



Problèmes mathématiques de la mécanique

Obtention d'équations de plaques par la méthode d'éclatement appliquée aux équations tridimensionnelles

Georges Griso

*Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), laboratoire Jacques-Louis Lions (analyse numérique),
4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*

Reçu le 13 juin 2006 ; accepté après révision le 30 juin 2006

Disponible sur Internet le 2 août 2006

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On simplifie le système linéaire tridimensionnel de l'élasticité en utilisant la décomposition d'un déplacement obtenue par la méthode de l'éclatement en élasticité linéaire. On obtient un modèle de plaques de type hiérarchique. On donne des estimations de l'erreur dans le cas d'une solution régulière. *Pour citer cet article : G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Derivation of plate equations by the unfolding method applied to the three-dimensional equations. To simplify the three-dimensional linearized elasticity equations we use the decomposition of a displacement given by the unfolding method in linearized elasticity. We obtain a plate model of a hierarchical type. We give error estimates when the solution is sufficiently smooth. *To cite this article: G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

This Note presents a decomposition of the displacements of a plate and a simplification in the strain tensor in order to obtain a model of plates of a hierarchical type. In this model, the bending and the rotation angles of the transverse fibers of the plate are solutions of a coupled problem.

The first model of plates due to Kirchhoff and Love has been obtained via mechanical hypotheses. In this model the transverse fibers are always perpendicular to the deformed middle surface of the plate. More recently, the asymptotic variational method, presented by Ph.G. Ciarlet in his book [1], studied the problem of plates in linearized elasticity without any geometrical or mechanical a priori hypothesis and gave a justification of the Kirchhoff–Love theory. Unlike in the Kirchhoff–Love theory, the transverse fibers do not necessarily stay perpendicular to the deformed middle surface in the Reissner–Mindlin theory of plates or the hierarchical models of plates.

Throughout this study we use the notation of [4]. Section 2 recalls the decomposition of a plate displacement. We give the definition of the elementary displacement U_e associated with a displacement u (generalization of the Kirchhoff–Love displacement). Using U_e , we get informations about the displacement of the plate middle surface and

Adresse e-mail : georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso).

about the rotations of the transverse fibers. The difference $u - U_e = \bar{u}$ is the warping. It expresses the deformation of the fibers. In Theorem 1 we give estimates for U_e and \bar{u} in relation with the norm of the energy deformation of u and the half thickness δ of the plate (see also [4]).

Section 3 is dedicated to the simplification of the three-dimensional linearized elasticity equations. The problem of elasticity is given in (2). In order to be able to focus on the essential aspects of our method we choose a very simple right-hand side of (2). The unfolding operator \mathcal{T}_δ is introduced in Definition 2. This transformation allows us to work on a fixed domain $\Omega = \omega \times]-1, 1[$ where ω is the middle surface of the plate. To solve the elasticity problem more easily we suggest to eliminate the partial derivatives with respect to x_α of the warping \bar{u} in the strain and stress tensors (see Theorem 2). After unfolding, we obtain a formal strain tensor of the unfolded displacement and a space of formal displacements \mathbb{D}_a . Then we set the unfolded problem in \mathbb{D}_a (6). We write its solution $U_e^{\delta,a} + \delta \bar{U}^{\delta,a}$. The “corrector” $\bar{U}^{\delta,a}$ is expressed in terms of the partial derivatives of the components $\mathcal{U}^{\delta,a}$ and $\mathcal{R}^{\delta,a}$ of the elementary displacement $U_e^{\delta,a}$ (Theorem 3). Theorem 4 gives the variational problem verified by the membrane displacement and the variational coupled problem verified by the bending $\mathcal{U}_3^{\delta,a}$ and the rotation angles $\mathcal{R}_\alpha^{\delta,a}$ (as in the Reissner–Mindlin model of plates).

The last section of this Note is dedicated to error estimates. The techniques leading to these estimates are the same as those presented in [2,3] for the unfolding method in periodic homogenization. We make hypotheses (10) of regularity on the solution of the unfolded elasticity problem (6). This allows us to give (Theorem 5) the distance between the unfolded warping $\mathcal{T}_\delta(\bar{u}^\delta)$ and the corrector term $\bar{U}^{\delta,a}$ and also the distance between the unfolded stress tensor of u^δ and the formal stress tensor of the solution of (6) ($u^\delta = U_e^\delta + \bar{u}^\delta$ is the solution of (2)).

In a forthcoming paper the detailed proofs will be presented with some cases where the hypotheses (10) are verified. In this note all constants are independent of δ . As a rule, the Greek indices α and β take values in $\{1, 2\}$ and the Latin indices i, j, k and l take values in $\{1, 2, 3\}$.

1. Introduction

Dans cette Note nous présentons une décomposition des déplacements d’une plaque et une simplification du tenseur des déformations afin d’obtenir un modèle des plaques de type hiérarchique. Dans ce modèle la flexion et les angles de rotation des fibres transverses de la plaque sont les solutions d’un problème variationnel couplé. On donne des estimations de l’erreur globale et de l’erreur intérieure en fonction de δ (la demi-épaisseur de la plaque) dans le cas d’une plus grande régularité de la solution du problème éclaté.

Dans la première partie on rappelle la décomposition des déplacements d’une plaque. On donne la définition du déplacement élémentaire U_e associé à un déplacement u . Grâce à U_e nous avons des informations sur le déplacement de la surface moyenne de la plaque et sur les rotations des fibres transverses. La différence $u - U_e = \bar{u}$ est le gauçhissement des fibres. Le Théorème 1 donne les estimations de U_e et de \bar{u} en fonction de la norme de l’énergie de déformation de u et de δ .

La seconde partie est consacrée à la simplification des équations de l’élasticité linéarisée. Le problème standard de l’élasticité est posé en (2) sans prendre des forces appliquées de surface pour simplifier la présentation de notre démarche. L’opérateur d’éclatement est introduit dans la Définition 2. La transformation par éclatement permet de travailler sur le domaine fixe $\Omega = \omega \times]-1, 1[$ où ω est la surface moyenne de la plaque. On propose pour simplifier la résolution du problème d’élasticité de supprimer dans le tenseur des déformations du déplacement u les dérivées partielles de \bar{u} par rapport à x_α . Le Théorème 2 justifie cette suppression. On obtient ainsi après éclatement un tenseur formel des déformations de l’éclaté de u et un espace de déplacements formels \mathbb{D}_a . C’est dans \mathbb{D}_a que le nouveau problème d’élasticité (6) est posé. Sa solution s’écrit $U_e^{\delta,a} + \delta \bar{U}^{\delta,a}$. Le correcteur $\bar{U}^{\delta,a}$ s’exprime en termes des dérivées partielles des composantes $\mathcal{U}^{\delta,a}$ et $\mathcal{R}^{\delta,a}$ du déplacement élémentaire $U_e^{\delta,a}$ (Théorème 3). Le Théorème 4 donne le problème variationnel vérifié par le déplacement membranaire et le problème couplant la flexion $\mathcal{U}_3^{\delta,a}$ et les angles de rotation $\mathcal{R}_\alpha^{\delta,a}$ des fibres. Dans la dernière partie nous donnons des estimations de l’erreur dans le cas d’une régularité H^2 de $\mathcal{U}^{\delta,a}$ et des angles de rotation $\mathcal{R}_\alpha^{\delta,a}$.

2. Rappels sur la décomposition des déplacements d’une plaque

On se donne un domaine borné ω de \mathbb{R}^2 de frontière lipschitzienne. La plaque est le domaine $\Omega_\delta = \omega \times]-\delta, \delta[$. La surface moyenne de la plaque est ω , une fibre transverse est un segment $(x_1, x_2) \times]-\delta, \delta[$. La plaque de référence est le domaine fixe $\Omega = \omega \times]-1, 1[$.

Le point courant de Ω_δ est noté $x = (x_1, x_2, x_3) = (\hat{x}, x_3)$, celui de Ω est noté $(x_1, x_2, X_3) = (\hat{x}, X_3)$.

Le produit scalaire de \mathbb{R}^3 est noté \cdot et la norme euclidienne de \mathbb{R}^3 est noté $\|\cdot\|_2$. Pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^n , $n \in \{1, 2, 3\}$ et tout $(p, k) \in \{1, 2\}^2$, on note

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \mathbb{H}^k(\Omega) = H^k(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Définition 1. Un déplacement élémentaire de la plaque Ω_δ est de la forme

$$u(x) = \mathcal{U}(\hat{x}) + \mathcal{R}(\hat{x}) \wedge x_3 \vec{e}_3, \quad x \in \Omega_\delta, \mathcal{U}, \mathcal{R} \in \mathbb{L}^1(\omega), \mathcal{R}_3 = 0.$$

Sous l’action d’un petit déplacement élémentaire la fibre $\hat{x} \times]-\delta, \delta[$ est traduite de $\mathcal{U}(\hat{x})$ et tourne autour du vecteur $\mathcal{R}(\hat{x})$ d’un petit angle de mesure $\|\mathcal{R}(\hat{x})\|_2$; \mathcal{U} est également le déplacement de la surface moyenne de la plaque. Après déplacement, la fibre transverse n’est pas en général orthogonale à la surface moyenne déformée.

Tout déplacement u appartenant à $\mathbb{L}^1(\Omega_\delta)$ s’écrit de façon unique

$$u(x) = U_e(x) + \bar{u}(x), \quad U_e(x) = \mathcal{U}(\hat{x}) + \mathcal{R}(\hat{x}) \wedge x_3 \vec{e}_3,$$

où U_e est un déplacement élémentaire et où \bar{u} vérifie p.p. dans ω

$$\int_{-\delta}^{\delta} \bar{u}(\hat{x}, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\delta}^{\delta} x_3 \bar{u}_\alpha(\hat{x}, \cdot) = 0. \tag{1}$$

Le déplacement \bar{u} est le *gauchissement* des fibres de la plaque.

Pour tout ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 et tout déplacement u appartenant à $\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$ on note

$$|u|_{\mathcal{D}, \mathcal{O}} = \|\nabla u\|_{[L^2(\mathcal{O})]^9}, \quad |u|_{\mathcal{E}, \mathcal{O}} = \|(\nabla u)_S\|_{[L^2(\mathcal{O})]^9},$$

$(\nabla u)_S$ désigne la partie symétrique du gradient de u ou tenseur des déformations.

Théorème 1. Pour tout déplacement u appartenant à $\mathbb{H}^1(\Omega_\delta)$ les composantes \mathcal{U} et \mathcal{R} du déplacement élémentaire U_e appartiennent à $\mathbb{H}^1(\omega)$, le gauchissement \bar{u} appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega_\delta)$. On a les estimations suivantes :

$$|U_e|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta} \leq C|u|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta}, \quad |\bar{u}|_{\mathcal{D}, \Omega_\delta} \leq C|u|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta}, \quad \|\bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\delta)} \leq C\delta|u|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta}.$$

La plaque est maintenant fixée sur une partie de sa frontière latérale $\gamma_0 \times]-\delta, \delta[$ où $\gamma_0 \subset \partial\omega$ est de mesure non nulle. On pose

$$\mathbb{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega_\delta) = \{u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\delta) \mid u = 0 \text{ sur } \gamma_0 \times]-\delta, \delta[\}, \quad \mathbb{H}_{\gamma_0}^1(\omega) = \{u \in \mathbb{H}^1(\omega) \mid u = 0 \text{ sur } \gamma_0\}.$$

Pour tout $u \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega_\delta)$ les fonctions \mathcal{U} et \mathcal{R} appartiennent à $\mathbb{H}_{\gamma_0}^1(\omega)$. On a de plus (voir [4])

$$\|\mathcal{U}_\alpha\|_{H^1(\omega)} + \delta\|\mathcal{U}_3\|_{H^1(\omega)} + \delta\|\mathcal{R}_\alpha\|_{H^1(\omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\delta}}|u|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta}.$$

Dans la suite de cette note tous les déplacements de la plaque Ω_δ sont décomposés en la somme d’un déplacement élémentaire et d’un gauchissement vérifiant (1).

3. Simplification du système linéaire de l’élasticité

La plaque est constituée d’un matériau homogène et isotrope. Les composantes du tenseur des contraintes sont

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\gamma_{kl}(u) \quad \text{où} \quad a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad \gamma_{kl}(u) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right\}.$$

Les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.

On cherche une solution approchée du problème d’élasticité linéarisée

$$u^\delta \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega_\delta), \quad \int_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(u^\delta)\gamma_{ij}(v) = \int_{\Omega_\delta} F^\delta \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega_\delta). \tag{2}$$

On suppose qu'il existe $f \in \mathbb{L}^2(\omega)$ tel que pour tout déplacement $v \in \mathbb{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega_\delta)$

$$\int_{\Omega_\delta} F^\delta \cdot v = 2\delta \int_{\omega} (\delta f_\alpha \mathcal{V}_\alpha + \delta^2 f_3 \mathcal{V}_3) + O(\delta^{5/2}) |v|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta}, \quad v = V_e + \bar{v} \quad (3)$$

où $V_e(\cdot, x_3) = \mathcal{V} + \mathcal{A} \wedge x_3 \bar{e}_3$ avec $\mathcal{V}, \mathcal{A} \in \mathbb{H}_{\gamma_0}^1(\omega)$. On a choisi des forces appliquées de volume indépendantes de x_3 . La solution de (2) s'écrit $u^\delta = U_e^\delta + \bar{u}^\delta$, $U_e^\delta = \mathcal{U}^\delta + \mathcal{R}^\delta \wedge x_3 \bar{e}_3$ et vérifie l'estimation $|u^\delta|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta} \leq C \delta^{3/2} \|f\|_{\mathbb{L}^2(\omega)}$.

Définition 2. Soit ϕ une fonction appartenant à $L^1(\Omega_\delta)$. L'éclaté $\mathcal{T}_\delta(\phi)$ de ϕ est défini par

$$\mathcal{T}_\delta(\phi)(\hat{x}, X_3) = \phi(\hat{x}, \delta X_3), \quad (\hat{x}, X_3) \in \Omega.$$

Soit $u = U_e + \bar{u}$, $U_e(\cdot, x_3) = \mathcal{U} + \mathcal{R} \wedge x_3 \bar{e}_3$, un déplacement appartenant à $\mathbb{H}^1(\Omega_\delta)$. Les composantes du tenseur des déformations de u sont

$$\begin{cases} \gamma_{11}(u) = \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}, & \gamma_{22}(u) = \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}, & \gamma_{33}(u) = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3}, \\ \gamma_{12}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial x_1} \right) + \frac{x_3}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right), \\ \gamma_{13}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_1} + \mathcal{R}_2 + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \right), & \gamma_{23}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_2} - \mathcal{R}_1 + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Le déplacement éclaté $U = \mathcal{T}_\delta(u)$ s'écrit $U(\hat{x}, X_3) = \mathcal{U}(\hat{x}) + \delta \mathcal{R}(\hat{x}) \wedge X_3 \bar{e}_3 + \delta \bar{U}(\hat{x}, X_3)$ pour presque tout (\hat{x}, X_3) appartenant à Ω où $\bar{U} = \frac{1}{\delta} \mathcal{T}_\delta(\bar{u})$. On définit le tenseur formel des déformations du déplacement formel U en supprimant les dérivées partielles de \bar{U}_i par rapport à x_α

$$\begin{cases} \Gamma_{11}(u) = \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_1} + \delta X_3 \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x_1}, & \Gamma_{22}(u) = \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial x_2} - \delta X_3 \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_2}, & \Gamma_{33}(u) = \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial X_3}, \\ \Gamma_{12}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial x_1} \right) + \delta \frac{X_3}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x_1} \right), \\ \Gamma_{13}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_1} + \mathcal{R}_2 + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_3} \right), & \Gamma_{23}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_2} - \mathcal{R}_1 + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial X_3} \right). \end{cases} \quad (5)$$

Théorème 2. Il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de $\partial\omega$ tel que pour tout $u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\delta)$ l'éclaté $U = \mathcal{T}_\delta(u)$ vérifie

$$\|\mathcal{T}_\delta(\gamma_{ij}(u)) - \Gamma_{ij}(U)\|_{L^2(-1,1;H^{-1}(\omega))} \leq C \sqrt{\delta} |u|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta},$$

$$\|\mathcal{T}_\delta(\gamma_{ij}(u)) - \Gamma_{ij}(U)\|_{L^2(-1,1;(H^1(\omega)))} \leq C \sqrt{\delta} |u|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta} + |u|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta^\kappa}$$

où $\Omega_\delta^\kappa = \{\hat{x} \in \omega \mid \text{dist}(\hat{x}, \partial\omega) < \kappa \delta\} \times]-\delta, \delta[$.

On note

$$\mathbb{D}_g = \left\{ \bar{\phi} \in H^1(-1, 1; \mathbb{L}^2(\omega)) \mid \int_{-1}^1 \bar{\phi}(\cdot, X_3) = 0 \text{ et } \int_{-1}^1 X_3 \bar{\phi}_\alpha(\cdot, X_3) = 0 \right\},$$

$$\mathbb{D}_a = \{V \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid V = \mathcal{V} + \delta \mathcal{A} \wedge X_3 \bar{e}_3 + \delta \bar{V}, \mathcal{V}, \mathcal{A} \in \mathbb{H}_{\gamma_0}^1(\omega), \mathcal{A}_3 = 0, \bar{V} \in \mathbb{D}_g\}.$$

On munit \mathbb{D}_a de la norme associée au produit scalaire $\langle \Phi, \Psi \rangle_a = \int_{\Omega} \Gamma_{ij}(\Phi) \Gamma_{ij}(\Psi)$. Cette norme est équivalente à la norme de $\mathbb{H}_{\gamma_0}^1(\omega) \times \mathbb{H}_{\gamma_0}^1(\omega) \times H^1(-1, 1; \mathbb{L}^2(\omega))$. Le tenseur formel des déformations d'un déplacement appartenant à \mathbb{D}_a se définit par les égalités (5).

Le problème d'élasticité éclaté s'écrit

$$\begin{cases} U_e^{\delta,a} = U_e^{\delta,a} + \delta \bar{U}^{\delta,a} \in \mathbb{D}_a, & U_e^{\delta,a}(\cdot, X_3) = \mathcal{U}^{\delta,a} + \delta \mathcal{R}^{\delta,a} \wedge X_3 \bar{e}_3, & \bar{U}^{\delta,a} \in \mathbb{D}_g, \\ \int_{\Omega} \Sigma_{ij}(U_e^{\delta,a}) \Gamma_{ij}(V) = 2 \int_{\omega} (\delta f_\alpha \mathcal{V}_\alpha + \delta^2 f_3 \mathcal{V}_3) \quad \forall V \in \mathbb{D}_a \end{cases} \quad (6)$$

où $\Sigma_{ij}(U^{\delta,a}) = a_{ijkl}\Gamma_{kl}(U^{\delta,a})$ sont les composantes du tenseur formel des contraintes. La solution de (6) vérifie l'estimation $\|\Gamma_{ij}(U^{\delta,a})\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta$.

Le problème (6) est découplé. On détermine $\bar{U}^{\delta,a}$ en termes des dérivées partielles de $\mathcal{U}^{\delta,a}$ et de $\mathcal{R}^{\delta,a}$ en résolvant trois équations différentielles linéaires.

Proposition 3. *Le terme correcteur $\bar{U}^{\delta,a}$ est donné par*

$$\begin{cases} \bar{U}_1^{\delta,a}(\cdot, X_3) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3^{\delta,a}}{\partial x_1} + \mathcal{R}_2^{\delta,a}\right) \frac{3X_3 - 5X_3^3}{12}, & \bar{U}_2^{\delta,a}(X, \cdot) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3^{\delta,a}}{\partial x_2} - \mathcal{R}_1^{\delta,a}\right) \frac{3X_3 - 5X_3^3}{12}, \\ \bar{U}_3^{\delta,a}(\cdot, X_3) = \frac{\nu}{1-\nu} \left(X_3 \left[\frac{\partial \mathcal{U}_1^{\delta,a}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{U}_2^{\delta,a}}{\partial x_2} \right] + \delta \frac{3X_3^2 - 1}{6} \left[\frac{\partial \mathcal{R}_2^{\delta,a}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{R}_1^{\delta,a}}{\partial x_2} \right] \right). \end{cases} \tag{7}$$

On en déduit ensuite le tenseur formel des contraintes puis les problèmes vérifiés par les composantes $\mathcal{U}^{\delta,a}$ et $\mathcal{R}^{\delta,a}$ du déplacement élémentaire $U_e^{\delta,a}$.

Théorème 4. *Le déplacement membranaire $U_m^{\delta,a} = \mathcal{U}_1^{\delta,a} \vec{e}_1 + \mathcal{U}_2^{\delta,a} \vec{e}_2$ est la solution du problème variationnel*

$$\begin{cases} U_m^{\delta,a} = \mathcal{U}_1^{\delta,a} \vec{e}_1 + \mathcal{U}_2^{\delta,a} \vec{e}_2 \in H_{\gamma_0}^1(\omega; \mathbb{R}^2), \\ \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\omega} [(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(U_m^{\delta,a})\gamma_{\alpha\beta}(V_m) + \nu\gamma_{\alpha\alpha}(U_m^{\delta,a})\gamma_{\beta\beta}(V_m)] = \delta \int_{\omega} f_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha} \\ \forall V_m = \mathcal{V}_1 \vec{e}_1 + \mathcal{V}_2 \vec{e}_2 \in H_{\gamma_0}^1(\omega; \mathbb{R}^2). \end{cases} \tag{8}$$

La flexion $\mathcal{U}_3^{\delta,a}$ et les angles de rotation $\mathcal{R}_{\alpha}^{\delta,a}$ sont les solutions du problème couplé

$$\begin{cases} (\mathcal{U}_3^{\delta,a}, \mathcal{R}_1^{\delta,a}, \mathcal{R}_2^{\delta,a}) \in \mathbb{H}_{\gamma_0}^1(\omega), \\ \frac{E}{3(1-\nu^2)} \int_{\omega} ((1-\nu)\chi_{\alpha\beta}(\mathcal{R}^{\delta,a})\chi_{\alpha\beta}(\mathcal{A}) + \nu\chi_{\alpha\alpha}(\mathcal{R}^{\delta,a})\chi_{\beta\beta}(\mathcal{A})) \\ + \frac{1}{\delta^2} \frac{5E}{12(1+\nu)} \int_{\omega} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{U}_3^{\delta,a}}{\partial x_1} + \mathcal{R}_2^{\delta,a} \right] \left[\frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial x_1} + \mathcal{A}_2 \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{U}_3^{\delta,a}}{\partial x_2} - \mathcal{R}_1^{\delta,a} \right] \left[\frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial x_2} - \mathcal{A}_1 \right] \right\} = \int_{\omega} f_3 \mathcal{V}_3 \\ \forall (\mathcal{V}_3, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \in \mathbb{H}_{\gamma_0}^1(\omega) \end{cases} \tag{9}$$

où E est le module de Young, ν le coefficient de Poisson et où

$$\chi_{11}(\mathcal{A}) = \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1}, \quad \chi_{22}(\mathcal{A}) = -\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}, \quad \chi_{12}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \right\}.$$

On reconnaît dans (8) le problème membranaire des plaques. On a les convergences fortes suivantes des composantes des tenseurs des contraintes :

$$\frac{1}{\delta} \{ \mathcal{T}_{\delta}(\sigma_{ij}(u^{\delta})) - \Sigma_{ij}(U^{\delta,a}) \} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Le déplacement u^{δ} admet pour approximation

$$u_a^{\delta}(x) = \mathcal{U}^{\delta,a}(\hat{x}) + \delta \mathcal{R}^{\delta,a}(\hat{x}) \wedge x_3 \vec{e}_3 + \delta \bar{U}^{\delta,a} \left(\hat{x}, \frac{x_3}{\delta} \right).$$

4. Estimations de l'erreur

Théorème 5. *On suppose que pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\omega)$ la solution de (2) vérifie*

$$\mathcal{U}^{\delta,a}, \mathcal{R}^{\delta,a} \in \mathbb{H}^2(\omega), \quad \|\mathcal{U}_3^{\delta,a}\|_{H^2(\omega)} + \delta \|\mathcal{U}_3^{\delta,a}\|_{H^2(\omega)} + \delta \|\mathcal{R}_{\alpha}^{\delta,a}\|_{H^2(\omega)} \leq C\delta \|f\|_{\mathbb{L}^2(\omega)}. \tag{10}$$

On a alors les estimations globales suivantes de l'erreur :

$$\begin{cases} \|\mathcal{U}_\alpha^\delta - \mathcal{U}_\alpha^{\delta,a}\|_{L^2(\omega)} \leq C\delta^2, & \|\mathcal{U}_3^\delta - \mathcal{U}_3^{\delta,a}\|_{H^1(\omega)} + \|\mathcal{R}_\alpha^\delta - \mathcal{R}_\alpha^{\delta,a}\|_{L^2(\omega)} \leq C\delta, \\ \|\mathcal{U}_\alpha^\delta - \mathcal{U}_\alpha^{\delta,a}\|_{H^1(\omega)} \leq C\delta^{3/2}, & \|\mathcal{R}_\alpha^\delta - \mathcal{R}_\alpha^{\delta,a}\|_{H^1(\omega)} \leq C\delta^{1/2}, \\ \|\mathcal{T}_\delta(\bar{u}^\delta) - \delta\bar{U}^{\delta,a}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\delta^{5/2}, & \|\mathcal{T}_\delta(\sigma_{ij}(u^\delta)) - \Sigma_{ij}(U^{\delta,a})\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{3/2}. \end{cases} \quad (11)$$

Pour tout ouvert ω' fortement inclus dans ω on a les estimations locales suivantes de l'erreur :

$$\begin{cases} \|\mathcal{U}_\alpha^\delta - \mathcal{U}_\alpha^{\delta,a}\|_{H^1(\omega')} \leq C\delta^2, & \|\mathcal{R}_\alpha^\delta - \mathcal{R}_\alpha^{\delta,a}\|_{H^1(\omega')} \leq C\delta, \\ \|\mathcal{T}_\delta(\bar{u}^\delta) - \delta\bar{U}^{\delta,a}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega')} \leq C\delta^3, & \|\mathcal{T}_\delta(\sigma_{ij}(u^\delta)) - \Sigma_{ij}(U^{\delta,a})\|_{L^2(\Omega')} \leq C\delta^2 \end{cases} \quad (12)$$

où $\Omega' = \omega' \times]-1, 1[$. La constante dépend de ω' .

Idée de la démonstration. Les estimations globales s'obtiennent en partant du problème éclaté (6) et en procédant comme dans [2]. On en déduit ensuite que $|u^\delta|_{\mathcal{E}, \Omega_\delta^*} \leq C\delta^2$. Les estimations locales s'obtiennent en procédant comme dans [3]. \square

Références

- [1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates*, North-Holland, 1997.
- [2] G. Griso, Error estimate and unfolding for periodic homogenization, *Asymptotic Anal.* 40 (3–4) (2004).
- [3] G. Griso, Interior error estimate for periodic homogenization, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 340 (3) (2005) 251–254.
- [4] G. Griso, Asymptotic behavior of structures made of plates, *Anal. Appl.*, in press.