

Statistique

# Un résultat de consistance pour des SVM fonctionnels par interpolation spline

Nathalie Villa<sup>a</sup>, Fabrice Rossi<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Équipe GRIMM, université Toulouse Le Mirail, 5, allées Antonio-Machado, 31058 Toulouse cedex 9, France*

<sup>b</sup> *Projet AxIS, INRIA-Rocquencourt, domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France*

Reçu le 15 avril 2006 ; accepté après révision le 26 septembre 2006

Présenté par Paul Deheuvels

---

## Résumé

Nous proposons dans cette Note une nouvelle méthode de discrimination de données fonctionnelles par Support Vector Machine (SVM). Dans nos travaux antérieurs, nous nous appuyions sur une projection sur une base hilbertienne tronquée ; nous proposons ici d'utiliser une interpolation spline implicite, afin de pouvoir construire un SVM sur les dérivées des fonctions initiales. Pour cela, nous construisons un noyau qui s'applique directement sur les discrétisations des observations. Nous montrons la consistance universelle d'une telle approche. **Pour citer cet article :** *N. Villa, F. Rossi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**A consistency result for functional SVM by spline interpolation.** This Note proposes a new methodology for function classification with Support Vector Machine (SVM). Rather than relying on projection on a truncated Hilbert basis as in our previous work, we use an implicit spline interpolation that allows us to compute SVM on the derivatives of the studied functions. To that end, we propose a kernel defined directly on the discretizations of the observed functions. We show that this method is universally consistent. **To cite this article :** *N. Villa, F. Rossi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

We emphasize in [6] the interest of using classical SVM [9] on the derivatives of the original functions for some kind of data sets (near infra-red spectrometric curves for example). We propose here a practical and consistent methodology for using SVM for binary classifications when the regressor is a smooth function.

Let  $(X, Y)$  be a pair of random variables where  $X$  takes its values in the Sobolev space  $\mathcal{H}^m([0, 1]) = \{h \in L^2([0, 1]) : \forall j = 1, \dots, m, D^j h \text{ exists (in a weak sense) and } D^j h \in L^2([0, 1])\}$  and  $Y \in \{-1, 1\}$ . We are given  $n$  observations of this random pair,  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ; furthermore, the  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are not completely known as we are only given a discretization of them:  $\mathbf{x}_i = (x_i(t_1), \dots, x_i(t_d))^T$ .

---

Adresses e-mail : [villa@univ-tlse2.fr](mailto:villa@univ-tlse2.fr) (N. Villa), [Fabrice.Rossi@inria.fr](mailto:Fabrice.Rossi@inria.fr) (F. Rossi).

The main point of this Note is to represent the observations of  $X$  by a  $L$ -spline interpolation for which the derivatives are implicitly calculated through the discretization. This  $L$ -spline interpolation minimizes a penalty defined by a differential operator  $L = D^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j D^j$ . This operator allows us to decompose the space  $\mathcal{H}^m$  as  $\mathcal{H}^m = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  where  $\mathcal{H}_0 = \text{Ker } L$  is a  $m$ -dimensional Hilbert space and  $\mathcal{H}_1$  is a reproducing kernel Hilbert space (RKHS) with kernel  $K$ .  $\mathcal{H}_1$  is defined by  $m$  boundary conditions (for all  $h \in \mathcal{H}_1$  and all  $j = 1, \dots, m$ ,  $B^j h = 0$ ) and the inner product: for all  $u, v \in \mathcal{H}_1$ ,  $\langle u, v \rangle_1 = \int_{[0,1]} Lu(t)Lv(t) dt$  (see [2] or [1] for further informations about RKHS). On the space  $\mathcal{H}_1$ , the  $L$ -spline representation of a discretization is given by the following theorem:

**Theorem 1.** ([2]) *Let  $x \in \mathcal{H}_1$  be a function known at  $t_1, \dots, t_d$ . We assume that the matrix  $\mathbf{K}_d = (K(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,d}$  is positive definite. Then, there exists a unique interpolation function  $h \in \mathcal{H}_1$  at  $t_1, \dots, t_d$ , such that  $\|h\|_1 \leq \|u\|_1$  for any interpolation function  $u \in \mathcal{H}_1$ .  $h$  is given by:  $h = \sum_{i=1}^d c_i K(t_i, \cdot)$ , where  $c = \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{x}$  and  $\mathbf{x} = (x(t_1), \dots, x(t_d))^T$ .*

*Moreover, if  $h_1$  and  $h_2$  are the respective interpolation functions of  $x_1$  and  $x_2 \in \mathcal{H}_1$  defined as above then,  $\langle h_1, h_2 \rangle_1 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{x}_2 = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle_{(\mathbb{R}^d, \mathbf{K}_d^{-1})}$ , where  $(\mathbb{R}^d, \mathbf{K}_d^{-1})$  is  $\mathbb{R}^d$  with the inner product induced by the matrix  $\mathbf{K}_d^{-1}$ .*

Let then, for all  $i = 1, \dots, n$ ,  $h_i$  be the  $L$ -spline interpolating the observation  $x_i$  at  $t_1, \dots, t_d$ . Provided that  $\mathbf{K}_d = (K(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,d}$  is positive definite, we can construct a SVM on  $(h_i)_{i=1,\dots,n}$  through the discretizations  $(\mathbf{x}_i)_{i=1,\dots,n}$ :

**Theorem 2.** *Let  $G_\gamma^d$  be the Gaussian kernel with parameter  $\gamma$  on  $\mathbb{R}^d$  and  $G_\gamma^\infty$  the Gaussian kernel with parameter  $\gamma$  on  $L^2([0, 1])$  ( $G_\gamma(u, v) = e^{-\gamma \|u-v\|_{\mathbb{R}^d \text{ or } L^2}^2}$ ). Then, a SVM on the derivatives of  $h_1, \dots, h_n$  (denoted  $\phi_h^{n,d}$ ) defined by*

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j G_\gamma^\infty(Lh_i, Lh_j)$$

with

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad 1 \leq i \leq n,$$

is equivalent to a SVM on the discretizations  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  (denoted  $\phi_{\mathbf{x}}^{n,d}$ ):

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j G_\gamma^d \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$$

with

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Finally, we obtain a consistency result for this model:

**Theorem 3.** *Under the assumptions*

(A1)  $X$  is a bounded random variable taking its values in  $\mathcal{H}_1$ ,

(A2)  $(\tau_d)_d$  is a sequence of discretization points in  $[0, 1]$  such that, for all  $d \geq 1$ ,  $\tau_d = \{t_k\}_{k=1,\dots,d}$ , the matrix  $\mathbf{K}_d$  is definite positive and  $\text{Span}\{K(t, \cdot), t \in \bigcup_{d \geq 1} \tau_d\}$  is dense in  $\mathcal{H}_1$ ,

(A3)  $(C_n^d)_n$  is a sequence such that  $C_n^d = \mathcal{O}(n^{1-\beta_d})$  for a  $0 < \beta_d < 1/d$ .

The sequence of SVM classifiers  $\phi_h^{n,d}$  defined as in Theorem 1, with  $C = (C_n^d)_n$ , is universally consistent in  $\mathbb{R}^d$ , that is:

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Err} \phi_h^{n,d} = \text{Err}^*$$

where  $\text{Err}^*$  is the Bayes error,  $\inf_{\phi: \mathcal{H}_1 \rightarrow \{-1, 1\}} \mathbb{P}(\phi(X) \neq Y)$ , and  $\text{Err} \phi$  is the error of a classifier  $\phi$ ,  $\mathbb{P}(\phi(X) \neq Y)$ .

### 1. Introduction

Nous nous intéressons ici à l'utilisation des SVM pour le traitement de données fonctionnelles. De manière plus précise, il s'agit de résoudre des problèmes de discrimination binaire pour lesquels la variable explicative est fonctionnelle. Nous montrons dans [6] l'intérêt pratique, pour certains types de données, d'utiliser des SVM (Support Vector Machine, voir [9]) sur les dérivées des fonctions initiales ; nous proposons, dans cette Note, une méthodologie permettant de mettre en œuvre un tel traitement et démontrons un résultat de consistance universel associé à celle-ci.

Pour cela, nous étudions un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  où  $X$  est supposée «régulière» et prend ses valeurs dans l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^m([0, 1]) = \{h \in L^2([0, 1]) : \forall j = 1, \dots, m, D^j h \text{ existe (au sens faible) et } D^j h \in L^2([0, 1])\}$  et  $Y \in \{-1, 1\}$ . Ce couple est connu grâce à  $n$  observations,  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  ; en fait, les  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ne sont pas connues de manière exacte mais simplement au travers d'une discrétisation  $\mathbf{x}_i = (x_i(t_1), \dots, x_i(t_d))^T$  (les points de discrétisation sont les mêmes pour tous les  $x_i$  et sont déterministes). Le problème est alors de construire, à partir de ces données, un classifieur capable de prédire  $Y$  connaissant  $X$ . En tirant partie de la structure d'espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS) de  $\mathcal{H}^m([0, 1])$ , les observations de  $X$  seront représentées par une interpolation spline sur laquelle les dérivées s'expriment de manière naturelle en fonction de la discrétisation.

### 2. Interpolation $L$ -spline

On choisit de représenter les observations de  $\mathcal{H}^m([0, 1])$  à travers une interpolation  $L$ -spline : celle-ci interpole exactement la fonction aux points de discrétisation tout en minimisant une pénalité définie à partir d'un opérateur différentiel  $L = D^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j D^j$ . On peut montrer que, si le noyau de cet opérateur,  $\text{Ker } L = \mathcal{H}_0$  est un sous-espace de dimension  $m$  de  $\mathcal{H}^m$ , on peut écrire  $\mathcal{H}^m = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  où  $\mathcal{H}_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}^m$  défini par  $m$  conditions aux bornes,  $\forall h \in \mathcal{H}_1$  et  $\forall j = 1, \dots, m, B^j h = 0$ , et muni du produit scalaire  $\forall u, v \in \mathcal{H}_1, \langle u, v \rangle_1 = \langle Lu, Lv \rangle_{L^2} = \int_{[0,1]} Lu(t)Lv(t) dt$  (voir, par exemple, [2] ou [1]).  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  sont deux espaces de Hilbert à noyau reproduisant et on note  $K$  le noyau reproduisant de  $\mathcal{H}_1$  ; on donne, dans [10], des exemples de décompositions de  $\mathcal{H}^m$  et on explique, sur ces exemples, comment calculer  $K$ .

Cette décomposition permet de définir simplement le produit scalaire entre les représentations des fonctions à partir des discrétisations initiales :

**Théorème 2.1.** ([2]) *Soit  $x \in \mathcal{H}_1$  une fonction connue aux points de discrétisation  $t_1, \dots, t_d$ . Supposons, en outre, que la matrice  $\mathbf{K}_d = (K(t_i, t_j))_{i,j}$  soit définie positive. Alors, il existe une unique fonction d'interpolation  $h \in \mathcal{H}_1$  aux points  $t_1, \dots, t_d$  telle que  $\|h\|_1 \leq \|u\|_1$  pour toute fonction d'interpolation  $u \in \mathcal{H}_1$ .  $h$  est donnée par :*

$$h = \sum_{i=1}^d c_i K(t_i, \cdot)$$

où  $c = \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{x}$  avec  $\mathbf{x} = (x(t_1), \dots, x(t_d))^T$ .

De plus, si  $h_1$  et  $h_2$  sont les deux fonctions d'interpolation de  $x_1$  et  $x_2 \in \mathcal{H}_1$  comme définies ci-dessus, alors

$$\langle h_1, h_2 \rangle_1 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{x}_2 = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle_{(\mathbb{R}^d, \mathbf{K}_d^{-1})} \tag{1}$$

où  $(\mathbb{R}^d, \mathbf{K}_d^{-1})$  est l'espace  $\mathbb{R}^d$  muni du produit scalaire induit par la matrice  $\mathbf{K}_d^{-1}$ .

La fonction d'interpolation spline est donc simplement  $h = \mathcal{P}_{\text{Vect}\{K(t_k, \cdot), k=1, \dots, d\}}(x)$ , où  $\mathcal{P}_V$  est l'opérateur de projection orthogonale sur  $V$  dans  $\mathcal{H}_1$ , ce qui rapproche la méthodologie proposée ici de celle développée dans [6] et inspirée des travaux de [3]. Ceci permet de déterminer la perte d'information induite par l'interpolation, notamment en terme de perturbation de l'erreur de Bayes, comme le montre le résultat suivant :

**Lemme 2.2.** *Soient*

(H1)  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{H}_1$  ;

(H2)  $(\tau_d)_{d \geq 1}$  une suite de points de discrétisation de  $[0, 1]$  telle que  $\forall d \geq 1$ ,  $\tau_d = \{t_k\}_{k=1, \dots, d}$ , la matrice  $\mathbf{K}_d = (K(t_i, t_j))_{i, j=1, \dots, d}$  est inversible et  $\text{Vect}\{K(t, \cdot), t \in \bigcup_{d \geq 1} \tau_d\}$  est dense dans  $\mathcal{H}_1$ .

On note  $V_d = \text{Vect}\{K(t, \cdot), t \in \tau_d\}$  et  $\mathcal{P}_d(x) = \mathcal{P}_{V_d}(x)$ . On a alors

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \text{Err}_d^* = \text{Err}^* \quad (2)$$

avec  $\text{Err}_d^* = \inf_{\phi: V_d \rightarrow \{-1, 1\}} \mathbb{P}(\phi(\mathcal{P}_d(X)) \neq Y)$  (erreur de Bayes de la représentation  $L$ -spline), et  $\text{Err}^*$  est l'erreur de Bayes donnée par :  $\inf_{\phi: \mathcal{H}_1 \rightarrow \{-1, 1\}} \mathbb{P}(\phi(X) \neq Y)$ .

**Démonstration.** Les  $\text{Vect}\{K(t, \cdot), t \in \tau_d\}$  ( $d \geq 1$ ) sont des ensembles emboîtés et, par densité,  $\forall x \in \mathcal{H}_1$ ,  $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_d(x) = x$  dans  $\mathcal{H}_1$ .

Par ailleurs, les  $\sigma$ -algèbres  $\sigma(\mathcal{P}_d(X)) = \sigma(\mathbf{K}_d^{-1}(X(t_1), \dots, X(t_d))^T)$  forment clairement une filtration. Comme  $\mathbb{E}(|Y|) \leq 1$ ,  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{P}_d(X))$  est une martingale uniformément intégrable pour cette filtration (cf. [5], Lemme 35 page 154), cette martingale converge en norme  $L^1$  vers  $\mathbb{E}(Y|\sigma(\bigcup_d \sigma(\mathcal{P}_d(X))))$  (cf. Théorème 36 page 154 de [5]), dont la valeur est  $\mathbb{E}(Y|X)$  (puisque  $\mathcal{P}_d(X)$  est fonction de  $X$ ,  $\sigma(\bigcup_d \sigma(\mathcal{P}_d(X))) \subset \sigma(X)$  et, inversement,  $X$  est  $\sigma(\bigcup_d \sigma(\mathcal{P}_d(X)))$ -mesurable comme limite des variables aléatoires  $(\mathcal{P}_d(X))_d$ ,  $\sigma(\bigcup_d \sigma(\mathcal{P}_d(X)))$ -mesurables).

Nous concluons en utilisant l'inégalité classique  $\text{Err}_d^* - \text{Err}^* \leq 2\mathbb{E}|\mathbb{E}(Y|\mathcal{P}_d(X)) - \mathbb{E}(Y|X)|$  (cf. e.g. [4], Théorème 2.2).  $\square$

### 3. SVM sur dérivées

Notons,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $h_i$  la spline d'interpolation de l'observation  $x_i$  aux points de discrétisation  $t_1, \dots, t_d$  définie comme dans le Théorème 2.1. Alors, si la matrice  $\mathbf{K}_d = (K(t_i, t_j))_{i, j=1, \dots, d}$  est inversible, on peut définir un SVM sur les dérivées des  $L$ -splines d'interpolation par le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** Soit  $G_\gamma^d$  le noyau gaussien de paramètre  $\gamma$  sur  $\mathbb{R}^d$  et  $G_\gamma^\infty$  le noyau gaussien de paramètre  $\gamma$  sur  $L^2([0, 1])$  ( $G_\gamma(u, v) = e^{-\gamma \|u-v\|_{\mathbb{R}^d}^2}$  ou  $L^2$ ). Alors, le SVM sur les dérivées des fonctions  $h_1, \dots, h_n$  (noté  $\phi_h^{n,d}$ ) défini par

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i, j=1}^n \alpha_i \alpha_j G_\gamma^\infty(Lh_i, Lh_j)$$

avec

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad 1 \leq i \leq n,$$

est équivalent au SVM sur les discrétisations  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  (noté  $\phi_{\mathbf{x}}^{n,d}$ ) :

$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i, j=1}^n \alpha_i \alpha_j G_\gamma^d \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$$

avec

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Démonstration.** Il suffit de constater, d'après (1), que  $\forall i, j = 1, \dots, n$ ,  $G_\gamma^\infty(Lh_i, Lh_j) = e^{-\gamma \|Lh_i - Lh_j\|_{L^2}^2} = e^{-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_{(\mathbb{R}^d, \mathbf{K}^{-1})}^2} = e^{-\gamma \|\mathbf{K}_d^{-1/2} \mathbf{x}_i - \mathbf{K}_d^{-1/2} \mathbf{x}_j\|_{\mathbb{R}^d}^2}$ .  $\square$

Or, [8] démontre la consistance universelle des SVM  $d$ -dimensionnels. Ainsi, à suite de discrétisation fixée  $t_1, \dots, t_d$ , on peut démontrer la consistance universelle des SVM  $\phi_h^{n,d}$  vers l'erreur de Bayes de la représentation  $L$ -spline ; ainsi, à discrétisation fixée,  $\phi_h^{n,d}$  est asymptotiquement optimal :

**Lemme 3.2.** Soit  $t_1, \dots, t_d$  des points de discrétisation tels que  $\mathbf{K}_d = (K(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,d}$  est inversible. Supposons que

- (H3)  $(C_n^d)_n$  est une suite telle que  $C_n^d = \mathcal{O}(n^{1-\beta_d})$  pour  $0 < \beta_d < 1/d$  ;
- (H4)  $X$  est une variable aléatoire bornée dans  $\mathcal{H}_1$ .

Alors, le SVM  $\phi_h^{n,d}$  défini comme dans le Théorème 3.1, avec pour paramètre  $C = C_n^d$ , est universellement consistant dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Err} \phi_h^{n,d} = \text{Err}_d^* \tag{3}$$

pour  $\text{Err} \phi = \mathbb{P}(\phi(X) \neq Y)$ .

**Démonstration.** On note  $\mathbf{X} = (X(t_1), \dots, X(t_d))^T$ . Par le Théorème 3.1,  $\text{Err} \phi_h^{n,d} = \text{Err} \phi_{\mathbf{X}}^{n,d}$  et, puisque  $\mathbf{K}_d$  est inversible,  $\inf_{\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \{-1,1\}} \mathbb{P}(\phi(\mathbf{X}) \neq Y) = \inf_{\phi: \mathcal{V}_d \rightarrow \{-1,1\}} \mathbb{P}(\phi(\mathcal{P}_d(X)) \neq Y) = \text{Err}_d^*$ . Or, d'après [8], les SVM dans  $\mathbb{R}^d$  sont universellement consistants ; pour cela, on doit vérifier :

1. la variable aléatoire explicative prend ses valeurs dans un compact de  $\mathbb{R}^d$  : comme  $X$  prend ses valeurs dans un borné de  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathbf{X}$  prend ses valeurs dans un borné de  $\mathbb{R}^d$ , c'est-à-dire, un compact de  $\mathbb{R}^d$ , noté  $U$  ;
2. le noyau utilisé doit être *universel* : Steinwart montre dans [7] que le noyau gaussien  $d$ -dimensionnel est universel. Il montre aussi que tout noyau obtenu en composant une fonction continue et injective avec un noyau universel est lui aussi universel. Or,  $\mathbf{K}_d^{-1/2}$  est continue et injective, et donc le noyau  $G_\gamma^d \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}$  est universel : l'ensemble des fonctions de la forme  $\langle \Phi \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}(\cdot), w \rangle_{\mathcal{X}}$  ( $w \in \mathcal{X}$ ) est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur un compact de  $\mathbb{R}^d$  (où  $\mathcal{X}$  désigne le RKHS associé au noyau  $G_\gamma^d \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}$ ) ;
3. on doit contrôler le nombre de couverture  $\mathcal{N}(G_\gamma^d \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}, \epsilon)$ , c'est-à-dire le nombre minimal de boules de rayon  $\epsilon$  (au sens de la métrique de  $\mathbb{R}^d$  définie par le noyau  $G_\gamma^d \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}$ ) nécessaires pour recouvrir  $U$  le support compact de  $\mathbf{X}$ . Or, on montre aisément que  $\mathcal{N}(G_\gamma^d \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}, \epsilon) \leq \mathcal{N}(G_\gamma^d, \epsilon)$ , puis on utilise [8] pour obtenir  $\mathcal{N}(G_\gamma^d, \epsilon) = \mathcal{O}_n(\epsilon^{-d})$  et donc  $\mathcal{N}(G_\gamma^d \circ \mathbf{K}_d^{-1/2}, \epsilon) = \mathcal{O}_n(\epsilon^{-d})$  ;
4. la suite  $(C_n^d)_n$  est bien de la forme requise ( $\mathcal{O}(n^{1-\beta_d})$ ) avec  $0 < \beta_d < 1/d$ .

On conclut donc, par le Théorème 2 de [8], que  $\text{Err} \phi_h^{n,d} = \text{Err} \phi_{\mathbf{X}}^{n,d} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \{-1,1\}} \mathbb{P}(\phi(\mathbf{X}) \neq Y) = \text{Err}_d^*$ .  $\square$

#### 4. Consistance

L'utilisation de noyaux définis comme dans le Théorème 3.1 sous les hypothèses formulées dans les Lemmes 2.2 et 3.2 conduit à des SVM universellement consistants (double limite lorsque le nombre de points de discrétisation tend vers l'infini et le nombre d'observations tend vers l'infini) :

**Théorème 4.1.** Sous les hypothèses (H1)–(H4), le SVM défini comme dans le Théorème 3.1,  $\phi_h^{n,d}$ , pour les points d'interpolation  $(\tau_d)_{d \geq 1}$  et la suite  $C = (C_n^d)_n$  est universellement consistant dans  $\mathcal{H}_1$  :

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Err} \phi_h^{n,d} = \text{Err}^* .$$

**Démonstration.** On écrit  $\text{Err} \phi_h^{n,d} - \text{Err}^* = (\text{Err} \phi_h^{n,d} - \text{Err}_d^*) + (\text{Err}_d^* - \text{Err}^*)$ . Soit alors  $\epsilon > 0$ . Par le Lemme 2.2, il existe  $D_0 > 0 : \forall d \geq D_0, \text{Err}_d^* - \text{Err}^* \leq \epsilon$ . Soit alors  $d \geq D_0$  ; par le Lemme 3.2,  $\exists N_0 > 0 : \forall n \geq N_0, (\text{Err} \phi_h^{n,d} - \text{Err}_d^*) \leq \epsilon$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Remarque 1.** La discrétisation des fonctions est en général induite par le problème. Si  $\tau$  est une discrétisation donnée, on peut supposer, quitte à retirer quelques points, que la matrice  $(K(t, t'))_{t, t' \in \tau}$  est inversible. Il existe alors une suite de points de discrétisation telle que  $\tau = \tau_1$  et qui vérifie l'hypothèse (H2) :

**Proposition 4.2.** *Si  $\tau$  est un ensemble fini de points de  $[0, 1]$  tels que  $(K(t, t'))_{t, t' \in \tau}$  est inversible alors, il existe un ensemble dénombrable  $\mathcal{D}_0 = (t_k)_{k \geq 1} \subset [0, 1]$  tel que*

- $\tau \subset \mathcal{D}_0$  ;
- $\text{Vect}\{K(t, \cdot), t \in \mathcal{D}_0\}$  est dense dans  $\mathcal{H}_1$  ;
- pour tout  $d \geq 1$ , la matrice  $(K(t_i, t_j))_{i, j=1, \dots, d}$  est inversible.

**Démonstration.** Par le Théorème 15 de [1], l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  est séparable (comme ensemble de fonctions continues) dès que  $m \geq 1$ . Or,  $(K(t, t'))_{t, t' \in \tau}$  est inversible est équivalent au fait que  $\{K(t, \cdot), t \in \tau\}$  est une famille de fonctions linéairement indépendantes. Ainsi, par le Théorème 8 de [1], il existe un support dénombrable de  $\mathcal{H}$  contenant  $\tau$ , c'est-à-dire, un ensemble dénombrable  $\mathcal{D}_0$  tel que  $\tau \subset \mathcal{D}_0$ , les  $\{K(t, \cdot), t \in \mathcal{D}_0\}$  sont linéairement indépendants et  $\text{Vect}\{K(t, \cdot), t \in \mathcal{D}_0\}$  est dense dans  $\mathcal{H}_1$ .  $\square$

**Remarque 2.** En pratique, la matrice  $(K(t, t'))_{t, t' \in \tau}$  est souvent mal conditionnée dès que le cardinal de  $\tau$  est élevé. Ainsi, il sera donc préférable d'introduire un paramètre de régularisation (splines de lissage) afin de permettre l'inversion de celle-ci.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les deux rapporteurs pour leurs recommandations pertinentes qui ont permis l'amélioration de cette Note.

## Références

- [1] A. Berlinet, C. Thomas-Agnan, *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*, Kluwer Academic Publisher, 2004.
- [2] P. Besse, J. Ramsay, Principal component analysis of sampled curves, *Psychometrika* 51 (1986) 285–311.
- [3] G. Biau, F. Bunea, M. Wegkamp, Functional classification in Hilbert spaces, *IEEE Transactions on Information Theory* 51 (2005) 2163–2172.
- [4] L. Devroye, L. Györfi, G. Lugosi, *A Probabilistic Theory for Pattern Recognition*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [5] D. Pollard, *A User's Guide to Measure Theoretic Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [6] F. Rossi, N. Villa, Support vector machine for functional data classification, *Neurocomputing* 69 (7–9) (2006) 730–742.
- [7] I. Steinwart, On the influence of the kernel on the consistency of support vector machines, *Journal of Machine Learning Research* 2 (2001) 67–93.
- [8] I. Steinwart, Support vector machines are universally consistent, *Journal of Complexity* 18 (2002) 768–791.
- [9] V. Vapnik, *Statistical Learning Theory*, Wiley, New York, 1998.
- [10] N. Villa, F. Rossi, SVM fonctionnels par interpolation spline, in: *Proceedings of 38ièmes Journées de Statistique*, Clamart, France.