dans $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \pi\imath| > \epsilon, 0 < \Im\lambda < \frac{3}{2}\pi\}$, et continue sur $\overline{\Omega}$. Et on a

$$\int_{\mathbb{R}} F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} F\left(\lambda + \frac{3}{2}\pi\right)\mathrm{d}\lambda + \int_{|\lambda - \pi\imath| = \epsilon} F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = Q_1 + Q_2.$$

Le terme Q_1 n'est pas important, voir [1] pp. 649–650 (avec peu de modifications) pour l'explication détaillée. Pour estimer Q_2, en utilisant le changement de variable $\lambda = \pi\imath - \epsilon \mathrm{e}^{\varphi\imath}\imath$, on constate d'abord que

$$Q_2 = \int_{|\lambda - \pi\imath| = \epsilon} F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} F\big(\pi\imath - \epsilon \mathrm{e}^{\varphi\imath}\imath\big)\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\imath}\,\mathrm{d}\varphi,$$

puis, en utilisant (7), que

$$Q_2=\epsilon \mathrm{e}^{-d^2(z,t)}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)+R(\|z\|^2,\epsilon,\varphi)}\left(\frac{1-\frac{\epsilon}{\pi}\mathrm{e}^{\varphi\iota}}{\sin\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\iota}}\pi\right)^n \mathrm{e}^{\varphi\iota}\,\mathrm{d}\varphi=\pi^n\epsilon^{1-n}\mathrm{e}^{-d^2(z,t)}T$$

$$\text{où } T=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)}\mathrm{e}^{(1-n)\varphi\iota}\mathrm{e}^{R(\|z\|^2,\epsilon,\varphi)}\left(\left(1-\frac{\epsilon}{\pi}\mathrm{e}^{\varphi\iota}\right)\frac{\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\iota}}{\sin\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\iota}}\right)^n \mathrm{d}\varphi. \tag{9}$$

Cas 1 : $\|z\|\geqslant 1$. On constate d'abord que

$$T=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)}\mathrm{e}^{(1-n)\varphi\iota}\,\mathrm{d}\varphi+\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)}\mathrm{e}^{(1-n)\varphi\iota}\left(\mathrm{e}^{R(\|z\|^2,\epsilon,\varphi)}-1\right)\mathrm{d}\varphi+\mathrm{Rest}.$$

Pour le premier terme, les résultats de [7] (p. 66, p. 69 et p. 79) impliquent que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)}\mathrm{e}^{(1-n)\varphi\iota}\,\mathrm{d}\varphi=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2\cos\varphi}\mathrm{e}^{(1-n)\varphi\iota}\,\mathrm{d}\varphi=2\pi \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2}I_{n-1}\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2\right).$$

Pour les deux autres termes, on voit d'abord qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $z\neq 0$,

$$\left|R\left(\|z\|^2,\epsilon,\varphi\right)\right|\leqslant \sup_{|\varsigma|\leqslant\epsilon}\left|\frac{\partial^2}{\partial\varsigma^2}G\left(\|z\|^2,\varsigma\right)\right|\cdot\left|\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\iota}-\epsilon\right|^2=C\|z\|^2\epsilon^2(1-\cos\varphi),\quad \forall 0<\epsilon\leqslant\frac{\pi}{2},\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

Donc, la valeur absolue du second terme peut être majorée par

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)}\left(\mathrm{e}^{C\|z\|^2\epsilon^2(1-\cos\varphi)}-1\right)\mathrm{d}\varphi=\int_{B_1}+\int_{B_2}=A_1+A_2,$$

où $B_1=\{|\varphi|\leqslant\pi;\,C\|z\|^2\epsilon(1-\cos\varphi)\leqslant 1\}$ et $B_2=\{|\varphi|\leqslant\pi;\,C\|z\|^2\epsilon(1-\cos\varphi)>1\}$. Pour $\|z\|\geqslant 1$ et $\epsilon\to 0^+$, par le fait que $1-\cos\varphi\geqslant 2(\frac{\varphi}{\pi})^2$ pour $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$ et que $\mathrm{e}^{-s}I_{n-1}(s)=(2\pi s)^{-1/2}(1+0(s^{-1}))$ lorsque $s\to+\infty$ (voir [7] p. 139), en notant $\varpi_0=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2}I_{n-1}(\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2)$, on a

$$A_1\leqslant C_1\epsilon\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2\frac{\varphi^2}{100}}\,\mathrm{d}\varphi\leqslant C_2\epsilon\varpi_0,\qquad A_2\leqslant \mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{C\epsilon^2}-\epsilon)}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\epsilon}\|z\|^2\frac{\varphi^2}{100}}\,\mathrm{d}\varphi\leqslant C_3\epsilon\varpi_0,$$

$$\text{aussi } |\mathrm{Rest}|\leqslant C_4\epsilon\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)+C\|z\|^2\epsilon^2(1-\cos\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\leqslant C_4\epsilon\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\epsilon}\|z\|^2 2(\frac{\varphi}{\pi})^2}\,\mathrm{d}\varphi\leqslant C_5\epsilon\varpi_0.$$

Cas 2 : $\|z\|\leqslant 1$. Observons d'abord qu'on a $|t|\to+\infty$ lorsque $d(z,t)\to+\infty$ avec $\|z\|\leqslant 1$. L'étape cruciale pour montrer le résultat cherché se trouve à l'observation suivante : en notant $\xi=\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\iota}$, par (8), la formule de Taylor pour la fonction $G(\|z\|^2,\xi)$ en $\xi_0=\epsilon$, pour $(\xi/\sin\xi)^n$ et $\mathrm{e}^{\xi'}$ en $\xi_1=0$, il existe des fonctions indépendantes de φ, $\eta_j(\|z\|^2,\epsilon)$ $(0\leqslant j\leqslant n-1)$ avec $\eta_0=1$, et une fonction $E_n(\|z\|^2,\epsilon,\varphi)$ ainsi qu'une constante $C>0$ telles que pour tout $\|z\|\leqslant 1$, tout $0<\epsilon\leqslant\pi/2$ et tout $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$,

$$\mathrm{e}^{R(\|z\|^2,\epsilon,\varphi)}\left(\left(1-\frac{\epsilon}{\pi}\mathrm{e}^{\varphi\iota}\right)\frac{\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\iota}}{\sin\epsilon \mathrm{e}^{\varphi\iota}}\right)^n=\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\left(\|z\|^2,\epsilon\right)\mathrm{e}^{j\varphi\iota}+E_n\left(\|z\|^2,\epsilon,\varphi\right),$$

$$\text{avec } \left|\eta_j\left(\|z\|^2,\epsilon\right)\right|\leqslant C\epsilon^j,\ \forall 1\leqslant j\leqslant n-1,\ \text{ et } \left|E_n\left(\|z\|^2,\epsilon,\varphi\right)\right|\leqslant C\epsilon^n.$$

Donc, en utilisant (9) et l'expression intégrale de I_j $(0\leqslant j\leqslant n-1)$, voir [7] (p. 66, p. 69 et p. 79), on a

$$T=\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\left(\|z\|^2,\epsilon\right)\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)}\mathrm{e}^{(1-n+j)\varphi\iota}\,\mathrm{d}\varphi+\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2(1-\cos\varphi)}E_n\left(\|z\|^2,\epsilon,\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j\big(\|z\|^2, \epsilon\big)\varpi_j + 0\big(\epsilon^n\big), \quad \text{où on a noté } \varpi_j = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2} I_{n-1-j}\bigg(\frac{2\pi}{\epsilon}\|z\|^2\bigg),$$
$$= 2\pi\varpi_0\big(1 + 0(\epsilon)\big) \quad \text{pour } n = 1 \quad \text{et} \quad 2\pi\varpi_0\big(1 + 0\big(|t|^{-1}\big)\big) \text{ pour } n \geqslant 2,$$

par (5) et les trois propriétés de I_j utilisées dans la preuve du Théorème 1. □

3. Preuve du Théorème 2

Par un calcul simple, on a $|\nabla p(z,t)| \leqslant C(\|z\| \cdot |W_1| + \|z\| \cdot |W_2|)$, où

$$W_1 = \int_{\mathbb{R}} L\bigg(\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\bigg)^{n+1} \cosh\lambda \, \mathrm{d}\lambda, \quad W_2 = \int_{\mathbb{R}} L\bigg(\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\bigg)^{n} \lambda \, \mathrm{d}\lambda, \quad \text{avec } L = \exp\bigg(\frac{\lambda}{4}\big(t\imath - \|z\|^2 \coth\lambda\big)\bigg).$$

En répétant la preuve du Theorem 4.6 de [1], on peut montrer que $|W_1| \leqslant CP(n+1; \|z\|, d(z,t))$ et que $|W_2| \leqslant CP(n; \|z\|, d(z,t))$ avec P définie dans le Théorème 1 (remarquons aussi qu'on peut obtenir les estimations asymptotiques de W_1 et de W_2 en modifiant la preuve du Théorème 1, mais ce sera beaucoup plus technique). Par le Théorème 1 et le fait que $\|z\| \leqslant d(z,t)$, on a donc $|\nabla p(g)| \leqslant Cd(g)p(g)$.

De la même façon, on peut obtenir les autres résultats du Théorème 2.

Remerciement

L'auteur est partiellement supporté par le NSF of China (Grant No. 10641002).

Références

[1] R. Beals, B. Gaveau, P.C. Greiner, Hamilton–Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups, J. Math. Pures Appl. (9) 79 (2000) 633–689.
[2] B. Gaveau, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math. 139 (1977) 95–153.
[3] H. Hueber, D. Müller, Asymptotics for some Green kernels on the Heisenberg group and the Martin boundary, Math. Ann. 283 (1989) 97–119.
[4] A. Hulanicki, The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group, Studia Math. 56 (1976) 165–173.
[5] H.-Q. Li, Estimation optimale du gradient du semi-groupe de la chaleur sur le groupe de Heisenberg, J. Funct. Anal. 236 (2006) 369–394.
[6] F. Lust-Piquard, A simple-minded computation of heat kernels on Heisenberg groups, Colloq. Math. 97 (2003) 233–249.
[7] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1966.