

Théorie des nombres
Sur l'ensemble exceptionnel de Weyl

Bakir Farhi

Département de mathématiques, université du Maine, avenue Olivier-Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France

Reçu le 10 mars 2006 ; accepté après révision le 5 septembre 2006

Disponible sur Internet le 9 octobre 2006

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Il est connu depuis H. Weyl qu'étant donné un réel $r > 1$, l'ensemble W_r des réels $\lambda > 0$ pour lesquels la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équirépartie modulo 1, est de mesure de Lebesgue nulle. Dans cette Note, sans utiliser la notion de la dimension de Hausdorff, on démontre entre autres que ces ensembles W_r sont infinis non dénombrables. *Pour citer cet article : B. Farhi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

About Weyl's exceptional set. It is well known since H. Weyl's work that for any given real number $r > 1$, the set W_r consisting of positive real numbers λ for which the sequence $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is not uniformly distributed modulo 1, has Lebesgue measure zero. In this Note, without use the concept of Hausdorff dimension, one shows among other things that these sets W_r are uncountable. *To cite this article: B. Farhi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Throughout this Note, $[x]$ and $\langle x \rangle$ denote respectively the integer and the fractional part of a given real number x and $\|x\|$ denotes the distance from x to the nearest integer. We also denote μ the Lebesgue measure on \mathbb{R} . Further, given $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequence of real numbers, N a positive integer and E a subset of $[0, 1[$, we set: $A(E; N; (x_n)) := \#\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N \text{ and } \langle x_n \rangle \in E\}$.

The concept of uniform distribution modulo 1 was introduced by H. Weyl [7] in 1916. A real sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is said to be uniformly distributed modulo 1 if for any subinterval I of $[0, 1[$, we have $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{A(I; N; (x_n))}{N} = \mu(I)$. The famous Weyl's criterion (see e. g. [7]) states that a necessary and sufficiently condition for a real sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to be uniformly distributed modulo 1 is $\sum_{n=1}^N e^{2\pi i h x_n} = o(N)$ ($\forall h \in \mathbb{Z}^*$). This useful criterion was applied for the first time by Weyl himself in order to show several results about the uniform distribution modulo 1, in particular the one which claims that an arithmetic progression is uniformly distributed modulo 1 if and only if it has an irrational reason. Further, it is interesting to precise that we do not have an analogous result to this latter, concerning geometric progressions. Moreover, we know from [7] that for any real number $r > 1$, the geometric progression $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is uniformly

Adresse e-mail : Bakir.Farhi@univ-lemans.fr (B. Farhi).

distributed modulo 1 for μ -almost all real positive number λ . We also know (through the result by J.F. Koksma [3]) that for any positive real number λ , the geometric progression $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is uniformly distributed modulo 1 for μ -almost all $r > 1$. The corresponding sets of Lebesgue measure zero are called respectively ‘Weyl’s exceptional sets’ and ‘Koksma’s exceptional sets’. In spite of these two results showing that almost all geometric progressions are uniformly distributed modulo 1, we do not know any explicit real number $r > 1$ for which the sequence $(r^n)_n$ is uniformly distributed modulo 1. On the contrary, examples of real numbers $r > 1$ for which the sequence $(r^n)_n$ is not uniformly distributed modulo 1 are known, but they are all algebraic numbers. Precisely, they are PV numbers or Salem’s numbers (see e.g. [1] for the definition of these numbers).

Geometric progressions having a transcendental reason and which are not uniformly distributed modulo 1 appeared in the article [2] by D.W. Boyd which was devoted to studying the optimality of some algebraicity criterion due to C. Pisot [5]. Actually, it is a well-known result that there exist transcendental real numbers $r > 1$ for which the sequence of powers of r is not uniformly distributed modulo 1. Actually, this is nothing else but an immediate consequence of the more general result which states that the Koksma’s exceptional sets are uncountable (see Corollary 3.6 of [4]).

For $r > 1$, let E_r , D_r and W_r denote respectively: the set of the real positive numbers λ satisfying $\|\lambda r^n\| \leq \frac{1}{r-1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), the set of the real positive numbers λ for which the sequence $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is not dense modulo 1 and the set of the real positive numbers λ for which the sequence $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is not uniformly distributed modulo 1. In this Note, without use the concept of Hausdorff dimension (like in [6]) we show the following results:

Theorem 1. *For all real number $r > 1$, the set E_r is uncountable.*

Corollary 2. *For all real number $r \in [3, +\infty[\cup \{2, \frac{5}{2}\}$, the set D_r is uncountable.*

Corollary 3. *For all real number $r > 1$, the set W_r is uncountable.*

Theorem 4. *For all real number $r > 2$, the set D_r is infinite.*

1. Introduction et notations

Dans tout ce qui suit, les parties entières et fractionnaires d’un réel x sont notées respectivement $\lfloor x \rfloor$ et $\langle x \rangle$ et la valeur absolue de la différence entre x et l’entier relatif qui lui est le plus proche est notée $\|x\|$. On note aussi μ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Par ailleurs, étant donnée une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on pose pour tout entier positif N et tout sous-ensemble E de $[0, 1[$:

$$A(E; N; (x_n)) := \#\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N \text{ et } \langle x_n \rangle \in E\}.$$

La notion d’équipartition modulo 1 a été introduite par H. Weyl [7] en 1916. Une suite réelle $(x_n)_n$ est dite équirépartie modulo 1 si pour tout sous-intervalle I de $[0, 1[$, on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{A(I; N; (x_n))}{N} = \mu(I)$. Le critère établi par Weyl dans [7] affirme qu’une condition nécessaire et suffisante pour qu’une suite réelle $(x_n)_n$ soit équirépartie modulo 1 est d’avoir $\sum_{n=1}^N e^{2\pi i h x_n} = o(N)$ ($\forall h \in \mathbb{Z}^*$). Ce critère fort utile a été utilisé par Weyl lui-même pour démontrer plusieurs résultats d’équipartition modulo 1, notamment celui qui affirme qu’une progression arithmétique est équirépartie modulo 1 si et seulement si elle est de raison irrationnelle. Il est par ailleurs intéressant de préciser qu’on ne possède pas de résultat analogue à ce dernier, concernant les progressions géométriques ; mais on sait tout de même (cf. [7]) qu’étant donné un réel $r > 1$, la progression géométrique $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 pour μ -presque tout réel $\lambda > 0$. On sait aussi (depuis J.F. Koksma [3]) qu’étant donné un réel $\lambda > 0$, la suite géométrique $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 pour μ -presque tout réel $r > 1$. Les types d’ensembles de mesure nulle correspondant à ces deux derniers résultats sont appelés respectivement « ensembles exceptionnels de Weyl » et « ensembles exceptionnels de Koksma ». Malgré ces deux résultats prouvant l’abondance des progressions géométriques équiréparties modulo 1, on ne connaît aucun réel $r > 1$ pour lequel la suite des puissances de r est équirépartie modulo 1. Au contraire, des exemples explicites et non triviaux de progressions géométriques n’étant pas équiréparties modulo 1 sont bien connus mais ils correspondent tous à une raison r algébrique, qui est plus précisément un PV-nombre ou un nombre de Salem (cf. [1] pour la définition de ces nombres).

Les progressions géométriques réelles de raison transcendante > 1 , n’étant pas équirépartie modulo 1, sont apparus dès 1969 dans l’article [2] de D.W. Boyd dont le but est de montrer qu’un certain critère d’algébricité de C. Pisot [5]

est optimal. Actuellement, on a même confirmé l’existence de réels transcendants $r > 1$ pour lesquels la suite des puissances de r n’est pas équirépartie modulo 1 ; en fait ceci n’est qu’une conséquence immédiate d’un résultat plus général affirmant l’infinitude non dénombrable des ensembles exceptionnels de Koksma (cf. Corollaire 3.6 de [4]).

Pour tout réel $r > 1$, on désigne respectivement par E_r , D_r et W_r : l’ensemble des réels $\lambda > 0$ satisfaisant $\|\lambda r^n\| \leq \frac{1}{r-1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), l’ensemble des réels $\lambda > 0$ pour lesquels la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n’est pas dense modulo 1 et l’ensemble des réels $\lambda > 0$ pour lesquels la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n’est pas équirépartie modulo 1. Dans cette note, sans utiliser la notion de la dimension de Hausdorff (comme dans [6]), on démontre les résultats suivants :

2. Résultats

Théorème 2.1. *Pour tout réel $r > 1$, l’ensemble E_r est infini non dénombrable.*

Démonstration. Lorsque $r \leq 3$, on a évidemment $E_r =]0, +\infty[$ qui est bien infini non dénombrable. Supposons par la suite que $r > 3$. Pour montrer que l’ensemble E_r du théorème est infini non dénombrable, nous allons construire une application injective σ de l’ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (des applications de \mathbb{N} dans $\{0, 1\}$) dans E_r . Dans un premier temps, on associe à tout $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, la suite d’entiers positifs $u_n(f)$ définie par :

$$\begin{aligned} u_0(f) &= 1, \\ u_{n+1}(f) &= \lfloor r \cdot u_n(f) \rfloor + f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{1}$$

Fixons $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, et posons provisoirement $u_n = u_n(f)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). La relation (1) entraîne que l’on a :

$$r u_n - 1 < u_{n+1} \leq r u_n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Par suite, en utilisant cette dernière double inégalité, on vérifie aisément que les deux suites réelles $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} x_n := \frac{u_n}{r^n} - \frac{1}{r^n(r-1)} \\ y_n := \frac{u_n}{r^n} + \frac{1}{r^n(r-1)} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

sont adjacentes, plus précisément : $(x_n)_n$ est croissante, $(y_n)_n$ est décroissante et $x_n - y_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l’infini. Ces deux suites sont donc convergentes vers une même limite $\lambda = \lambda(f)$ (dépendant de f) qui vérifie forcément :

$$x_n \leq \lambda \leq y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ceci donne :

$$|\lambda r^n - u_n| \leq \frac{1}{r-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Maintenant puisque r est supposé > 3 , on a $\frac{1}{r-1} < \frac{1}{2}$ et la relation (2) montre donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l’entier u_n est l’entier le plus proche du réel λr^n . Par conséquent, on a : $\|\lambda r^n\| = |\lambda r^n - u_n| \leq \frac{1}{r-1}$, ce qui montre bien que $\lambda = \lambda(f)$ appartient à l’ensemble E_r du théorème.

On a ainsi établi une application $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow E_r$ qui associe à tout $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, le réel $\lambda(f)$.

En munissant l’ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de l’ordre lexicographique usuel et l’ensemble E_r de l’ordre induit de l’ordre usuel de \mathbb{R} , on va montrer dans ce qui suit que σ est strictement croissante relativement à ces ordres, ce qui entraînera qu’elle est injective et conclura cette démonstration.

Soient f et g deux éléments arbitraires de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $f < g$ pour l’ordre lexicographique. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que l’on ait $f(i) = g(i)$ pour $0 \leq i < k$ et $f(k) < g(k)$. On a donc certainement $f(k) = 0$ et $g(k) = 1$. Par suite, une simple récurrence partant de la définition même des suites $(u_n(f))_n$ et $(u_n(g))_n$ montre que l’on a :

$$\begin{aligned} u_n(f) &= u_n(g) \quad \text{pour } n \in \{0, \dots, k\} \text{ et} \\ u_{k+1}(f) - u_{k+1}(g) &= f(k) - g(k) = -1. \end{aligned}$$

D’où :

$$\begin{aligned} \sigma(f) - \sigma(g) &= \frac{\sigma(f)r^{k+1} - u_{k+1}(f)}{r^{k+1}} - \frac{\sigma(g)r^{k+1} - u_{k+1}(g)}{r^{k+1}} - \frac{1}{r^{k+1}} \\ &\leq \frac{|\sigma(f)r^{k+1} - u_{k+1}(f)|}{r^{k+1}} + \frac{|\sigma(g)r^{k+1} - u_{k+1}(g)|}{r^{k+1}} - \frac{1}{r^{k+1}} \\ &\leq \frac{2}{r^{k+1}(r-1)} - \frac{1}{r^{k+1}} \quad (\text{en utilisant (2) avec } n = k + 1 \text{ pour } f \text{ et } g) \\ &= \frac{3-r}{r^{k+1}(r-1)} < 0 \quad (\text{car } r > 3). \end{aligned}$$

Ce qui donne $\sigma(f) < \sigma(g)$ et montre ainsi que σ est bien strictement croissante comme il fallait le prouver. La démonstration est complète. \square

Corollaire 2.2. *Pour tout réel $r \in [3, +\infty[\cup \{2, \frac{5}{2}\}$, l'ensemble D_r est infini non dénombrable.*

Démonstration. On distingue les quatres cas suivants :

- *Le cas $r > 3$:* Dans ce cas, le résultat du Corollaire 2.2 est une conséquence immédiate de celui du Théorème 2.1. En effet, soit $r > 3$ un réel fixé et λ un élément arbitraire de l'ensemble E_r du Théorème 2.1. Par définition même de E_r , chaque terme de la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est congrue modulo 1 à un certain réel de l'intervalle fermé $[-\frac{1}{r-1}, \frac{1}{r-1}]$. Comme ce dernier intervalle est de longueur $\frac{2}{r-1} < 1$ (car $r > 3$), son complémentaire dans $]-1/2, 1/2[$ est bien un ouvert non vide et disjoint avec l'ensemble des représentants (dans $[-1/2, 1/2[$) des classes modulo 1 des termes de la suite $(\lambda r^n)_n$. Par conséquent la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas dense modulo 1. Ceci entraîne que l'on a $E_r \subset D_r$ et puisque E_r est infini non dénombrable (d'après le Théorème 2.1), alors il en est de même (à fortiori) de D_r .
- *Le cas $r = 2$:* On vérifie aisément (en distinguant les deux cas n pair et n impair) que tout réel $\lambda > 0$ s'écrivant sous la forme $\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{4^i}$ (avec $a_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$) satisfait $\langle \lambda 2^n \rangle \leq \frac{2}{3} \ (\forall n \in \mathbb{N})$. Un tel λ est donc un élément de D_r . Comme l'ensemble $\{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{4^i} \mid a_i = 0 \text{ ou } 1 \text{ pour tout } i\}$ est visiblement infini non dénombrable, alors D_r est à fortiori infini non dénombrable.
- *Le cas $r = 3$:* On vérifie immédiatement que tout réel $\lambda > 0$ s'écrivant sous la forme $\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ (avec $a_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$) satisfait $\langle \lambda 3^n \rangle \leq \frac{1}{2} \ (\forall n \in \mathbb{N})$. Un tel λ est donc un élément de D_r . Puisque l'ensemble $\{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i = 0 \text{ ou } 1 \text{ pour tout } i\}$ est visiblement infini non dénombrable, alors il en est de même à fortiori de D_r .
- *Le cas $r = \frac{5}{2}$:* Posons $s := r^3 > 15$. Nous montrerons dans ce qui suit que D_r contient E_s . Comme E_s est infini non dénombrable (d'après le Théorème 2.1), on conclura qu'aussi l'ensemble D_r est infini non dénombrable. Soit λ un élément arbitraire de E_s . Par définition même de l'ensemble E_s , on a :

$$\|\lambda r^{3n}\| = \|\lambda s^n\| \leq \frac{1}{s-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ceci entraîne que la suite $(\langle \lambda r^{3n} \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ parcourt la réunion des deux intervalles $[0, \frac{1}{s-1}]$ et $[1 - \frac{1}{s-1}, 1[$ dont la somme des longueurs vaut $\frac{2}{s-1}$. Maintenant, en utilisant le fait élémentaire affirmant que :

« Lorsque la partie fractionnaire d'un réel x parcourt une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq \alpha$ ($\alpha > 0$) alors, étant donnés $p, q \in \mathbb{N}^*$, la partie fractionnaire du réel $\frac{p}{q}x$ parcourt une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq p\alpha$ »,

on en déduit que la suite $(\langle \lambda r^{3n-1} \rangle)_{n \in \mathbb{N}^*}$ parcourt une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq \frac{4}{s-1}$ et que la suite $(\langle \lambda r^{3n-2} \rangle)_{n \in \mathbb{N}^*}$ parcourt une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq \frac{8}{s-1}$. D'où l'on déduit que la suite $(\langle \lambda r^n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ parcourt une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq \frac{2}{s-1} + \frac{4}{s-1} + \frac{8}{s-1} = \frac{14}{s-1} < 1$ (car $s > 15$). Il s'ensuit de cela qu'il existe un ouvert non vide $\subset [0, 1[$ qui ne rencontre pas l'ensemble $\{\langle \lambda r^n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. Par conséquent la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas dense modulo 1, autrement dit $\lambda \in D_r$. L'inclusion $E_s \subset D_r$ est ainsi démontrée, ce qui complète la preuve du corollaire pour ce cas et achève cette démonstration. \square

Corollaire 2.3. *Pour tout réel $r > 1$, l'ensemble W_r est infini non dénombrable.*

Démonstration. Etant donné un réel $r > 1$, fixons un entier $k \geq 1$ tel que $r^k > 2k + 1$. D’après le Théorème 2.1, l’ensemble $E_{r,k}$ est infini non dénombrable. On montrera dans ce qui suit que ce dernier ensemble est inclus dans W_r , ce qui entraînera à fortiori l’infinitude non dénombrable de l’ensemble W_r . Soit λ un élément arbitraire de $E_{r,k}$. Pour tout entier positif n qui soit un multiple de k , disons $n = km$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, on a : $\|\lambda r^n\| = \|\lambda (r^k)^m\| \leq \frac{1}{r^{k-1}}$ (car $\lambda \in E_{r,k}$) ; en d’autres termes : $\langle \lambda r^n \rangle \notin]\frac{1}{r^{k-1}}, 1 - \frac{1}{r^{k-1}}[$. On en déduit donc que pour $I =]\frac{1}{r^{k-1}}, 1 - \frac{1}{r^{k-1}}[$, on a : $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{A(I; N; (\lambda r^n))}{N} \leq 1 - \frac{1}{k} < 1 - \frac{2}{r^{k-1}} = \mu(I)$ (car $r^k > 2k + 1$). Ce qui entraîne que la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n’est pas équirépartie modulo 1, d’où $\lambda \in W_r$. On a donc effectivement $E_{r,k} \subset W_r$, ce qui complète cette démonstration. \square

Si l’on restreint l’hypothèse du Corollaire 2.2 à $r > 2$, une démarche semblable à celle de la démonstration du Théorème 2.1 permet de montrer que l’ensemble des réel $\lambda > 0$ pour lesquels la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n’est pas dense modulo 1, est infini ; mais elle ne permet pas d’indiquer si celui-ci est dénombrable ou non.

Théorème 2.4. *Pour tout réel $r > 2$, l’ensemble D_r est infini.*

Démonstration. On associe à tout $k \in \mathbb{N}$, la suite d’entiers positifs $(u_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0(k) = 1, \\ u_{n+1}(k) = \lfloor r.u_n(k) \rfloor + k \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Cette dernière relation entraîne que l’on a :

$$r u_n(k) + k - 1 < u_{n+1}(k) \leq r u_n(k) + k \quad (\forall k, n \in \mathbb{N}).$$

Ce qui nous permet aisément de vérifier qu’étant donné $k \in \mathbb{N}$, les deux suites de termes généraux

$$\alpha_n(k) := \frac{u_n(k)}{r^n} + \frac{k-1}{r^n(r-1)} \quad \text{et} \quad \beta_n(k) := \frac{u_n(k)}{r^n} + \frac{k}{r^n(r-1)}$$

sont respectivement strictement croissante et décroissante. De plus, comme (pour tout $k \in \mathbb{N}$) $\alpha_n(k) - \beta_n(k) \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l’infini, ces deux suites $(\alpha_n(k))_n$ et $(\beta_n(k))_n$ sont adjacentes et ont par conséquent une même limite $\lambda(k)$ vérifiant : $\alpha_n(k) < \lambda(k) \leq \beta_n(k)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Ce qui entraîne :

$$\frac{k-1}{r-1} < \lambda(k)r^n - u_n(k) \leq \frac{k}{r-1} \quad (\forall k, n \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Ceci montre qu’étant donné $k \in \mathbb{N}$, chaque terme de la suite $(\lambda(k)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est congrue modulo 1 à un certain réel de l’intervalle $]\frac{k-1}{r-1}, \frac{k}{r-1}[$; mais comme ce dernier intervalle est de longueur $\frac{1}{r-1} < 1$ (car $r > 2$), la suite $(\lambda(k)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n’est dense modulo 1 pour aucune valeur de $k \in \mathbb{N}$.

Finalement, en prenant $n = 0$ dans (3), on voit que $\lambda(k) \in]1 + \frac{k-1}{r-1}, 1 + \frac{k}{r-1}[$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$). Comme les intervalles $]1 + \frac{k-1}{r-1}, 1 + \frac{k}{r-1}[$ ($k \in \mathbb{N}$) sont visiblement deux à deux disjoints, les réels $\lambda(k)$ ($k \in \mathbb{N}$) sont deux à deux distincts et par conséquent l’ensemble des réels $\lambda > 0$ pour lesquels la suite $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n’est pas dense modulo 1 est effectivement infini. Ce qui achève cette démonstration. \square

Références

[1] M.J. Bertin, et al., Pisot and Salem Numbers, Birkhäuser, Berlin, 1992.
 [2] D.W. Boyd, Transcendental numbers with badly distributed powers, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969) 424–427.
 [3] J.F. Koksma, Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Compositio Math. 2 (1935) 250–258.
 [4] M.A. Lerma, Distribution of powers modulo 1 and related topics, Preprint, 1995.
 [5] C. Pisot, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 7 (1938) 205–248.
 [6] A.D. Pollington, Progressions arithmétiques généralisées et le problème des $(3/2)^n$, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 292 (1981) 383–384.
 [7] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Ann. 77 (1916) 313–352.