

Géométrie analytique

# Surfeuilletages de feuilletages holomorphes singuliers non dégénérés en dimension 2 et 3

Ludovic Landuré

LAREMA, Université d'Angers, 2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

Reçu le 26 avril 2006 ; accepté après révision le 5 septembre 2006

Présenté par Jean-Pierre Demailly

---

## Résumé

Nous étudions des feuilletages Levi-plats dont la partie complexe est un feuilletage holomorphe ayant une singularité isolée en l'origine de  $\mathbb{C}^2$  ou de  $\mathbb{C}^3$ . En dimension 2, nous montrons que, si la partie complexe est non dégénérée ou non dégénérée après un éclatement, alors le feuilletage Levi-plat et sa partie complexe sont chacun décrits par une intégrale première submersive sauf en l'origine. En dimension 3, nous montrons qu'un champ de vecteurs linéaire n'est jamais la partie complexe d'un feuilletage Levi-plat de codimension 3. *Pour citer cet article : L. Landuré, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Overfoliations of non-degenerate singular holomorphic foliations in dimension 2 and 3.** We study Levi-flat foliations which complex part is an holomorphic foliation with an isolated singularity at the origin of  $\mathbb{C}^2$  or  $\mathbb{C}^3$ . In dimension 2, we show that, if the complex part is non-degenerate or non-degenerate after one blow up, then the Levi-flat foliation and its complex part are both described by a first integral which is submersive on  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . In dimension 3, we show that a linear vector field is never the complex part of a codimension 3 Levi-flat foliation. *To cite this article: L. Landuré, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

---

## 1. Introduction

Considérons deux feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ . Nous dirons que le feuilletage  $\mathcal{F}'$  est un surfeuilletage de  $\mathcal{F}$  si les fibrés tangents de ces deux feuilletages vérifient la relation suivante :  $T\mathcal{F} \subset T\mathcal{F}'$ . Dans ces conditions, les feuilles de  $\mathcal{F}$  feuilletent celles de  $\mathcal{F}'$ .

Un feuilletage Levi-plat est un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété holomorphe  $X$  tel que l'ensemble  $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F}$  défini par  $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F} = T\mathcal{F} \cap iT\mathcal{F}$  soit un fibré intégrable au sens de Frobenius. La partie complexe  $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$  de  $\mathcal{F}$  définie par  $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F}$  est un feuilletage en sous-variétés holomorphes qui n'est pas nécessairement holomorphe. Nous appellerons un tel feuilletage  $\mathbb{C}$ -feuilletage. Ainsi, un feuilletage Levi-plat est un surfeuilletage d'un  $\mathbb{C}$ -feuilletage. En toute généralité,

---

Adresse e-mail : [landure@tonton.univ-angers.fr](mailto:landure@tonton.univ-angers.fr) (L. Landuré).

la réciproque est fautive. Cependant, si l'écart entre les dimensions d'un  $\mathbb{C}$ -feuilletage et d'un de ses surfeuilletages est 1, alors le surfeuilletage est automatiquement Levi-plat.

L'étude des feuilletages Levi-plats n'est pas très développée ; citons essentiellement l'article [3] de D. Cerveau et P. Sad et l'article [4] de D. Belko Garba. Dans cette Note, nous étudions les germes de feuilletages Levi-plats réguliers en dehors de l'origine de  $\mathbb{C}^2$  ou de  $\mathbb{C}^3$  dont la partie complexe est un feuilletage holomorphe ayant une singularité isolée en l'origine. Nous supposons que l'écart entre les dimensions du feuilletage Levi-plat et de sa partie complexe est 1 de telle sorte que nous pourrions nous contenter d'étudier les surfeuilletages de feuilletages singuliers holomorphes.

## 2. Surfeuilletage et holonomie

L'existence d'un surfeuilletage  $\mathcal{F}'$  d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  est fortement liée à l'holonomie de  $\mathcal{F}$ . Considérons une transversale  $T$  de  $\mathcal{F}$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}'$  est également transverse à  $T$ . Par conséquent, il induit un feuilletage  $\mathcal{F}'_T$  sur  $T$  que nous appellerons trace de  $\mathcal{F}'$  sur  $T$  ; sa dimension est l'écart entre celle de  $\mathcal{F}'$  et celle de  $\mathcal{F}$ . Le pseudo-groupe d'holonomie du feuilletage  $\mathcal{F}$  conjugue les différentes traces de  $\mathcal{F}'$  sur les transversales de  $\mathcal{F}$ . Plus précisément, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 2.1.** *Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  deux feuilletages. Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux transversales de  $\mathcal{F}$  en deux points  $x$  et  $y$  d'une feuille  $F$  de  $\mathcal{F}$ . Soit  $\gamma$  un chemin sur  $F$  entre  $x$  et  $y$  et  $\phi$  le morphisme d'holonomie entre  $T_1$  et  $T_2$  associé au chemin  $\gamma$ . Si  $\mathcal{F}'$  est un surfeuilletage de  $\mathcal{F}$ , alors  $\phi_*(\mathcal{F}'_{T_1}) = \mathcal{F}'_{T_2}$ .*

En particulier, le groupe d'holonomie d'une feuille d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  stabilise la trace d'un surfeuilletage de  $\mathcal{F}$  sur toute transversale. Nous établissons la proposition suivante :

**Proposition 2.2.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage régulier de classe  $C^\infty$  de dimension réelle 1 de  $(\mathbb{C}, 0)$ . On note  $G$  le groupe des germes de biholomorphismes qui stabilisent  $\mathcal{F}$ . Alors il existe  $\phi$  un germe de biholomorphisme de  $(\mathbb{C}, 0)$  tel que  $\phi \circ G \circ \phi^{-1} \in \{\text{Id}\}, \{\text{Id}, -\text{Id}\}, \mathbb{R}^* \text{Id}\}$ .*

**Esquisse de démonstration.** La partie linéaire du groupe  $G$  doit stabiliser la direction en l'origine de  $\mathcal{F}$ . Par conséquent, la partie linéaire de  $G$  est incluse dans  $\mathbb{R}^* \text{Id}$ .

Par un théorème de linéarisation de Koenigs, si  $f$  est un biholomorphisme de  $G$  dont la dérivée en l'origine est de module différent de 1, alors  $f$  est conjugué à  $f'(0) \text{Id}$ . Or un feuilletage stable par une homothétie contractante est un feuilletage constant, i.e. défini par un champ de directions constant. On montre de plus que le groupe des biholomorphismes laissant invariant un tel feuilletage est le groupe  $\mathbb{R}^* \text{Id}$ .

Supposons donc que la partie linéaire de  $G$  est incluse dans  $\{\pm \text{Id}\}$ . Par un calcul de développement limité, nous montrons que le seul biholomorphisme stabilisant  $\mathcal{F}$  tangent à l'identité est l'identité elle-même. Ceci permet de démontrer la proposition. En effet, si  $f$  est un élément de  $G$  dont la dérivée en 0 est égale à  $-1$ , alors  $f \circ f$  est l'identité et le biholomorphisme  $\text{Id} - f$  conjugue  $f$  à  $-\text{Id}$ . De plus, si  $g$  est un élément de  $G$  dont la dérivée en l'origine est  $-1$ , alors la dérivée de  $f \circ g$  en l'origine est 1 et  $f \circ g$  est l'identité. Or le difféomorphisme  $f$  est son propre inverse. Donc  $f = g$  ; ce qui démontre la proposition.  $\square$

## 3. Feuilletages singuliers en dimension 2

### 3.1. Surfeuilletages $C^1$

Les exemples les plus simples de feuilletages singuliers holomorphes de  $\mathbb{C}^2$  sont les feuilletages linéaires  $\mathcal{F}_\lambda$  décrits par un champ de vecteurs du type :  $X_\lambda = x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$  où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Le flot d'un tel champ de vecteurs est de la forme  $\phi_t(x, y) = (xe^t, ye^{\lambda t})$ . En particulier, il permet de caractériser l'holonomie de la feuille  $\{y = 0\}$  pour la transversale  $\{x = 1\}$  ; c'est une homothétie de centre  $(1, 0)$  et de rapport  $e^{2i\pi\lambda}$ . Cette homothétie doit conserver le feuilletage  $\mathcal{F}'_x$ , trace de  $\mathcal{F}'$  sur  $\{x = 1\}$ . Il apparaît une première condition nécessaire :  $e^{2i\pi\lambda} \in \mathbb{R}^*$ . Si cette quantité est différente de  $\pm 1$ , le feuilletage  $\mathcal{F}'_x$  est un feuilletage constant. Grâce au flot de  $X_\lambda$ , nous montrons que le feuilletage  $\mathcal{F}'_y$ , trace de  $\mathcal{F}'$  sur  $\{y = 1\}$ , est décrit par un champ de directions réelles de la forme  $\langle \alpha z^{\lambda+1} \rangle_{\mathbb{R}}$  où  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$  désigne la direction

réelle engendrée par le vecteur  $v$ . Un tel champ de directions est nécessairement singulier. Par conséquent, la quantité  $e^{2i\pi\lambda}$  est égale à  $\pm 1$  ;  $\lambda$  est un entier divisé par deux. Or l'application d'interversion des coordonnées conjugué  $\mathcal{F}_\lambda$  en  $\mathcal{F}_{1/\lambda}$ . On en déduit, quitte à remplacer  $\lambda$  par  $\frac{1}{\lambda}$ , que  $\lambda \in \{1, 2, -1, -2\}$ . En traitant chacun de ces cas particuliers, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** *Soit  $\mathcal{F}_\lambda$  un feuilletage décrit par un champ de directions de la forme*

$$X_\lambda = x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$$

où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . *Le feuilletage  $\mathcal{F}_\lambda$  admet un surfeuilletage  $\mathcal{F}'$  de codimension 1 et de classe  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si la constante  $\lambda$  est égale à  $-1$ . Dans ce cas, tout surfeuilletage  $\mathcal{F}'$  est décrit par une application submersive de classe  $\mathcal{C}^1$  composée de  $((x, y) \mapsto xy)$ , intégrale première submersive en dehors de l'origine de  $\mathcal{F}_{-1}$ , avec une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{C}$  à valeurs réelles elle-même submersive.*

Lorsque les valeurs propres d'un champ de vecteurs sont dans le domaine de Poincaré, le théorème de Poincaré–Dulac (cf. [1]) affirme que le champ de vecteurs est conjugué holomorphiquement à sa forme normale ; c'est-à-dire qu'il est soit linéarisable soit, à une constante multiplicative près, conjugué à un champ de vecteurs du type

$$x \frac{\partial}{\partial x} + (ny + ax^n) \frac{\partial}{\partial y}$$

où  $n$  est un entier naturel. A nouveau, on peut calculer le flot de ce champ de vecteurs. Nous obtenons alors le résultat suivant :

**Théorème 3.2.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage feuilletage holomorphe induit par un champ de vecteurs de type Poincaré avec résonance. Alors le feuilletage  $\mathcal{F}$  n'admet pas de surfeuilletage.*

**Remarque 1.** Les feuilletages linéaires  $\mathcal{F}_\lambda$  et les feuilletages de type Poincaré admettent cependant des surfeuilletages singuliers le long d'au moins une de leurs séparatrices.

### 3.2. Surfeuilletage $\mathcal{C}^\infty$

Dans cette sous-partie, tous les surfeuilletages seront supposés de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Rappelons tout d'abord qu'un feuilletage singulier holomorphe est non dégénéré si il est décrit par un champ de vecteurs dont le jet d'ordre 1 est, à une conjugaison près, du type  $\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$  où  $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ . Rappelons également un théorème de Mattei–Moussu (cf. [5] et [2]) :

**Théorème 3.3.** *Soit  $\mathcal{F}$  un germe de feuilletage singulier non dégénéré en l'origine de  $\mathbb{C}^2$ . Si l'holonomie d'une séparatrice lisse est linéarisable, alors le feuilletage  $\mathcal{F}$  est linéarisable.*

La Proposition 2.2 nous permet de déduire que l'holonomie d'un feuilletage holomorphe de codimension 1 admettant un surfeuilletage de codimension réelle 1 de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est linéarisable. Par conséquent, si la partie complexe  $\mathcal{F}^\mathbb{C}$  d'un feuilletage Levi-plat  $\mathcal{F}$  est un feuilletage singulier non dégénéré, alors, à une conjugaison holomorphe près, le feuilletage  $\mathcal{F}^\mathbb{C}$  est décrit par un champ de vecteurs du type  $X_\lambda(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$  où  $\lambda$  est un nombre complexe non nul. En appliquant le Théorème 3.1, nous en déduisons le théorème suivant :

**Théorème 3.4.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage Levi-plat défini sur un ouvert  $V \setminus \{0\}$  de  $\mathbb{C}^2$  où  $V$  est un voisinage ouvert de l'origine. On suppose que sa partie complexe  $\mathcal{F}^\mathbb{C}$  est un feuilletage singulier non dégénéré en 0. Alors, à une conjugaison holomorphe près, le feuilletage  $\mathcal{F}^\mathbb{C}$  est décrit par l'application  $((x, y) \mapsto xy)$  submersive sauf en 0. De plus, le feuilletage  $\mathcal{F}$  est décrit par la composée d'une application submersive  $g$  avec  $((x, y) \mapsto xy)$ .*

Nous étudions maintenant les feuilletages non dégénérés en un éclatement. Plus précisément, on suppose le feuilletage singulier non dicritique et qu'après un éclatement, les singularités ont au moins deux séparatrices lisses. Ainsi,

l'holonomie des séparatrices qui ne sont pas le diviseur exceptionnel est linéarisable. Si l'on suppose de plus que ces singularités sont non dégénérées, le théorème de Mattei–Moussu s'applique à nouveau et ces singularités sont linéarisables. En comparant les traces du surfeuilletage sur les transversales du diviseur exceptionnel, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 3.5.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage singulier non dicritique au voisinage de l'origine admettant un surfeuilletage  $\mathcal{F}'$  régulier en dehors de l'origine de  $\mathbb{C}^2$  et de classe  $C^\infty$ . On suppose qu'après un éclatement les singularités de  $\mathcal{F}$  sont non dégénérées et admettent au moins deux séparatrices lisses. Alors le feuilletage  $\mathcal{F}$  admet une intégrale première  $g$  submersive en dehors de 0. De plus, il existe une application submersive  $f$  de  $(\mathbb{C}, 0)$  dans  $\mathbb{R}$  telle que les feuilles de  $\mathcal{F}'$  soient les fibres de la fonction  $f \circ g$ .*

#### 4. Feuilletages singuliers en dimension 3

On étudie les surfeuilletages de codimension réelle 3 des champs de vecteurs holomorphes linéaires au voisinage de l'origine de  $\mathbb{C}^3$ . Les feuilles de tels feuilletages sont alors des variétés Levi-plates. On s'intéresse plus particulièrement au cas  $C^\infty$ . Nous aboutissons au théorème suivant :

**Théorème 4.1.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs défini dans  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  par*

$$X(x, y, z) = x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 y \frac{\partial}{\partial y} + \lambda_2 z \frac{\partial}{\partial z}$$

*où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des constantes complexes non nulles. Alors le feuilletage décrit par le champ de vecteurs  $X$  n'admet pas de surfeuilletage de codimension réelle 3.*

**Esquisse de démonstration.** A l'aide du flot de  $X$ , nous dégageons tout d'abord des conditions de type combinatoire sur les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Ainsi, nous réduisons l'étude à celle d'une famille finie de cas particuliers :  $\lambda_i \in \{1, 2, \frac{1}{2}\}$  où  $i \in \{1, 2\}$ . Pour chacun de ces cas particuliers, l'existence d'un surfeuilletage est équivalente à l'existence d'un feuilletage éventuellement singulier sur l'espace des feuilles qui, ici, sont des espaces projectifs tordus (ces variétés algébriques sont souvent singulières). On démontre alors le résultat en étudiant essentiellement l'orientabilité de ces feuilletages.  $\square$

#### Références

- [1] V. Arnold, Équations différentielles ordinaires, Édition Mir, Moscow, 1974. Traduit du russe par Djilali Embarek.
- [2] D. Cerveau, J.-F. Mattei, Formes intégrales singulières, Astérisque, vol. 97, Société Mathématique de France, 1982.
- [3] D. Cerveau, P.R. Sad, Fonctions et feuilletages Levi-flat. Étude locale, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 3 (2) (2004) 427–445.
- [4] D. Belko Garba, Caractérisation des feuilletages holomorphes singuliers, contenus dans des feuilletages Levi flat, sur les surfaces complexes compactes, Bull. Sci. Math. 127 (10) (2003) 845–857.
- [5] J.-F. Mattei, R. Moussu, Holonomie et intégrales premières, Ann. Sci. École Norm. Sup. 13 (4) (1980) 469–523.