Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 5–10
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Opérateurs de composition sur les espaces de Hardy–Orlicz

Pascal Lefèvre [a], Daniel Li [a], Hervé Queffélec [b], Luis Rodríguez-Piazza [c]

[a] *Université d'Artois, Laboratoire de Mathématiques de Lens EA 2462, Fédération CNRS Nord-Pas-de-Calais FR 2956, Faculté des sciences Jean-Perrin, rue Jean-Souvraz, S.P. 18, 62307 Lens cedex, France*
[b] *Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire Paul-Painlevé U.M.R. CNRS 8524, U.F.R. de mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France*
[c] *Universidad de Sevilla, Facultad de Matematicas, Dpto de Análisis Matemático, Apartado de Correos 1160, 41080 Sevilla, Spain*

Reçu le 15 octobre 2006 ; accepté le 2 novembre 2006

Disponible sur Internet le 11 décembre 2006

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous étudions les opérateurs de composition C_ϕ sur les espaces de Hardy–Orlicz, formés des fonctions holomorphes dans le disque unité du plan complexe dont les valeurs au bord sont dans un espace d'Orlicz. Nous montrons, qu'en fonction de la croissance de la fonction d'Orlicz Ψ, diverses propriétés de l'opérateur, telles que compacité, compacité faible, le fait d'être borné pour l'ordre, peuvent coïncider ou non. ***Pour citer cet article : P. Lefèvre et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Composition operators on Hardy–Orlicz spaces. We study the behaviour of composition operators C_ϕ on Hardy–Orlicz spaces, whose elements are analytic functions on the open unit disk of the complex plane. We show that, according to the growth of the Orlicz function Ψ, different properties of C_ϕ, such as compactness, weak compactness, order boundedness, may or not coincide. ***To cite this article: P. Lefèvre et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abridged English version

In this Note, we announce results whose proofs will appear elsewhere [4]. In [4], we also study composition operators on Bergman–Orlicz spaces.

Let Ψ be an Orlicz function, i.e. a non-decreasing convex function $\Psi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ such that $\Psi(0)=0$ and $\Psi(\infty)=\infty$; we assume moreover that Ψ is continuous at 0, strictly convex (hence increasing), and such that $\frac{\Psi(x)}{x}\to\infty$ when $x\to+\infty$. Let L^Ψ be the Orlicz associated space of functions $f:\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}\to\mathbb{C}$ such that $\int_{\mathbb{T}}\Psi(|f|/A)\,\mathrm{d}m<+\infty$ for some $A>0$, where m is the normalized Lebesgue measure on $\mathbb{T}$, and let M^Ψ be the closure of L^∞ in L^Ψ. The Hardy–Orlicz space is the space of analytic functions defined on the open unit disk $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$ which are in H^1 and whose boundary values are in L^Ψ. If $\phi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ is an analytic self-map, the composition operator C_ϕ maps $f\in H^\Psi$ to $f\circ\phi\in H^\Psi$.

Adresses e-mail : pascal.lefevre@euler.univ-artois.fr (P. Lefèvre), daniel.li@euler.univ-artois.fr (D. Li), queff@math.univ-lille1.fr (H. Queffélec), piazza@us.es (L. Rodríguez-Piazza).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.11.006

Consider now the following growth conditions: $\Psi \in \Delta^0$ if for some $\beta > 1$, one has $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(\beta x)}{\Psi(x)} = +\infty$ (example: $\Psi(x) = \exp[\log(x+2)\log\log(x+2)] - 2^{\log\log 2}$); $\Psi \in \Delta^1$ if some $\beta > 1$, one has $x\Psi(x) \leqslant \Psi(\beta x)$ for x large enough (example: $\Psi(x) = \mathrm{e}^{(\log(x+1))^2} - 1$); $\Psi \in \Delta^2$ if for some $\beta > 1$, one has $\Psi(x)^2 \leqslant \Psi(\beta x)$ for x large enough (example: $\Psi(x) = \exp(x^2) - 1$). One has: $\Psi \in \Delta^2 \Rightarrow \Psi \in \Delta^1 \Rightarrow \Psi \in \Delta^0$.

Under the fast growth condition Δ^2, one has the following equivalences, which are characterized by conditions involving only the modulus of the boundary values of the symbol ϕ:

Theorem 0.1. *If Ψ satisfies the Δ^2-condition, then the following assertions for the composition operator $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ are equivalent*:

(1) *C_ϕ is order bounded into $M^\Psi(\mathbb{T})$*;
(2) *C_ϕ is compact*;
(3) *C_ϕ is weakly compact*;
(4) $\Psi^{-1}(\frac{1}{1-|\phi|}) \in M^\Psi(\mathbb{T})$;
(5) $m(1-|\phi| < \lambda) = \mathrm{O}(\frac{1}{\Psi[A\Psi^{-1}(1/\lambda)]})$ *as $\lambda \to 0$, for any $A > 0$*;
(6) $\sup_{a\in\mathbb{T}} \|C_\phi(u_{a,r})\|_\Psi = \mathrm{o}(\frac{1}{\Psi^{-1}(1/(1-r))})$ *as $r \to 1$, where $u_{a,r}(z) = (\frac{1-r}{1-\bar{a}rz})^2$, $|z| < 1$.*

Corollary 0.2. *When $\Psi \in \Delta^2$, there exist analytic self-maps $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ such that $C_\phi : H^p \to H^p$ is compact for $1 \leqslant p < \infty$, but $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ is not compact.*

When Ψ grows less fast:

Theorem 0.3. *There exist Orlicz functions $\Psi \in \Delta^1$ for which $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ may be compact without being order bounded with values in M^Ψ.*

However, we show, using a generalization of the notion of Carleson measure, adapted to the Orlicz function Ψ, that:

Theorem 0.4. *When $\Psi \in \Delta^0$, the compactness of $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ is equivalent to its weak compactness.*

For that, we show:

Theorem 0.5. *For every analytic self-map $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ and every Orlicz function Ψ, the composition operator $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ is compact if and only if one has, for every $A > 0$*:

$$\rho_\mu(h) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\Psi(A\Psi^{-1}(1/h))}\right) \quad \text{as } h \to 0.$$

Here μ is the image of the measure m on $\mathbb{T}$ by the boundary values function ϕ^* of ϕ, and, $\rho_\mu(h) = \sup_{|\xi|=1} \mu(W(\xi,h))$, where $W(\xi,h) = \{z \in \overline{\mathbb{D}};\ |z| > 1-h \text{ and } |\arg(z\bar{\xi})| < h\}$ is the Carleson window. For that purpose, we first show that for a general measure μ on $\overline{\mathbb{D}}$, the above condition on ρ_μ is necessary, but not sufficient, to the canonical injection $j_\mu : H^\Psi \to L^\Psi(\mu)$ be compact; to have a sufficient condition, we have to replace the condition in Theorem 0.5 by $\sup_{t\leqslant h} \rho_\mu(t)/t = \mathrm{o}(\frac{1/h}{\Psi(A\Psi^{-1}(1/h))})$, as $h \to 0$. However, in the analytic case, we have:

Theorem 0.6. *There exists a constant $k_1 > 0$ such that, for every analytic self-map $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, one has*:

$$\mu_\phi\big(W(\xi,\varepsilon h)\big) \leqslant k_1\varepsilon\mu_\phi\big(W(\xi,h)\big), \quad \text{for } h \in \big(0, 1-|\phi(0)|\big), \text{ and } \varepsilon \in (0,1).$$

Theorem 0.6 allows us to obtain Theorem 0.5.

1. Introduction

Les opérateurs de composition C_ϕ sur les espaces de fonctions analytiques ont reçu beaucoup d'attention depuis [10] (voir [8] et [1], notamment). Dans le cas de l'espace de Hardy H^2, Shapiro et Taylor [9] avaient montré que le fait pour C_ϕ d'être Hilbert–Schmidt ne dépendait que du module des valeurs au bord de ϕ et que la compacité ne suffit pas. Ils ont aussi montré que la compacité de $C_\phi : H^p \to H^p$ pour un $p < \infty$ équivalait à celle-ci pour tout $p < \infty$. Plus tard, Shapiro [7] a donné une caractérisation de la compacité utilisant la fonction de comptage de Nevanlinna et McCluer [5] en a donné une en termes de mesures de Carleson. Par ailleurs, dans le cas $p = \infty$, $C_\phi : H^\infty \to H^\infty$ est compact dès qu'il est faiblement compact, et cela entraîne que $\|\phi\|_\infty < 1$, et donc que C_ϕ est nucléaire.

Dans cette Note, nous annonçons des résultats dont le détail paraîtra ailleurs [4]. Dans [4], nous étudions aussi les opérateurs de composition sur les espaces de Bergman–Orlicz.

Nous étudions les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy–Orlicz H^Ψ, formés des fonctions de H^1 dont les valeurs au bord sont dans l'espace d'Orlicz $L^\Psi(\mathbb{T})$. Nous montrons que si la fonction d'Orlicz Ψ croît très vite, par exemple $\Psi(x) = \exp(x^2) - 1$, alors les propriétés pour $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ d'être faiblement compact, compact, ou borné pour l'ordre et à valeurs *dans l'espace de Morse-Transue* M^Ψ (ce qui remplace alors la propriété d'être Hilbert–Schmidt) sont équivalentes, et nous montrons qu'elles sont caractérisées par des propriétés ne faisant intervenir que le *module* des valeurs au bord du symbole ϕ. Quand la fonction Ψ croît moins vite, par exemple $\Psi(x) = \exp[(\log(x+1))^2] - 1$, l'opérateur $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ peut être compact sans être borné pour l'ordre et à valeurs dans M^Ψ. Toutefois, nous montrons, en utilisant une généralisation de la notion de mesure de Carleson, adaptée à la fonction d'Orlicz Ψ, que, même avec une croissance assez faible de Ψ, que nous appelons Δ^0, vérifiée par exemple pour $\Psi(x) = \exp[\log(x+2)\log\log(x+2)] - 2^{\log\log 2}$, la compacité de $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ équivaut à sa compacité faible.

2. Notations

Une fonction d'Orlicz est une fonction $\Psi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ croissante, convexe, et telle que $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\infty) = \infty$. Nous supposerons de plus Ψ continue en 0, strictement convexe (donc strictement croissante), et $\frac{\Psi(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. L'espace d'Orlicz associé L^Ψ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe un $A > 0$ tel que $\int_{\mathbb{T}} \Psi(|f|/A) < +\infty$; on définit alors la norme de f par $\|f\|_\Psi = \inf\{A > 0;\ \int_{\mathbb{T}} \Psi(|f|/A) \leqslant 1\}$. L'espace de Morse-Transue M^Ψ est le sous-espace des fonctions $f \in L^\Psi$ pour lesquelles $\int_{\mathbb{T}} \Psi(|f|/A) < +\infty$ pour *tout* $A > 0$; c'est aussi l'adhérence de L^∞ dans L^Ψ. Pour tout ce qui concerne les espaces d'Orlicz, nous renvoyons à [2] ou [6]. Nous utiliserons les *conditions de croissance* suivantes ; nous dirons que :

- $\Psi \in \Delta^0$ s'il existe $\beta > 1$ tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(\beta x)}{\Psi(x)} = +\infty$.
- $\Psi \in \Delta^1$ s'il existe $\beta > 1$ tel que $x\Psi(x) \leqslant \Psi(\beta x)$, pour x assez grand.
- $\Psi \in \Delta^2$ s'il existe $\beta > 1$ tel que $\Psi(x)^2 \leqslant \Psi(\beta x)$ pour x assez grand.

On a : $\Delta^2 \Longrightarrow \Delta^1 \Longrightarrow \Delta^0$.

Nous noterons, pour $A > 0$: $\chi_A(x) = \Psi[A\Psi^{-1}(x)]$. Pour $\Psi(x) = x^p$, on a $\chi_A(x) = A^p x$; mais pour $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1$, on a $\chi_A(x) = (x+1)^{A^2} - 1$.

L'espace de Hardy–Orlicz H^Ψ est l'espace des fonctions f analytiques dans le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ telles que $\sup_{0\leqslant r<1} \|f_r\|_\Psi < +\infty$, avec $f_r(t) = f(r\mathrm{e}^{it})$.

On a $H^\Psi \subseteq H^1$ et, pour $f \in H^1$, on a $f \in H^\Psi$ si et seulement si les valeurs au bord f^* de f sont dans $L^\Psi(\mathbb{T})$. La norme est $\|f\|_\Psi = \|f^*\|_{L^\Psi}$.

Si $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique, l'*opérateur de composition* $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ de *symbole* ϕ est l'application $f \in H^\Psi \mapsto f \circ \phi$. Comme dans le cas classique, le principe de subordination de Littlewood, et le fait que $\Psi(|f|)$ soit sous-harmonique, assure la continuité de C_ϕ.

3. Opérateurs bornés pour l'ordre et opérateurs faiblement compacts

On dira que C_ϕ est *borné pour l'ordre et à valeurs dans* M^Ψ s'il existe une fonction $g \in M^\Psi$ telle que $|C_\phi(f)| \leqslant g$ pour toute f dans la boule-unité de H^Ψ. D'après le Théorème de convergence dominée et le Théorème de Montel, un tel opérateur C_ϕ est compact.

Proposition 3.1. *$C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ est borné pour l'ordre et à valeurs dans M^Ψ si et seulement si : $\Psi^{-1}(\frac{1}{1-|\phi^*|}) \in M^\Psi(\mathbb{T})$, c'est-à-dire $\chi_A(\frac{1}{1-|\phi^*|}) \in L^1(\mathbb{T})$, $\forall A > 0$.*

Théorème 3.2.

(1) *Si $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ est borné pour l'ordre et à valeurs dans M^Ψ, alors $m(1-|\phi| < \lambda) = \mathrm{o}(\frac{1}{\chi_A(1/\lambda)})$, quand $\lambda \to 0$, pour tout $A > 0$ (m est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$).*
(2) *Si $\Psi \in \Delta^1$, la réciproque a lieu.*

La preuve est liée à la notion d'espace « L^Ψ*-faible* » ($f \in L^{\Psi,\infty}$ s'il existe $c > 0$ tel que $m(|f| > t) \leqslant \frac{1}{\Psi(ct)}$ pour tout $t > 0$; la version idoine de l'inégalité de Markov assure que $L^\Psi \subseteq L^{\Psi,\infty}$) et au fait que si $\Psi \in \Delta^1$, alors $L^\Psi = L^{\Psi,\infty}$.

Comme la condition du Théorème 3.2 ne fait intervenir que le module des valeurs aux bord, on peut donc construire ϕ comme fonction extérieure et montrer :

Théorème 3.3. *Si $\Psi \in \Delta^2$, il existe des $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ telles que $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ soit compact, mais p-sommant pour aucun $p \geqslant 1$.*

Rappelons que sur un espace de Hilbert (comme H^2), p-sommant équivaut à Hilbert–Schmidt. La condition Δ^2 sert dans la deuxième partie, dans laquelle nous construisons une suite de fonctions $g_n \in H^\Psi$ telles que $\sum_n |g_n| \in L^\Psi$, mais $\sum_n \|C_\phi(g_n)\|^p = +\infty$ pour tout $p < \infty$.

Passons maintenant à la compacité faible. On a le critère suivant (voir [3]) :

Théorème 3.4. *Soit X un sous-espace de M^Ψ. Alors, si $\Psi \in \Delta^0$, un opérateur $T : X \to Y$ de X dans un espace de Banach Y est faiblement compact si et seulement si pour un p, et alors pour tout p, $1 \leqslant p < \infty$, on a la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $\|T(f)\| \leqslant C_\varepsilon \|f\|_p + \varepsilon \|f\|_\Psi$, $\forall f \in X$.*

On en déduit :

Théorème 3.5. *Sous l'hypothèse $\Psi \in \Delta^0$, alors la faible compacité de $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ implique que*

$$\sup_{a\in\mathbb{T}} \left\| C_\phi(u_{a,r}) \right\|_\Psi = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\Psi^{-1}(1/(1-r))} \right), \quad r \to 1,$$

où $u_{a,r}(z) = (\frac{1-r}{1-\bar{a}rz})^2$, $|z| < 1$.

Théorème 3.6. *Supposons $\Psi \in \Delta^2$, alors la condition du Théorème 3.5 implique celle du Théorème 3.2.*

Comme $\Delta^2 \Longrightarrow \Delta^1$, on obtient :

Théorème 3.7. *Si $\Psi \in \Delta^2$, et $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$, on a équivalence entre :*

(1) *C_ϕ est borné pour l'ordre et à valeurs dans M^Ψ ;*
(2) *C_ϕ est compact ;*
(3) *C_ϕ est faiblement compact ;*
(4) *on a la condition de la Proposition 3.1 ;*
(5) *on a la condition du Théorème 3.2 ;*
(6) *on a la condition du Théorème 3.5.*

Bien sûr, pour $C_\phi : H^2 \to H^2$, il n'y a pas équivalence entre (2) et (3) ; et d'après le résultat de Shapiro et Taylor, il n'y a pas équivalence entre (1) et (2). Dans le cas de $\Psi(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1$, les conditions sont plus lisibles : (4), (5) et (6) deviennent respectivement (4′) $\frac{1}{1-|\phi^*|} \in L^p(\mathbb{T}), \forall p \geqslant 1$; (5′) $\forall q \geqslant 1\ \exists C_q > 0 : m(1-|\phi^*| < \lambda) \leqslant C_q \lambda^q$; (6′) $\forall q \geqslant 1$

$\|\phi^n\|_1 = \mathrm{o}(n^{-q})$; et elles sont équivalentes à : (7) $\|\phi^n\|_{\Psi_2} = \mathrm{o}(1/\sqrt{\log n})$. Les conditions (4) et (5) ne dépendent que du module des valeurs de ϕ au bord ; cela permet de construire des fonctions extérieures. On obtient :

Théorème 3.8. *Si $\Psi \in \Delta^2$, il existe des $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ telles que $C_\phi : H^p \to H^p$ soit compact pour $1 \leqslant p < \infty$, mais $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ non compact.*

4. Mesures de Carleson

Rappelons le résultat de McCluer [5] : $C_\phi : H^2 \to H^2$ est compact si et seulement si la mesure-image m_ϕ de m, la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$, par ϕ est une *mesure de Carleson évanescente*.

Une mesure μ sur $\overline{\mathbb{D}}$ est dite de Carleson si : $\mu(W(\xi, h)) \leqslant C\,h$, $\forall \xi \in \mathbb{T}$, $0 < h < 1$, où $W(\xi, h) = \{z \in \overline{\mathbb{D}};\ |z| > 1 - h \text{ et } |\arg(z\bar{\xi})| < h\}$ est la *fenêtre de Carleson*. La mesure de Carleson est évanescente si $\mu(W(\xi, h)) = \mathrm{o}(h)$, uniformément pour $\xi \in \mathbb{T}$. On en déduit :

Théorème 4.1. *Si $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ est compact, alors $C_\phi : H^2 \to H^2$ est aussi compact.*

Rappelons que nous avons vu (Théorème 3.8) que l'inverse n'est pas vrai si $\Psi \in \Delta^2$.

Le principal résultat de cette partie est :

Théorème 4.2. *$C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ est compact si et seulement si, pour tout $A > 0$, on a, quand $h \to 0$:*

$$\sup_{|\xi|=1} m_\phi\big(W(\xi, h)\big) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\Psi[A\Psi^{-1}(1/h)]}\right).$$

Notons que, pour $\Psi(x) = x^p$, le terme de droite est $o\,(h)$. On déduit des Théorème 4.2 et Théorème 3.5 :

Théorème 4.3. *Si $\Psi \in \Delta^0$, $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ est compact si et seulement s'il est faiblement compact.*

Théorème 4.4. *Il existe une fonction d'Orlicz $\Psi \in \Delta^1$ et un opérateur de composition $C_\phi : H^\Psi \to H^\Psi$ qui est compact mais qui n'est pas borné pour l'ordre et à valeurs dans M^Ψ.*

La condition $\Psi \in \Delta^1$ au lieu de $\Psi \in \Delta^2$ ne suffit donc pas pour avoir les équivalences du Théorème 3.7.

Eléments de preuve. Prenons

$$\Psi(x) = \exp\big(\big(\log(x+1)\big)^2\big) - 1$$

et posons $\phi_0(z) = \frac{1+z}{2}$. Soit alors

$$\phi(z) = \phi_0(z)\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Alors C_{ϕ_0} n'est pas compact sur H^2, mais C_ϕ est compact sur H^Ψ (Théorème 4.2). Toutefois, C_ϕ n'est pas borné pour l'ordre sur H^Ψ et à valeurs dans M^Ψ, car sinon, comme $|\phi^*| = |\phi_0^*|$ sur $\mathbb{T}$, C_{ϕ_0} le serait aussi, par la Proposition 3.1. Il serait donc compact sur H^Ψ, donc sur H^2 (Théorème 4.1), ce qui n'est pas. □

Notons que nous avons montré au passage que, même si $|\phi^*| = |\phi_0^*|$, C_ϕ est compact sur H^2, bien que C_{ϕ_0} ne le soit pas. La compacité des opérateurs de composition sur H^p ne peut donc pas être caractérisée par le module des valeurs au bord du symbole.

Indications pour la preuve du Théorème 4.2. Pour toute mesure positive bornée μ sur $\overline{\mathbb{D}}$, on pose :

$$\rho_\mu(h) = \sup_{|\xi|=1} \mu\big(W(\xi, h)\big) \quad \text{et} \quad K_\mu(h) = \sup_{0<t\leqslant h} \frac{\rho_\mu(t)}{t}. \tag{1}$$

Théorème 4.5.

(1) *Si l'injection* $j_\mu : H^\Psi \to L^\Psi(\mu)$ *est compacte, alors* : $\rho_\mu(h) = \mathrm{o}(\frac{1}{\chi_A(1/h)})$, *pour tout* $A > 0$.
(2) *Si pour tout* $A > 0$, *on a* : $K_\mu(h) = \mathrm{o}(\frac{1/h}{\chi_A(1/h)})$, *alors* j_μ *est compacte.*

En général la première condition n'est pas suffisante. Toutefois, dans le cas analytique, les quantités $\rho_{m_\phi}(h)/h$ et $K_{m_\phi}(h)$ sont équivalentes :

Théorème 4.6. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour toute* $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *analytique, on ait* :

$$m_\phi\big(W(\xi, \epsilon h)\big) \leqslant C\epsilon m_\phi\big(W(\xi, h)\big) \quad \textit{pour } 0 < h \leqslant 1 - \big|\phi(0)\big| \textit{ et } 0 < \epsilon < 1. \tag{2}$$

Références

[1] C.C. Cowen, B.D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
[2] M.A. Krasnosel'skiĭ, Ja.B. Rutickiĭ, Convex Functions and Orlicz Spaces, P. Noordhoff, Groningen, 1961.
[3] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, A criterion of weak compactness for operators on subspaces of Orlicz spaces, soumis.
[4] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Composition operators on Hardy–Orlicz spaces, à paraître.
[5] B.D. MacCluer, Compact composition operators on $H_p(B^N)$, Michigan Math. J. 32 (2) (1985) 237–248.
[6] M.M. Rao, Z.D. Ren, Theory of Orlicz spaces, Pure and Applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker, 1991.
[7] J.H. Shapiro, The essential norm of a composition operator, Ann. of Math. 125 (1987) 375–404.
[8] J.H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.
[9] J.H. Shapiro, P.D. Taylor, Compact, nuclear, and Hilbert–Schmidt composition operators on H^2, Indiana Univ. Math. J. 23 (6) (1973) 471–496.
[10] H.J. Schwartz, Composition operators on H^p, Thesis, University of Toledo, 1969.